

24. Fourierova transformace

Def: Pro $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definujeme (přednou) Fourierovu transformaci

$$[Ff](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x, \xi)} f(x) dx; \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

Definujeme inverzní (zpětnou) F. t.

$$[F^{-1}f](\xi) = \check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x, \xi)} f(x) dx; \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

žde $(x, \xi) \dots$ skalární součin v \mathbb{R}^n

spec $n=1$: $(x, \xi) = x\xi$

Pozn. • F, F^{-1} přiřadí funkci $f(x)$ opět funkci $\hat{f}(\xi)$, resp. $\check{f}(\xi)$

• definice Lorentzův: $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$: měřitelná; $\int_{\mathbb{R}^n} |f| < \infty$

$$\underbrace{e^{-2\pi i(x, \xi)} f(x)}_{\text{spojitá}}; \quad |e^{-2\pi i \dots}| = 1$$

\Rightarrow měřitelná (proměnná x), ξ pevné
 \rightarrow měřitelná

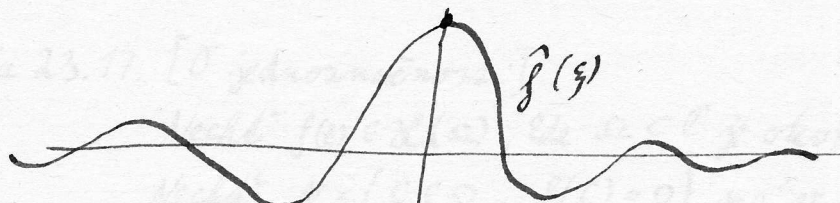
Příkl. $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in (-1, 1) \\ 0 & ; \text{jinde} \end{cases}$

$n=1$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} f(x) dx = \int_{-1}^1 \cos(-2\pi \xi x) + \underbrace{i \sin(2\pi \xi x)}_{0, \text{ lichá}} dx$$

$$= \begin{cases} 2 & ; \xi = 0 \end{cases}$$

$$\left[\frac{\sin(-2\pi \xi x)}{-2\pi \xi} \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{\sin(2\pi \xi)}{\pi \xi} \quad ; \quad \xi \neq 0$$



poznámky: \hat{f} spojitá

$\hat{f} \rightarrow 0, |\xi| \rightarrow \infty$

\hat{f} sudá (f sudá)

} není náhoda

Věta 24.1. Necht' $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Potom

$$(1) \hat{f}^\vee(\xi) = \hat{f}(-\xi)$$

$$(2) \overline{\hat{f}}(\xi) = \widehat{\overline{f}}(\xi)$$

$$(3) \widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}}(\xi)$$

$$(4) \hat{f}(\xi+z) = \left[f(x) e^{-2\pi i(x,z)} \right]^\wedge(\xi) \left. \vphantom{\hat{f}(\xi+z)} \right\} z \in \mathbb{R}^n$$

$$(5) [f(x+z)]^\wedge(\xi) = e^{2\pi i(\xi,z)} \hat{f}(\xi) \left. \vphantom{[f(x+z)]^\wedge(\xi)} \right\} z \in \mathbb{R}^n$$

$$(6) [f(cx)]^\wedge(\xi) = |c|^{-n} \hat{f}(c^{-1}\xi), c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Poznámka: $x \dots$ proměnná před

$\xi \dots$ proměnná přes

DK: (1), (2), (3) ... d. cv.

$$\begin{aligned} (4) \hat{f}(\xi+z) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi+z)} f(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)} \cdot e^{-2\pi i(x,z)} f(x) dx = \\ &= [e^{-2\pi i(x,z)} f(x)]^\wedge(\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) [f(x+z)]^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)} f(x+z) dx \quad \left| \begin{array}{l} \text{subst.: } x+z=y \\ x=y-z \\ dx=dy \end{array} \right. \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(y-z,\xi)} f(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(z,\xi)} e^{-2\pi i(y,\xi)} f(y) dy \end{aligned}$$

$$(6) \text{LS} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)} f(cx) dx \quad \left| \begin{array}{l} cx=y \text{ subst.:} \\ \varphi: (x_1, \dots, x_n) \mapsto (cx_1, \dots, cx_n) \\ dy = |J\varphi| dx \end{array} \right.$$

$$\text{kde } J\varphi = \det \nabla \varphi = \begin{vmatrix} c & \dots & 0 \\ 0 & & c \end{vmatrix} = c^n$$

$$\text{tedy } dy = |c|^n dx$$

$$\begin{aligned} \text{pak LS} &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(\tilde{c}y, \xi)} f(y) |c|^n dy = \\ &= |c|^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(y, \tilde{c}\xi)} f(y) dy \end{aligned}$$

Def: $f(x)$ se nazve *radialně symetrická*, pokud $f(x)$ závisí jen na $|x|$.

Ekvivalentně: $f(Qx) = f(x)$, kde Q je otočení kolem libovolné osy τ , $0 \in \tau$

Věta 27.2. Necht' $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ je sudá (resp. lichá, resp. radialně symetrická).

Pak $\hat{f}(\xi)$ má stejnou vlastnost.

Dk: (lichá)

$$\begin{aligned} \hat{f}(-\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x, -\xi)} f(x) dx \quad \left| \begin{array}{l} \text{subst. } x = -y \\ dx = |J\varphi| dy \\ \varphi: (x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, \dots, -x_n) \\ J\varphi = (-1)^n \end{array} \right. \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(-y, \xi)} f(-y) dy = -\hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

(radialně sym.) Q : lib. otočení

$$\begin{aligned} \hat{f}(Q\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x, Q\xi)} f(x) dx \quad \left| \begin{array}{l} x = Qy \\ dx = |\det Q| dy \end{array} \right. \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(Qy, Q\xi)} f(Qy) dy \cdot \underbrace{|\det Q|}_{=1} = \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

platí $\det Q = \pm 1$ (souvisí se zachováním objemu)

$(Qa, Qb) = (a, b)$ (zachování úhlu \Rightarrow nemění skal. součin)

