Opakování: $f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 0 \ \forall x$

$\Rightarrow f(x) \equiv c$ v (a,b)

Věta 27.4. Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ souvislá, nechť

$\frac{\partial}{\partial x_j} T = 0$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$ pro $\forall j = 1, \dots, n$

Pak $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tak, že $T = T_c$

d.: $n = 1$, $\Omega = (a,b)$

TRIK: volme $\psi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\int_a^b \psi = 1$

/viz kapitola 16

$\varphi(x) \in \mathcal{D}(a,b)$ ... pevná, libovolná

$$\eta(x) := \varphi(x) - \left(\int_a^b \varphi(s)\,ds \right) \psi(x)$$

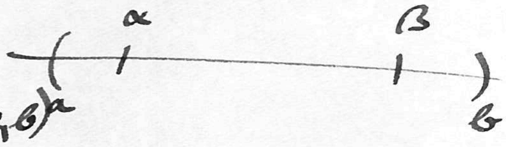
$$\omega(x) := \int_a^x \eta(s)\,ds$$

tvrdím: $\eta, \omega \in \mathcal{D}(a,b)$

$\omega' = \eta$: zjevné ; $\eta \in \mathcal{D}(a,b)$ zjevné

$\omega \in C^\infty$ zjevné

? $\operatorname{supp} \omega \subset\subset (a,b)$



nechť $\operatorname{supp} \eta \subset [\alpha, \beta] \subset (a,b)$

$x < \alpha$: $\omega(x) = \int_a^x \underbrace{\eta(s)}_{=0} ds = 0$

$x > \beta$: $\omega(x) = \int_a^x \eta(s)\,ds = \int_a^b \eta(s)\,ds \ \overset{*}{\underset{(\beta)}{=}} \ \cancel{\int_a^b \varphi(s) ds} -$

$\boxed{\eta = 0 \,;\, s > x}$

$$* = \int_a^b \varphi(s)\,ds - \left(\int_a^b \varphi(s)\,ds \right) \underbrace{\int_a^b \psi(s)\,ds}_{=1} = 0$$

víme: $\frac{d}{dx} T = 0$ v $\mathcal{D}'(a,b)$

$$\underline{0} = \left\langle \frac{d}{dx} T, \omega \right\rangle = \langle T, -\omega' \rangle = \langle T, -\eta \rangle$$

$$\langle T, \varphi \rangle = \left\langle T, \left(\int_a^b \varphi(s)\,ds \right) \psi \right\rangle = \int_a^b \varphi(s)\,ds \ \underbrace{\langle T, \psi \rangle}_{c} = \int_a^b c\, \varphi(s)\,ds = \langle T_c, \varphi \rangle$$

Def Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, nechť $\omega \in C^\infty(\Omega)$
Definujeme distribuci $\omega T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ jako

$$\langle \omega T, \varphi \rangle := \langle T, \omega\varphi \rangle \; ; \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Pozn. $\omega \in C^\infty(\Omega)$ pevné : $T \mapsto \omega T$
je spojité, lineární zobrazení
z $\mathcal{D}'(\Omega)$ do $\mathcal{D}'(\Omega)$, speciálně
$\omega T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

dk. $\varphi \mapsto \omega\varphi$ je spojité, lineární
$\mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ + Lemma 27.2.

linearita : zjevné
spojitost: $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \omega\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$

$$\left.\begin{aligned} &\exists K \subset \Omega \text{ kompakt; } \operatorname{supp}\varphi_n \subset K \;\forall n \\ &D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows 0 \text{ v } \Omega \;\forall \alpha \text{ multiindex} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{supp}(\omega\varphi_n) \subset K$$

$$D^\alpha(\omega\varphi_n) = \sum_{\beta \le \alpha} C_\beta \underbrace{D^{\alpha-\beta}\omega}_{\text{pevné}} \underbrace{D^\beta \varphi_n}_{\rightrightarrows 0}$$

Příkl. ① $x \cdot \delta_0 =$

$$\langle x\delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, x\varphi \rangle = x\varphi\big|_{x=0} = 0$$

② $x \cdot (v.p. \frac{1}{x})$

$$\langle v.p. \tfrac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

$$\langle x \cdot v.p. \tfrac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle v.p. \tfrac{1}{x}, x\varphi \rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon,\varepsilon)} x\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon,\varepsilon)} \varphi(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \langle T_1, \varphi \rangle$$

