Věta 21.5 [O poklesu Four. koeficientů]

dk. 1. KROK. Nechť jsou f, f' po částech spojité (ne nutně spojité);

$x_0 < x_1 < \dots < x_n$ … výjimečné body (pro obě dohromady)

$$\pi b_k = \int_0^{2\pi} f(t) \sin kx \, dx$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t) \cdot \underbrace{\sin kx \, dx}_{g'(t)} \dots \boxed{\text{per-partes}}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \left[-f(t) \frac{\cos kx}{k} \right]_{x_{j-1}}^{x_j} + \int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(t) \frac{\cos kx}{k} dx \right\}$$

$$= P_k^1 + P_k^2$$

… vidíme $|P_k^1|, |P_k^2| \leq \frac{c}{k}$, neboť:

$$P_1^k = \frac{-1}{k} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(f(x_j+) \cos kx_j - f(x_{j-1}^-) \cos kx_{j-1} \right)}_{\text{omezené veličiny}}$$

a dále: $P_k^2 = \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} \underbrace{f'(x)\cdot \cos kx}_{\text{omezené funkce}}\, dx$

$\Longrightarrow$ celkem tedy $|b_k| \le \frac{C}{k}$,

(analogicky též $|a_k| \le \frac{C}{k}$)

---

2. KROK nechť navíc f je spojité:

pak ale $f(x_j \pm) = f(x_j)$, a tedy $P_k^1 = 0$,

neboť:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(f(x_j)\cos kx_j - f(x_{j-1})\cos kx_{j-1} \right)$$

[teleskopické suma]

$$= f(x_n)\cos kx_n - f(x_0)\cos kx_0$$

$$= f(2\pi)\cos 2k\pi - f(0)\cos 0 = 0$$

[periodické funkce]

$$\Longrightarrow \boxed{\pi b_k = \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos kx\, dx}$$

3. KROK: případ $N=0$, tj. máme:

f spojitá, f', f'' po částech spojité

$$\Rightarrow \pi b_k = \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} f'(x)\cdot \cos kx\, dx,$$

kde $\left|\int_0^{2\pi} f'(x)\cdot \cos kx\, dx\right| \leq \frac{C}{k}$,

(dle KROKU 1, užitého na $f'(x)$)

$\Rightarrow$ CELKEM tedy $|b_k| \leq \frac{C}{k^2}$,

(analogicky též pro $|a_k|$)

---

4. KROK: $N = 1, 2, \ldots$ podobně dále, (formálně indukcí)

$\boxed{\text{IDEA:}}$ $\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\, dx$

derivuji dokud lze

integruji $\Rightarrow \frac{1}{k}$

Věta 21.6 [Integrování Four. řady.]

dk. položme $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\frac{a_0}{2}x$,

tvrdíme: F spojité, 2π-periodické

F' po částech spojité (v R)

• spojitost: $|F(x)-F(y)|$

$$=\left|\int_0^x f(t)\,dt-\frac{a_0}{2}x-\int_0^y f(t)\,dt+\frac{a_0}{2}x\right|$$

$$=\left|\int_y^x f(t)\,dt-\frac{a_0}{2}(x-y)\right|$$

$$\leq\int_x^y \underbrace{|f(t)|}_{\leq M}\,dt+\left|\frac{a_0}{2}(x-y)\right|$$

$$\leq M\cdot|x-y|+\frac{|a_0|}{2}|x-y|$$ ... zřejmé

• 2π-periodické: $F(x+2\pi)-F(x)=$

$$=\underbrace{\int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt}_{\pi\cdot a_0}-\frac{a_0}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\pi=0$$

• $F'(x) = f(x)$ v bodech spojitosti $f(x)$

(viz Věta 9.6 z 1. semestru)

a tedy $F' = f$ je po částech spojité

... Věta 21.2. $\Rightarrow$ $F(x) = \mathcal{F}_F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

kde $\mathcal{F}_F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos kx + B_k \sin kx \right)$,

A_k, B_k ... Four. koef. fce $F(x)$

spočtěme je: per-partes (podobně jako ve Větě 21.5, KROK 1,2)

$$\pi B_k = \int_0^{2\pi} F(x) \cdot \sin kx \, dx$$

$$= \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \underbrace{F'(x)}_{f(x) - \frac{a_0}{2}} \cdot \cos kx \, dx$$

$$= \frac{1}{k} \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx}_{\pi a_k} - \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos kx \, dx}_{0 \ (L.21.1)} \right)$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{a_n}{n}, \quad A_n = \frac{-b_n}{n} \quad \left(\begin{array}{c}\text{ukázáno}\\ \text{podobně}\end{array}\right)$$

$$\text{pro } \forall n = 1, 2, \ldots$$

zbývá A_0 : určíme nepřímo, neboť:

$F(x) = \mathcal{F}_F(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, speciálně:

$$\underbrace{F(0)}_{0} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\underbrace{A_n}_{= \frac{-b_n}{n}} \underbrace{\cos 0}_{1} + B_n \underbrace{\sin 0}_{0} \Big)$$

$$\Rightarrow A_0 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$