Značení (Prostory funkcí)

$$L^p(\mathbb{R}^n) \dots L^p\text{-integrace}$$

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}; \quad p \in [1, \infty)$$

$$\left. \begin{aligned} C(\mathbb{R}^n) &= \{f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ spojitá}\} \\ C_b(\mathbb{R}^n) &= \{f \in C(\mathbb{R}^n); f \text{ omezená}\} \\ C_0(\mathbb{R}^n) &= \{f \in C(\mathbb{R}^n); f(x) \rightarrow 0 \text{ pro } |x| \rightarrow \infty\} \\ C_c(\mathbb{R}^n) &= \{f \in C(\mathbb{R}^n); \exists R > 0 : f(x) = 0 \text{ pro } |x| > R\} \end{aligned} \right\} \|f\|_C = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$$

Poznámka: platí inkluze $C_c \subset C_0 \subset C_b$; $C_c \subset L^p \forall p$

ukážeme $C_0(\mathbb{R}^n) \subset C_b(\mathbb{R}^n)$?? $f(x) \in C_0$, neomezená

$$\exists x_k; |f(x_k)| > k; \quad k = 1, 2, \dots$$

$$f \in C_0: \exists R: |f(x)| < 1; |x| > R$$

$$\Rightarrow |x_k| < R \quad \forall k: \{x_k\} \text{ omezená posloupnost} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \text{ podposloupnost } x_{k'} \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{spojitost: } f(x_{k'}) \rightarrow f(x_0) \in \mathbb{C}$$

$$\text{a přitom } f(x_{k'}) \rightarrow \infty \text{ spor.}$$

Věta 24.3. F je spojitě, lineárně zobrazena

z $L^1(\mathbb{R}^n)$ do $C_b(\mathbb{R}^n)$ a platí $\|Ff\|_{C_b} \leq \|f\|_{L^1}$

DK: linearita: $F[f+g] = Ff + Fg$; $F[af] = aFf$

\Rightarrow zjevné

$$? \text{ spojitost: } \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{e^{-2\pi i(x, \xi)}}_{g(\xi, x)} f(x) dx$$

$g(\xi, x) \dots$ závislá na ξ spojitě
 \dots měřitelná vůči x

$$\text{majoranta: } |g(\xi, x)| \leq |f(x)| \in L^1$$

(spojitá závislost integrálu na parametru)

$$? \text{ omezenost } \|\hat{f}\|_{C_b} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$$

$$|\hat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i(x, \xi)} f(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx$$

? spojitost $F: L^1 \rightarrow C_b \Leftrightarrow f_n \rightarrow f \text{ v } L^1 \Rightarrow Ff_n \rightarrow Ff \text{ v } C_b$

$$\|Ff_n - Ff\|_{C_b} = \|F(f_n - f)\|_{C_b} \leq \|f_n - f\|_{L^1}$$

Věta 24.4. [F. d. a. derivace]

(1) Necht $f(x) \in L^1 \cap C_0$, necht $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in C$

Potom $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi)$

(2) Necht $f(x), x_j f(x) \in L^1$

Potom $\frac{\partial}{\partial \xi_j} \widehat{f}(\xi) = [-2\pi i x_j f(x)]^\wedge(\xi)$

Pom. derivace $\frac{\partial}{\partial x_j} \xrightarrow{F}$ nahobeno $(2\pi i) \xi_j$

nahobení $(-2\pi i) x_j \xrightarrow{F}$ derivace $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$

DK BUŇO $j=1$; $x = \langle x_1, \bar{x} \rangle$
 \mathbb{R}^n \mathbb{R}^{n-1}

$f \in C_0 \cap C^1$; $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ pevné
 $0 = \left[e^{-2\pi i \langle x_1, \bar{x} \rangle, \xi} f(x_1, \bar{x}) \right]_{x_1=-\infty}^{x_1=\infty}$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\right] dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi i \xi_j) e^{-2\pi i \langle x_1, \bar{x} \rangle, \xi} f(x_1, \bar{x}) dx_1 +$

$\frac{\partial}{\partial x_1} \langle x_1, \bar{x} \rangle, \xi = \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{j=1}^n x_j \xi_j = \xi_1$ $+ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \langle x_1, \bar{x} \rangle, \xi} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \bar{x}) dx_1$

nyní $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\bar{x}$; Fubini: $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \bar{x}) dx_1 \right) d\bar{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx$

pak $0 = - \int_{\mathbb{R}^n} 2\pi i \xi_j e^{-2\pi i(x, \xi)} f(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x, \xi)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) dx$

(2) $\frac{\partial}{\partial \xi_j} \widehat{f}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{e^{-2\pi i(x, \xi)} f(x) dx}_{g(\xi, x)} \stackrel{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{-2\pi i(x, \xi)}}_{e^{-2\pi i(x, \xi)} \cdot (-2\pi i x_j)} f(x) dx$

ovčrem (*): $g(\xi, \cdot) \dots$ měřitelná

$\exists \frac{\partial}{\partial \xi_j} g \dots f(x)$ konečná o.v. ($f \in L^1$)

$\exists \xi_0; g(\xi_0, \cdot) \in L^1: |g(\xi, x)| \leq |f(x)| \in L^1 \neq \xi$

majoranta: $|\frac{\partial}{\partial \xi_j} g| = 2\pi |x_j f(x)| \in L^1$, nerá o.v. na ξ

Příkl. Necht $u(x), \nabla^2 u(x), \nabla u(x) \in L^1 \cap C_0$
 Potom $[\Delta u(x)]^\wedge(\xi) = -4\pi^2(\xi)^2 \hat{u}(\xi)$

$$\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \quad \text{§ 1.24.4.}$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) \right]^\wedge(\xi) = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)(x) \right]^\wedge(\xi) =$$

$$= 2\pi i \xi_j \left[\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right]^\wedge(\xi) = (2\pi i)^2 \hat{u}(\xi) = -4\pi^2 \xi_j^2 \hat{u}(\xi);$$

$$\sum_{j=1}^n$$

Aplikace: $-\Delta u + \lambda u = f \quad / \quad \mathcal{F}$

$$4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u} + \lambda \hat{u} = \hat{f}$$

$$\hat{u} = \frac{\hat{f}}{4\pi^2 |\xi|^2 + \lambda} \quad ; \quad u = \mathcal{F}_1^{-1} \left(\frac{\hat{f}}{4\pi^2 |\xi|^2 + \lambda} \right)$$

Věta 24.5 [Nulová F. a. v nekonečnu]

Necht $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Potom $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$; $|\xi| \rightarrow \infty$