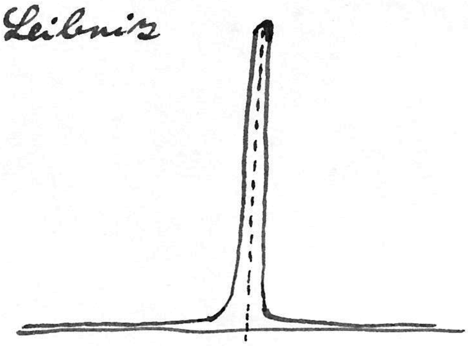
$$\Big(\underbrace{x \cdot \big(v.p. \tfrac{1}{x}\big)}_{1}\Big) \cdot \delta_0 = \underset{T_1}{\overset{}{1}} \cdot \delta_0 = \delta_0$$

$$(\underbrace{x \cdot \delta_0}_{0}) \cdot v.p. \frac{1}{x} = 0 \cdot v.p. \frac{1}{x} = 0$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & ; \; x > 0 \\ 0 & ; \; x < 0 \end{cases}$$ Heaviside

$$\frac{d}{dx} h = \delta_0$$

$$h \cdot h = h \quad \Big/ \frac{d}{dx} \qquad \text{Leibniz}$$



$$\frac{d}{dx} h \cdot h + h \cdot \frac{d}{dx} h = \frac{d}{dx} h$$

$$2\,\delta_0 \cdot h = \delta_0$$

$$\delta_0 \cdot h = \frac{1}{2}\,\delta_0$$

podobně $\quad h \cdot h \cdot h = h \quad \Big/ \frac{d}{dx}$

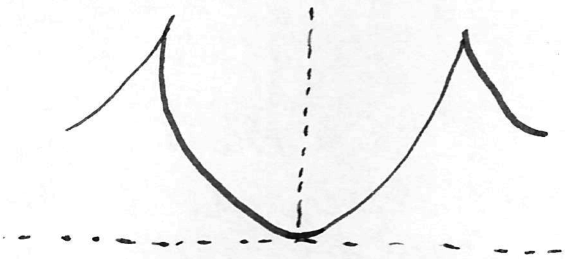
$$\underbrace{(h \cdot h)'}_{2\delta_0 \cdot h} \cdot h + \underbrace{h \cdot h}_{h} \cdot \underbrace{h'}_{\delta_0} = \underbrace{h'}_{\delta_0}$$

$$3\,\delta_0 \cdot h = \delta_0$$

$$\delta_0 \cdot h = \frac{1}{3}\,\delta_0$$

... Schwartzův výsledek o nemožnosti:
není možné mít zároveň Leibnizovo pravidlo,
neohraničenou (neomezenou) derivaci a
bodové násobení funkcí

$f(x) = x^2 \quad ; \; x \in [-\pi, \pi]$
a dále 2π-per.



$$F_f(x) = \frac{\pi^3}{3} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \underbrace{\frac{4(-1)^\ell}{\ell^2} \cos \ell x}_{f_\ell(x)}$$

$f(x)$ ... spojitá, po částech $C^1 \Rightarrow f(x) = F_f(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

tvrdíme: $f(x) = F_f(x)$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \langle T_{\frac{\pi^3}{3}}, \varphi \rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle T, \varphi \rangle$$

$$\int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x)}_{\frac{\pi^3}{3} + \sum_\ell f_\ell(x)} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi^3}{3} \varphi(x)\, dx + \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_\ell(x) \varphi(x)\, dx$$

... záměna Σ, $\int$: konvergence je stejnoměrná

($\nwarrow$ Weierstrass, $|f_k| \leq \frac{c}{k^2}$)

stačí integrovat přes supp φ -- omezený

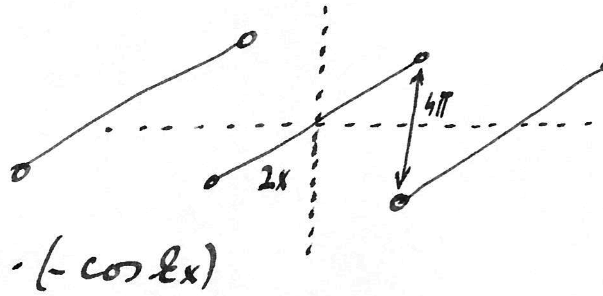
$$f(x) = \frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 4}{k^2} \cos kx \qquad \frac{d}{dx} \text{ spojitá operace v } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 4}{k} (-\sin kx)$$

$$\|$$

$f'(x)$ ... bodová derivace : $f'(x) = 2x$; $x \in (-\pi, \pi)$

a dále 2π - per.