Dk: 1. krok: $\varphi(x) \in C_c^\infty$

$$\psi(x) := \varphi(x) - \Delta \varphi(x) \in C_c^\infty \subset L^1$$

v. 24.3. $\hat{\psi} \in C_b$; $\forall \epsilon > 0 \exists K > 0 : |\hat{\psi}(\xi)| \leq K + \epsilon$

$$\hat{\psi}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) + 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{\varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) (1 + 4\pi^2 |\xi|^2)$$

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \leq K \cdot (1 + 4\pi^2 |\xi|^2)^{-1}; \text{ a tedy } \hat{\varphi}(\xi) \rightarrow 0; |\xi| \rightarrow \infty$$

2. krok: $f(x) \in L^1$ libovolně; $\epsilon > 0$ dáno

Věta o hustotě: $\exists \varphi \in C_c^\infty; \|f - \varphi\|_{L^1} < \frac{\epsilon}{2}$

krok 1: $\hat{\varphi} \in C_0$; $\exists R > 0 \quad |\hat{\varphi}(\xi)| < \frac{\epsilon}{2}; \quad |\xi| > R$

$$|\hat{f}(\xi)| = |\hat{f}(\xi) - \hat{\varphi}(\xi) + \hat{\varphi}(\xi)| \leq \underbrace{|\hat{f}(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)|}_{P_1} + \underbrace{|\hat{\varphi}(\xi)|}_{P_2}$$

$$P_1 \leq \|\hat{f} - \hat{\varphi}\|_{C_b} \stackrel{\text{v. 24.3.}}{\leq} \|f - \varphi\|_{L^1} < \frac{\epsilon}{2}$$

$$P_2 < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall |\xi| > R \quad \text{celkem } |\hat{f}(\xi)| < \epsilon; \quad \forall |\xi| > R$$

Def: Nosič funkce $\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq 0\}}$
(support)

Věta 24.6. Necht $f(x) \notin \mathcal{D}$ je spojitá a má omezený nosič a $f \neq 0, x \in \mathbb{R}$

Potom $\hat{f}(\xi)$ nemá omezený nosič

DK: BÚNO: $\text{supp } f \subset [-\pi, \pi]$ (ke přístálování argumentu $f \mapsto f(\lambda x)$)

1. krok: $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx =$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-2\pi i x \xi)^{\ell}}{\ell!}}_{\text{řad. výř.}} \underbrace{f(x)}_{\text{omezená}} dx$$

vůči: x

=> lze namístit Σ a f :

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-2\pi i)^{\ell}}{\ell!} x^{\ell} f(x) dx \right)}_{C_{\ell}} \xi^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_{\ell} \xi^{\ell}$$

platí $\forall \xi \in \mathbb{R}$

mocninna řada, poloměr konvergence = ∞

=> $\hat{f}(\xi)$ má smysl pro $\forall \xi \in \mathbb{C}$ a $\hat{f} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

2. krok: ?? necht $\hat{f}(\xi) = 0 \forall \xi \in \mathbb{R}; |\xi| > L$

$$N = \{\xi \in \mathbb{C}; \hat{f}(\xi) = 0\} \supset (L, \infty)$$

=> N má v \mathbb{C} hromadný bod; např. L

V 23.17 $\rightarrow \hat{f} \equiv 0 \vee \mathbb{C}$

3. krok: ? $f(x) \equiv 0$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = 0; \forall \xi \in \mathbb{C}$$

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \underbrace{e^{-i\ell x}}_{\cos \ell x - i \sin \ell x} dx = \pi (a_{\ell} - i b_{\ell})$$

Four. koef. $f(x)$

V 21.7. : $\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ spojitá} \\ a_{\ell}, b_{\ell} = 0 \end{array} \right\} f(x) = 0$

Pozn. : hledáme prostor funkcí $X \dots F: X \rightarrow X$ vzájemně
jednoznačně

$C_c \dots NE$ (viz V.24.6.)

$L^1 \dots NE$ ($F: X_{(-1,1)} \rightarrow \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi} \in L^1$)

$C_0 \dots NE$ ($F: L^1 \rightarrow C_0$; není na)

Řešení $L^2(\Omega)$

Schwartzův prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Definice n -tice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; $\alpha_j \geq 0$ celé; se nazývá
multiindex; $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ je stupeň multiindexu

$$f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \quad D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) = \{ f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, D^\alpha f(x) \text{ spojitá } \forall |\alpha| \in \mathbb{N} \}$$

$$\text{polynom } p(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \text{ stupně } \leq N \dots p(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha x^\alpha$$

Zobecnění věty 24.4.

(1) necht $D^\alpha f(x) \in L^1 \cap C_0$ pro $\forall |\alpha| \leq \ell$

$$\text{Potom } [D^\alpha f(x)]^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \quad \forall |\alpha| \leq \ell$$

(2) necht $x^\alpha f(x) \in L^1$ pro $\forall |\alpha| \leq \ell$

$$\text{Potom } D^\alpha \hat{f}(\xi) = [(-2\pi i x)^\alpha f(x)]^\wedge(\xi) \quad \forall |\alpha| \leq \ell$$

Dk

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \xrightarrow{F} 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi)$$

$$D^\alpha f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f(x) \xrightarrow{F} \underbrace{(2\pi i \xi_1)^{\alpha_1} \dots (2\pi i \xi_n)^{\alpha_n}}_{(2\pi i \xi)^\alpha} \hat{f}(\xi)$$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial \xi_j} \hat{f}(\xi) \xleftarrow{F} [(-2\pi i x_j) f(x)]^\wedge(\xi)$$

$$D^\alpha \hat{f}$$

$$(-2\pi i x_j)^\alpha$$

Def [Schwartzův prostor „rychle klesající funkce“]

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{ f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n); x^\alpha D^\beta f \text{ je omezená } \forall \alpha, \beta \}$$

Pozn.: ekvivalentní: $p(x) D^\beta f(x)$ omezená \forall polynom $p(x)$

speciálně $p(x) = (1+|x|^2)^N; |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$

$$|(1+|x|^2)^N D^\beta f(x)| \leq K \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$|D^\beta f(x)| \leq \frac{K}{(1+|x|^2)^N} \quad \text{libovolné } N \text{ (} K \text{ závislé na } N \text{)}$$

• $C_c^\infty \subset \mathcal{S} \dots f(x) \in C_c^\infty \Rightarrow x^\alpha D^\beta f(x) \in C_c^\infty \subset C_b$

• $C_c^\infty \subsetneq \mathcal{S} \dots e^{-|x|^2} = \exp(-x_1^2 - \dots - x_n^2)$

$$x^\alpha D^\beta e^{-|x|^2} = g(x) e^{-|x|^2}; \quad g(x) \text{ polynom}$$

\uparrow
 $C_c \subset C_b$ \rightarrow velmi rychle pro $|x| \rightarrow \infty$

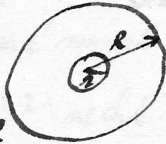
Lemma 24.1. [Integrace radiálních funkcí]

Nechť $f(|x|) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$

Pat $\int_{|x| < R} f(|x|) dx = \beta_n \int_0^R r^{n-1} f(r) dr$

zde β_n je $(n-1)$ rozměrná míra $\{ |x| = 1 \}$ (sféra)

Důl. „Fubini“



$$(LS) = \int_0^R \left(\int_{|x|=r} f(x) d\sigma_{n-1} \right) dr$$

$\sigma_{n-1} \dots (n-1)$ rozměrná míra v \mathbb{R}^n

$$\int_{|x|=r} f(x) d\sigma_{n-1} = f(r) \underbrace{\sigma_{n-1} \{ x \in \mathbb{R}^n; |x| = r \}}_{\beta_n \cdot r^{n-1}}$$

\hookrightarrow 1-sféra

Důsledek: $\int_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|)^p} < \infty \Leftrightarrow p > n$

$$\int_0^\infty \frac{r^{n-1} \beta_n}{(1+r)^p} dr; \text{ integrand } \sim r^{n-1-p}; r \rightarrow \infty$$

konvergence: $n-1-p < -1 \Leftrightarrow n < p$

Věta 24.7. [Vlastnosti \mathcal{S}]

- (1) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $\rightarrow p$
- (2) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n) \forall p \in [1, \infty]$
- (3) $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow x^\alpha f(x), D^\alpha f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Dě (1) viz předchozí poznámky

(2) důležitá úvaha: $\forall N \in \mathbb{N} \exists K |f(x)| \leq \frac{K}{(1+|x|^2)^N}$

$\Rightarrow f(x) \rightarrow 0; |x| \rightarrow \infty$; $\exists f \in C_0$
 $\rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{K^p}{(1+|x|^2)^{pN}} dx \stackrel{L24.1.}{=} C \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{2N}} dr$
 integrál konverguje $\Leftrightarrow N > \frac{n}{2p}$ $f(r) \sim r^{n-1-2pN}; r \rightarrow \infty$

- (3) ? $x^\alpha f(x) \in \mathcal{S}$... konečná kombinace $f(x)$ a $D^\beta f(x)$
- (i) $x^\alpha f(x) \dots$ o.k.
- (ii) $x^\alpha D^\beta (x^\alpha f(x)) \dots$ omezení??

Věta 24.8. $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

dě. $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dáno

- 1. $\hat{f}(\xi) \in C^\infty$: v. 24.7.: $x^\alpha f(x) \in L^1 \cap C_0 \forall \alpha$
 důsledek věty 24.4.: $D^\alpha \hat{f}(\xi) = [(-2\pi i x)^\alpha f(x)]^\wedge(\xi)$
 \uparrow
 $C_0 \supset C_c \xleftarrow{v. 24.3.} \mathcal{S} \subset L^1$ (v. 24.7.)

- 2. $\xi^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi) \dots$ omezená; α, β libovolné
 $D^\beta \hat{f}(\xi) = [(-2\pi i x)^\beta f(x)]^\wedge(\xi)$
 $(2\pi i \xi)^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi) = [D^\alpha \{(-2\pi i x)^\beta f(x)\}]^\wedge(\xi)$ důl. v. 24.4.
 $\xi^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{|\alpha|} [D^\alpha \{(-2\pi i x)^\beta f(x)\}]^\wedge(\xi)$
 \uparrow
 $C_0 \subset C_b \xleftarrow{F} \mathcal{S} \subset L^1$ v. 24.7.

$x \in \mathbb{R}^n$, má-li PS smysl

Def [konvoluce] $f(x), g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}; [f * g](x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy$

- Věta 24.9. [vlastnosti konvoluce]
- (1) $[f * g](x) = [g * f](x)$, má-li jedna strana smysl
 - (2) $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n), g(x) \in L^q(\mathbb{R}^n); \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
 $\Rightarrow \|[f * g](x)\| \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$
 speciálně $[f * g](x)$ má smysl $\forall x \in \mathbb{R}^n$

(3) $f(x), g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$;
 speciálne $[f * g](x)$ má smysl pro s.v. $x \in \mathbb{R}^n$

DK (1) $LS = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ | subst. $y = x-z$
 x pevne' $dy = dz$
 $= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)dz = [g * f](x) = PS$

(2) Hölderova nerovnosť:

$$\int |\varphi(y)\psi(y)| dy \leq (\int |\varphi|^p)^{1/p} \cdot (\int |\psi|^q)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$= \|\varphi\|_{L^p} \cdot \|\psi\|_{L^q}$$

$$|[f * g](x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)| dy \leq \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-z)|^p dz\right)^{1/p}}_{\text{subst } x-y=z} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q dy\right)^{1/q}$$

$$= \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \int |f(z)|^p dz$$

(3) $\|f * g\|_{L^1} = \int |(f * g)(x)| dx \leq \int \left(\int |f(x-y)g(y)| dy\right) dx$

Fubini (neráporný integrand)

$$= \int \left(\int |f(x-z)||g(y)| dx\right) dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < \infty$$

speciálne $f * g \in L^1 \Rightarrow (f * g)(x) \in \mathbb{R}$ pro s.v. $x \in \mathbb{R}^n$

Veta 24.10. [F. d. konvoluce]

Nechť $f(x), g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Potom $[(f * g)(x)]^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$

dk. $f * g \in L^1$ (předchozí věta) \Rightarrow F. d. má smysl

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x, \xi)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy\right) dx$$

Fubini (?) $= \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{-2\pi i(y, \xi)} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x-y, \xi)} f(x-y) dx \right) dy$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(y, \xi)} g(y) \hat{f}(\xi) dy = \hat{g}(\xi) \hat{f}(\xi)$$

$$\Downarrow \text{subst. } x-y=z, dx=dz \text{ (y pevne')} \\ = \int e^{-2\pi i(z, \xi)} f(z) dz = \hat{f}(\xi)$$

ověřit Fubiniho: $h(x, y) = e^{-2\pi i(x, \xi)} f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |h(x, y)| dx dy = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)| dy dx = \dots \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1} \text{ viz 1.2 \S 9.}$$