$$\underbrace{\frac{d}{dx} f'(x)}_{= 2 + \sum_j -4\pi\, \delta_{(2j+1)\pi}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 4 \cdot \cancel{\sin kx} \cdot (-\cos kx)$$

$$\frac{x^n}{n!} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdots \frac{x^1}{1!} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{x^0}{0!} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{0 \cdot x^{-1}}{\Gamma(1)} =$$

$$= \frac{\cancel{0} \cdot x^{-1}}{\cancel{0} \cdot \Gamma(0)} \qquad \lambda \to x^\lambda \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \text{ pro } \mathrm{Re}\, \lambda > -1$$

Def. Nechť $\sigma \subset \mathbb{C}$ je oblast.

Parametrickým souborem distribucí (p.s.d.) rozumíme zobrazení $\lambda \mapsto T_\lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Řekneme, že p.s.d. T_λ závisí holomorfně na $\lambda \in \sigma$, jestliže pro $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné je funkce $\lambda \to \langle T_\lambda, \varphi \rangle$ holomorfní v σ $\qquad \sigma \to \mathbb{C}$

Řekneme, že p.s.d. T_λ má v bodě $\lambda_0 \in \sigma$ izolovanou singularitu, jestliže pro $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné má funkce $\lambda \mapsto \langle T_\lambda, \varphi \rangle$ tuto vlastnost.

Řekneme, že $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je reziduum p.s.d. T_λ v bodě $\lambda_0 \in \sigma$, značíme $\mathrm{res}_{\lambda_0} T_\lambda = T$, jestliže $\mathrm{res}_{\lambda_0} \langle T_\lambda, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pevné

Příkl.: $x_+^\lambda := \begin{cases} x^\lambda & ; x>0 \\ 0 & ; x\le 0 \end{cases}$

$|x_+^\lambda| = \begin{cases} 0 & ; x\le 0 \\ x^{\mathrm{Re}\,\lambda} & ; x>0 \end{cases}$

pozoruji: $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$: $x_+^\lambda \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

Příslušné regulární distribuce značme též x_+^λ (místo $T_{x_+^\lambda}$)

Pozn. ① $x_+^\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ závisí holomorfně na $\lambda \in \sigma$; $\sigma = \{\mathrm{Re}\,\lambda > -1\}$

dk. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pevné

$\lambda \mapsto \langle x_+^\lambda, \varphi\rangle = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx$ je holomorfní

$\frac{d}{dx} \cdots \int_0^\infty \ln x \cdot x^\lambda \varphi(x)\,dx$

② $x_+^0 = h(x)$ ... Heavisideova funkce

③ $\mathrm{Re}\,\lambda > 1 \Rightarrow x_+^\lambda \in C^1(\mathbb{R})$ a platí $\frac{d}{dx} x_+^\lambda = \lambda \cdot x_+^{\lambda-1}$

bodově a též díky L.27.4. v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

④ $\underset{\in C^\infty(\mathbb{R})}{x} \cdot x_+^\lambda = x_+^{\lambda+1}$

Pozn.: T_λ z.s.d.; $T_\lambda \in \mathcal{H}(\sigma)$, potom

① $D^\alpha T_\lambda \in \mathcal{H}(\sigma)$ pro $\forall \alpha$ multiindex

? $\lambda \mapsto \langle D^\alpha T_\lambda, \varphi\rangle$ je $\in \mathcal{H}(\sigma)$

$\quad = \langle T_\lambda, \underbrace{(-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi}_{\psi \in \mathcal{D}(\Omega)}\rangle$