Fubini (neráporný)

Lemma 24.2. [F. d. gausiánu] $[e^{-\pi|x|^2}]^\wedge(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$

dl. vime $e^{-\pi|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

1. kroč. : $n=1$

$$v(\xi) := [e^{-\pi x^2}]^\wedge(\xi)$$

$$v'(\xi) = [(-2\pi i x) e^{-\pi x^2}]^\wedge(\xi) \quad \text{V24.4.(2)}$$

porozováni: $i \frac{d}{dx} e^{-\pi x^2}$

$$= i \left[\frac{d}{dx} e^{-\pi x^2} \right]^\wedge(\xi) = i(2\pi i \xi) [e^{-\pi x^2}]^\wedge(\xi)$$

$$= -2\pi \xi v(\xi)$$

$$v'(\xi) + 2\pi \xi v(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad / \quad e^{\pi \xi^2}$$

$$(v(\xi) e^{\pi \xi^2})' = 0$$

$$v(\xi) = C e^{-\pi \xi^2}; \quad \text{pro vhodné } C \in \mathbb{R}$$

$$C = v(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \cdot 0 \cdot x} e^{-\pi x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx \quad \left| \begin{array}{l} x = \frac{u}{\sqrt{\pi}} \\ dx = \frac{du}{\sqrt{\pi}} \end{array} \right.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{\pi}} = 1$$

$\sqrt{\pi}$ (Dirichletův integrál, moria Poissonův)

n obecně:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(\xi, x)} e^{-\pi|x|^2} dx =$$

$$(\xi, x) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n$$

$$|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(\xi_1 x_1 - \pi x_1^2) - \dots - 2\pi i(\xi_n x_n - \pi x_n^2)} dx =$$

Fubini

$$(e^{-\pi|x|^2} \in L^1) \int_{\mathbb{R}} \left(\dots \int_{\mathbb{R}} () dx_n \right) dx_1 =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi_1 x_1 - \pi x_1^2} dx_1 \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi_n x_n - \pi x_n^2} dx_n =$$

$$= e^{-\pi \xi_1^2} \dots e^{-\pi \xi_n^2} = e^{-\pi|\xi|^2}$$

(případ $n=1$)

Poznámka: Diracova funkce : $\delta(x) = 0 ; x \neq 0$
 $\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) dx = 1$

- skalární funkce neexistuje ($\delta(x) \notin L^1(\mathbb{R}^n)$)
 Nechtě ale $\delta(x)$ existuje, pak má tyto vlastnosti:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(x) dx = f(0) ; f \text{ spojitá}$$

Sudiciz :

$$[f * \delta](x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \delta(y) dy = f(x-y) \Big|_{y=0} = f(x)$$

$$f * \delta = f$$

$$\hat{\delta}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(\xi, x)} \delta(x) dx = 1$$

... opět vidíme, že $\delta(x) \notin L^1$ ($\hat{\delta} \in C_0$, viz V 24.5.)

Lemma 24.3. [Aproximace Diracovy funkce]

Nechtě $f(x) \in C_b(\mathbb{R}^n)$, nechtě $\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$; $\int \varphi(x) dx = 1$

Obznačme $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

Pak $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [f * \varphi_\varepsilon](x) = f(x) ; \forall x \in \mathbb{R}^n$

Dk. $[f * \varphi_\varepsilon](x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy \Big|_{\substack{y = \varepsilon z \\ dy = \varepsilon^n dz \\ \det \begin{pmatrix} \varepsilon & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon \end{pmatrix} = \varepsilon^n}}$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \varepsilon z) \varphi(z) dz \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$$

$$\rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(z) dz = f(x) \underbrace{f(x) \varphi(z)}$$

z. náměna lim a \int : $g(\varepsilon, z) \rightarrow f(x) \varphi(z) + z$ pevně
 majoranta $|g(\varepsilon, z)| \leq C |\varphi(z)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Věta 24.11. [Inverse F. t.]

Necht' $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$

Polom $[\hat{f}]^\vee = f$, $[\hat{f}]^\wedge = f$

DK (demoverse)

$$[\hat{f}(y)]^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x y} \hat{f}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x y} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y u} f(u) du \right) dy \stackrel{!}{=} f(x)$$

$$\begin{cases} \hat{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x,y)} \psi(y) dy \\ \hat{\varphi}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(y,u)} \varphi(u) du \end{cases}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(u) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i y(x-u)} dy \right) du = \begin{cases} u = x-z \\ du = dz \\ (\text{1 perve}) \end{cases}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z) h(z) dz = [f * \delta](x) = f(x)$$

$$h(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i y z} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi z y) + i \sin(2\pi z y) dy$$

$$h = \delta \quad \begin{cases} z=0 : h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 = \infty \\ z \neq 0 : \text{integrand } \sim \dots \quad h(z) = 0 \end{cases}$$

DK (obuticiny)

$$I := \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \underbrace{f(u) g(\epsilon y)}_{h(u,y)} e^{2\pi i(y, x-u)} du dy$$

$$g(x) = e^{-\pi |x|^2}$$

$\epsilon > 0$ pevne'

$f \in \mathcal{G}$ dana' funkce

$$|h(u,y)| = |f(u)| e^{-\pi \epsilon^2 |y|^2} \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |h| du dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(u)| e^{-\pi \epsilon^2 |y|^2} du \right) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(u)| du \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi \epsilon^2 |y|^2} dy < \infty$$

$\hookrightarrow f \in \mathcal{G} \subset L^1$

Fubini : $I = \int (\int h du) dy = \int (\int h dy) du$

$$(a) \quad I = \int_{\mathbb{R}^n} g(\epsilon y) e^{2\pi i(y,x)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(u) e^{-2\pi i(y,u)}}_{\hat{f}(y)} du \right) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon y) e^{2\pi i(y,x)} \hat{f}(y) dy \quad | \quad \varepsilon \rightarrow 0+$$

$g(\varepsilon y) \rightarrow g(0) = 1 \quad \forall y$ pevné

$$\rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(y,x)} \hat{f}(y) dy = [\hat{f}]^\vee(x)$$

zřejměna lim a $\int : |g(\varepsilon y) e^{2\pi i(y,x)} \hat{f}(y)| \leq |\hat{f}(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$
 $f \in \mathcal{F} \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{F} \subset L^1$

$$(b) \quad I = \int (\int dy) du = \int_{\mathbb{R}^n} f(u) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon y) e^{2\pi i(y,x-u)} dy \right) du =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon y) e^{2\pi i(z,y)} dy \right)}_{\psi(z)} dz \quad \left. \begin{array}{l} u = x - z \\ du = dz \\ x \dots \text{pevné} \end{array} \right\}$$

$$\psi(z) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon y) e^{-2\pi i(z,y)} dy = [g(\varepsilon y)]^\wedge(-z)$$

$$\text{L. 24.2. } [g(y)]^\wedge(z) = g(z)$$

$$\text{V. 24.1. } [f(\varepsilon y)]^\wedge(z) = \frac{1}{\varepsilon^n} \hat{f}\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$$

$$\psi(z) = \frac{1}{\varepsilon^n} g\left(-\frac{z}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) = g_\varepsilon(z)$$

(mačim L. 24.3)

$$\text{celkem} = [f * g_\varepsilon](x) \rightarrow f(x) ; \quad \varepsilon \rightarrow 0+$$

L. 24.3.; $\psi = g$

Formála: $[\hat{f}]^\vee(x) = f(x) \quad \forall x \dots$ dočráníno falšichy na
 předpokladu $f \in L^1 \cap C_b ; \hat{f} \in L^1$

$$[\hat{f}]^\vee = f \dots \text{V. 24.1.} : \hat{\hat{f}} = \check{f} \Rightarrow \hat{f} = \check{\check{f}}$$

$$\text{podobně} \quad \check{\check{f}} = \hat{f}$$

$$(\check{f})^\wedge = \left(\frac{\check{f}}{\check{f}}\right)^\vee = \hat{\hat{f}} = \check{\check{f}} = \hat{f} = f$$

Důsledek: \mathcal{F} vzájemně jednoznačně zobrazuje $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ na $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

dl. : proke² : - linearita ; stačí $f \in \mathcal{F}, \hat{f} = 0 \Rightarrow f = 0$

v.24.11. : $f = [\hat{f}]^\vee = [0]^\vee = 0$

na ? g dáno ; $g \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists f \in \mathcal{F}, \hat{f} = g$

plós $f := \check{g} : \hat{f} = [\hat{g}]^\wedge = g ;$ v.24.11.

Table's plati F_{-1} robrans $\mathcal{F} \xleftrightarrow{-1} \mathcal{F}$

nyní je cílem rozšířit F na $L^2(\mathbb{R}^n)$

Lemma 24.4. [0 přehledu F.1.]

Nechť $f(x), g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Potom

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \check{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x) g(x) dx$$

DK

(1. vzťah) : $f, g \in L^1 \xrightarrow{v.24.3.} \hat{f}, \hat{g}$ omezené ... integrály mají smysl

$$(LS) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,y)} g(y) dy}_{\hat{g}(x)} \right) dx =$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(x,y)} dx}_{\hat{f}(y)} \right) dy = (PS)$$

ověření Fubiniho : $h(x,y) = f(x) g(y) e^{-2\pi i(x,y)} \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |h(x,y)| dx dy = \iint |f(x)| |g(y)| dx dy =$$

$$= \int |f(x)| dx \cdot \int |g(y)| dy < \infty$$

Fubini
 ≥ 0

předpoklad : $f, g \in L^1$

Opalování: $L^2(\mathbb{R}^n) = \{ f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, \text{měřitelná}, \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 < \infty \}$

$$\|f\|_{L^2} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

konvence: $f = g$ ve smyslu $L^2(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ s.v. v \mathbb{R}^n

skalární součin: $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bar{g}(x) dx$

Cauchy-Schwarz: $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$

Hlubší vlastnosti (nedokázáno)

① $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ je hustý v $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n) \exists \varphi_n \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n) \varphi_n \rightarrow f$ v L^2
(tj. $\|\varphi_n - f\|_{L^2} \rightarrow 0$)

② $L^2(\mathbb{R}^n)$ je úplný:

$\{f_n\} \subset L^2$ konverguje ($\exists f: f_n \rightarrow f$ v L^2)

\Leftrightarrow platí B.C. podmínka:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0) (\forall m, n \geq n_0) [\|f_m - f_n\|_{L^2} < \varepsilon]$$

Věta 24.12. [Blancherelova nerovnost]

Nechť $f(x), g(x) \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$

Potom $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$

speciálně $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$

Dk:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int f \bar{g} \quad ; \quad \text{v.24.11. } f = (\hat{f})^\vee, \text{ pak } = \\ &= \int (\hat{f})^\vee \bar{g} \stackrel{\text{v.24.7.}}{=} \int \hat{f} (\bar{g})^\vee \stackrel{\text{v.24.1.}}{=} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \end{aligned}$$

(*) $f = (\hat{f})^\vee$
 (**) $(\bar{g})^\vee = (\hat{g})^\vee$

Věta 24.13. [F. br. v $L^2(\mathbb{R}^n)$]

(1) Existují zobrazení $F_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ takové, že

$$F_2 f = \hat{f} \quad \forall f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$$

(2) F_2 je izomorfismus $L^2(\mathbb{R}^n)$ na sebe; tj. vzájemně
jdnorůzné zobrazení, zachovávající normu
a skalární součin.

DK (1) 1. krok : $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dává

věta o hustotě : $\exists \varphi_n \in \mathcal{G} ; \varphi_n \rightarrow f$ v L^2

$\{\varphi_n\}$ -- Cauchyovské v L^2 v.24.12. (Plancherel)

$\Rightarrow \{\hat{\varphi}_n\}$ Cauchyovské v L^2 !! $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{L^2} = \|\hat{\varphi}_n - \hat{\varphi}_m\|_{L^2}$

($\hat{\varphi}_n = F\varphi_n$ má smysl : $\varphi_n \in \mathcal{G} \subset L^1$)

úplnost L^2 : $\exists g \in L^2 : \varphi_n \rightarrow g$ v L^2

definují : $F_2 f := g$

2. krok ? Zorůdnost definice : nerovně na volbě $\{\varphi_n\}$

necht $\varphi_n \rightarrow f$ v L^2

$\varphi_n \rightarrow f$ v L^2 $\varphi_m, \varphi_n \in \mathcal{G}$

$\varphi_m - \varphi_n \rightarrow f - f = 0$ v L^2

v.24.12 - $\hat{\varphi}_m - \hat{\varphi}_n \rightarrow 0$ v L^2

tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\varphi}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\varphi}_n$

3. krok je to rozšíření F ?

$f \in \mathcal{G}$: lze volit $\varphi_n = f + n$

$F_2 f = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\varphi}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f} = \hat{f}$

MIMORÁDĚNÁ PŘEDNÁŠKA 24.5.2010

Věta 24.13. [F. fr. v $L^2(\mathbb{R}^n)$ - DOKONČENÍ]

Existuje lineární zobrazení $F_2: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ tak, že

(1) $F_2 f = F f \quad \forall f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$

(2) F_2 je izomorfismus $L^2(\mathbb{R}^n)$ na sebe (tj. prosté, na,

DK: (1) viz výše zachováva normu)

(2) 1. krok $\langle f, g \rangle = \langle F_2 f, F_2 g \rangle, \quad \forall f, g \in L^2$

volme $\psi_n \in \mathcal{G}; \psi_n \rightarrow f$
 $\psi_n \in \mathcal{G}; \psi_n \rightarrow g$ } v L^2

dle definice: $\hat{\psi}_n \rightarrow F_2 f$
 $\hat{\psi}_n \rightarrow F_2 g$

Blancherel: $\langle \psi_n, \psi_n \rangle = \langle \hat{\psi}_n, \hat{\psi}_n \rangle \quad \forall n$

$n \rightarrow \infty$; spojitost skal. součinu (L. 21.1.)

$\langle f, g \rangle = \langle F_2 f, F_2 g \rangle$

speciálně ($f=g$): $\|f\|_{L^2} = \|F_2 f\|_{L^2}$

tj. F_2 zachováva normu, je prosté

2. krok: F_2 je na: $g \in L^2$ dáno? $\exists f \in L^2: F_2 f = g$

volme $\psi_n \in \mathcal{G}, \psi_n \rightarrow g$ v L^2

položíme $\psi_n = [\psi_n]^v$ $\{\psi_n\}$ Cauchyovská (má limitu)
 $\{\hat{\psi}_n\}$ — (Blancherel; $\psi_n = \hat{\psi}_n$)

úplnost L^2 : $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n =: f$

$F_2 f = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\psi}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = g$

Poznámka: Jak počítat $F_2 f$ prakticky?

$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(\xi, x)} f(x) dx$ nemá smysl pro $f \in L^2, L^1$

Lze dokázat: $[F_2 f](\xi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{|x| < R} e^{-2\pi i(\xi, x)} f(x) dx}_{I(R)}$ pro s. v. ξ

Pozoruj: $|I(R)| \leq \int_{|x|<R} |f(x)| dx \leq \left(\int_{|x|<R} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{|x|<R} 1^2 dx \right)^{1/2}$

$< \infty$ pro $\forall R$

Obecně: $L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$; viz např. $\frac{1}{1+|x|}$

Pro $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$: $I(R) \rightarrow \hat{f}(\xi) \neq \xi$

Úmluva: Dále píšeme $\mathcal{F}f, \hat{f}$ místo $\mathcal{F}_2 f; f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

PŘÍKLAD:

$$\left[\frac{x}{(x^2 - 11ix - 10)^2} \right]^\wedge(\xi) = ?$$

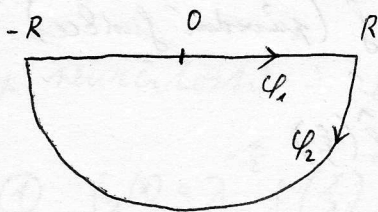
$f(x)$

singularities: $D = (-11i)^2 + 4 \cdot 10 = -81$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(11i \pm 9i) = \begin{matrix} i \\ -10i \end{matrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ spojitá v } \mathbb{R} \\ |f(x)| \sim \frac{1}{|x^3|}; x \rightarrow \pm\infty \end{array} \right\} \Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R})$$

a) pro $\xi \geq 0$ nutno při posviti residuové věty
posvitit dolní půlkružnici



$$g(z) = \frac{z \cdot e^{-2\pi i \xi z}}{(z^2 - 11iz - 10)^2}$$

• dle místa singularit:

podle Cauchyho věty $0 = \int_{\varphi} g(z) dz = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2}; R \rightarrow \infty$
kde $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

$$\int_{\varphi_1} g(z) dz \rightarrow \hat{f}(\xi)$$

ordine: $\int_{\varphi_2} g(z) dz \rightarrow 0$

$$z \in \langle \varphi_2 \rangle : \text{Im } z \leq 0$$

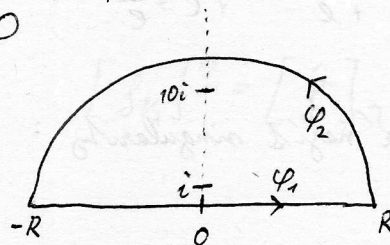
$$|e^{-2\pi i \xi z}| = e^{\text{Re}(-2\pi i \xi z)} = e^{2\pi \xi \text{Im } z} \leq 1$$

$$|g(z)| \leq \frac{C}{|z^3|}$$

závěr: $\hat{f}(\xi) = 0; \xi \geq 0$

b) pro $\xi < 0$:

$$\int_{\varphi_1 + \varphi_2} g(z) dz = 2\pi i (\text{res}_i g + \text{res}_{10i} g)$$



podobnou úvahou : $\int_{\gamma_1} \rightarrow \hat{f}(\xi) ; \int_{\gamma_2} \rightarrow 0$

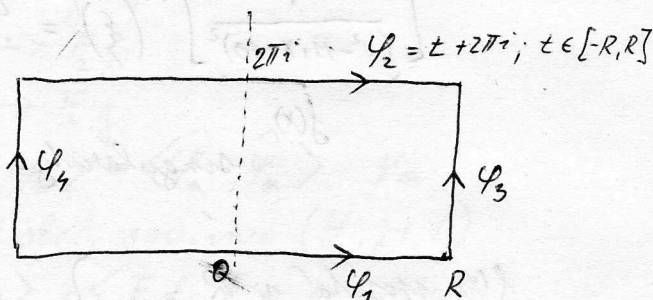
$$\xi > 0 : \hat{f}(\xi) = 2\pi i (\text{res}_i + \text{res}_{10i}) = \frac{1}{729} \left[e^{207\xi} (11-1807\xi) - e^{27\xi} (11+187\xi) \right]$$

PŘÍKLAD (jím's' byt)

$$\left[\frac{1}{e^z + e^{-z} + e + \frac{1}{e}} \right]^\wedge (\xi) = ?$$

f nemá singularitu v \mathbb{R} , funkce je integrovatelná

$$g(z) = \frac{e^{-2\pi i \xi z}}{e^z + e^{-z} + e + \frac{1}{e}}$$



ale integrujeme přes :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_4$$

$$\int_{\varphi_1} g(z) dz \rightarrow \hat{f}(\xi); R \rightarrow \infty$$

$$\int_{\varphi_2} g(z) dz = \int_{-R}^R f(t+2\pi i) \cdot e^{-2\pi i \xi (t+2\pi i)} dt \stackrel{\Delta}{=} \int_{-R}^R f(t) \cdot e^{-2\pi i \xi t} \cdot e^{4\pi^2 \xi} dt \rightarrow e^{4\pi^2 \xi} \hat{f}(\xi)$$

• Buď je v tom, že f (původní funkce) je $2\pi i$ periodická

$$\stackrel{\Delta}{=} \int_{-R}^R f(t) \cdot e^{-2\pi i \xi t} \cdot e^{4\pi^2 \xi} dt \rightarrow e^{4\pi^2 \xi} \hat{f}(\xi)$$

určíme : $\int_{\varphi_3} g, \int_{\varphi_4} g \rightarrow 0; R \rightarrow \infty$

určíme pro φ_4 :

$$\varphi_4 = -R + 2\pi i t ; t \in [0, 1]$$

$$\frac{e^{-2\pi i \xi (-R + 2\pi i t)}}{e^{-R + 2\pi i t} + e^{R - 2\pi i t} + e + \frac{1}{e}}$$

čitatel : $1 \leq e^{4\pi^2 t} \leq e^{4\pi^2}$

// na imaginární části $|e^{i \cdot}|$ nezávisí

jmenovatel : $|1| \geq |e^{-R + 2\pi i t} + e^{R - 2\pi i t} + e + \frac{1}{e}|$
 $\geq e^{-R} - e^{-R} - e - \frac{1}{e} \rightarrow \infty$
 velmi rychle

hledáváme její singularitu :

singularity: $e^z + e^{-z} + e + \frac{1}{e} = 0 \quad | \quad e^z = \lambda$

$\lambda^2 + \lambda(e + \frac{1}{e}) + 1 = 0$

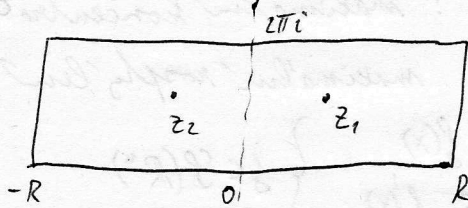
$(\lambda + e)(\lambda + \frac{1}{e}) = 0$

$e^z = -e = e^{1+i\pi}$

$z = 1 + i\pi + 2k\pi i; \quad k \in \mathbb{Z}$

$e^z = -\frac{1}{e} = e^{-1+i\pi}$

$z = -1 + i\pi + 2k\pi i; \quad k \in \mathbb{Z}$



poise $\left. \begin{matrix} z_1 = 1 + i\pi \\ z_2 = -1 + i\pi \end{matrix} \right\} \in \text{ind } \varphi$

pro $R \rightarrow \infty$: $(1 - e^{4\pi^2 \xi}) \hat{f}(\xi) = 2\pi i (\text{res}_{1+i\pi} g + \text{res}_{-1+i\pi} g)$

$g = \frac{e^{-2\pi i \xi z}}{e^z + e^{-z} + e + \frac{1}{e}}$

celkem: $\hat{f}(\xi) = \frac{2\pi e}{e^2 - 1} \cdot \frac{e^{2\pi^2 \xi}}{e^{4\pi^2 \xi} - 1} \sin 2\pi \xi; \quad \xi \neq 0$

v nule lze využít spojitosti, nebo spočítat přímo z definice

$\hat{f}(0) = \frac{e}{e^2 - 1}$

d. cv.: ověřte si sudost $\hat{f}(\xi) \parallel f(x)$ je sudá

"Princip neúměrnosti": $f(x)$ koncentrována $\Rightarrow \hat{f}(\xi)$ rozptýlena
 \hat{f} — " — $\Rightarrow f$ — " —

① $f_\lambda(x) = \lambda^{-\frac{n}{2}} f(\frac{x}{\lambda}); \quad \lambda > 0$

určíme $\|f_\lambda\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$:

$\|f_\lambda\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda^{-\frac{n}{2}} f(\frac{x}{\lambda})|^2 dx \quad \left| \begin{matrix} x = \lambda y \\ dx = \lambda^n dy \end{matrix} \right| = \lambda^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^2 \lambda^n dy = \|f\|_{L^2}^2$



$[f(\lambda x)]^\wedge(\xi) = \lambda^{-\frac{n}{2}} \hat{f}(\frac{\xi}{\lambda})$

$[f_\lambda]^\wedge = [\hat{f}]_\lambda$

$[\lambda^{\frac{n}{2}} f(\lambda x)]^\wedge(\xi) = \lambda^{-\frac{n}{2}} \hat{f}(\frac{\xi}{\lambda})$

② Věta 24.6 : $\left. \begin{array}{l} \text{supp } f \text{ omezený} \\ f \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{supp } \hat{f} \text{ neomezený}$

③ $\delta_0 \xrightarrow{F} 1$ krajní případ : maximální koncentrace δ
 \rightarrow maximální rozptyl 1

④ Definujeme $X: f(x) \mapsto x f(x)$
 $D: f(x) \mapsto \frac{1}{2\pi i} f'(x)$ } $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\|Xf\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} x^2 |f(x)|^2 dx \dots \text{míra rozptylnosti nosiče } f \text{ od nuly}$$

$$\|Df\|_{L^2}^2 = \|\widehat{Df}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \dots \text{míra rozptylnosti } \hat{f}(\xi)$$

Věta 24.14. [Heisenbergův princip neurčitosti]

Nechť $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; $\|f\|_{L^2} = 1$

Potom $\|Xf\|_{L^2} \|Df\|_{L^2} \geq \frac{1}{4\pi}$

rovnost nastává $\Leftrightarrow f(x) = a e^{-b|x|^2}$ pro vhodné $a, b > 0$

Nakonec : nosiče f, \hat{f} nemohou být současně příliš koncentrovane