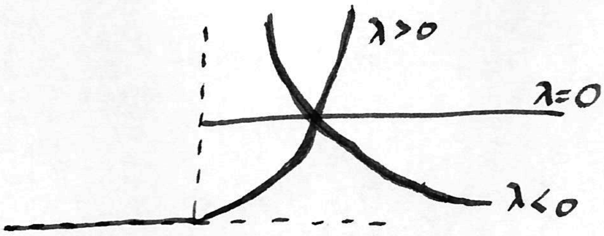
② $\omega \in C^\infty(\Omega)$; $T_\lambda \in \mathcal{H}(\sigma)$

$\omega T_\lambda \in \mathcal{H}(\sigma)$

③ !! Věta o jednoznačnosti: T_λ, S_λ z.s.d., $\in \mathcal{H}(\sigma)$, σ souvislá, nechť $N = \{\lambda \in \sigma, T_\lambda = S_\lambda\}$ má hromadný bod v $\sigma \Rightarrow T_\lambda = S_\lambda$ pro $\forall \lambda \in \sigma$

$x_+^\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$\mathrm{Re}\,\lambda > -1$



pro $\lambda \in \mathbb{R}$
jinak $\lambda \in \mathbb{C}$

$\lambda \mapsto x_+^\lambda$ závisí
$\mathbb{C} \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ holomorfně na $\lambda \in \{\mathrm{Re}\,\lambda > -1\}$

tj. $\lambda \mapsto \langle x_+^\lambda, \varphi\rangle$ je holomorfní $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$
$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Pozn. povolujeme komplexní distribuce
$$T: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$$
formálně: $T = T_1 + i\,T_2$
$$\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx = \int_0^\infty x^{\mathrm{Re}\,\lambda}\cos(\mathrm{Im}\,\lambda \ln x)\,dx + i\int_0^\infty x^{\mathrm{Re}\,\lambda}\sin(\mathrm{Im}\,\lambda \ln x)\,dx$$
$$x^\lambda = \exp(\lambda \ln x) = \exp(\mathrm{Re}\,\lambda \cdot \ln x + i\,\mathrm{Im}\,\lambda \cdot \ln x)$$
$$= x^{\mathrm{Re}\,\lambda}\cdot\left(\cos(\mathrm{Im}\,\lambda \ln x) + i\sin(\mathrm{Im}\,\lambda \ln x)\right)$$

dále platí:
$$\frac{d}{dx} x_+^\lambda = \lambda\, x_+^{\lambda-1}\ ; \quad \mathrm{Re}\,\lambda > 1$$
$$x \cdot x_+^\lambda = x_+^{\lambda+1}\ ; \quad \mathrm{Re}\,\lambda > -1$$

Věta 27.5. Parametrický systém distribucí (p.s.d.) x_+^λ lze holomorfně rozšířit na množinu $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$. Toto rozšíření (značíme stejně) má následující vlastnosti:

1. $$\mathrm{res}_{\lambda=-\ell}\, x_+^\lambda = \frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell-1}\delta_0$$

2. $$\frac{d}{dx} x_+^\lambda = \lambda\, x_+^{\lambda-1}\ ; \quad -\lambda \notin \mathbb{N}$$

3. $$x \cdot x_+^\lambda = x_+^{\lambda+1}\ ; \quad -\lambda \notin \mathbb{N}$$

dl. podobná idea jako V.26.2. (rozšíření Γ funkce)

$\mathrm{Re}\,\lambda > -1$:
$$\frac{d}{dx} x_+^{\lambda+1} = (\lambda+1)\, x_+^\lambda$$
$$x_+^\lambda = \underbrace{\frac{1}{\lambda+1}}_{\mathcal{H}\{\lambda \neq -1\}}\ \frac{d}{dx}\ \underbrace{x_+^{\lambda+1}}_{\in \mathcal{H}\{\mathrm{Re}\,\lambda > -2\}}$$
tedy

$PS \in \mathcal{H}\{\operatorname{Re}\lambda > -2;\ \lambda \neq -1\}$

∴ rozšíření x_+^λ pro tyto hodnoty λ

obecněji: $x_+^\lambda = \frac{1}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+\ell)}\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell x_+^{\lambda+\ell}$; $\operatorname{Re}\lambda > -1$

leč: $PS \in \mathcal{H}\{\operatorname{Re}\lambda > -\ell-1;\ \lambda \neq -1,\dots,-\ell\}$

∴ definuji rozšíření pro tyto λ

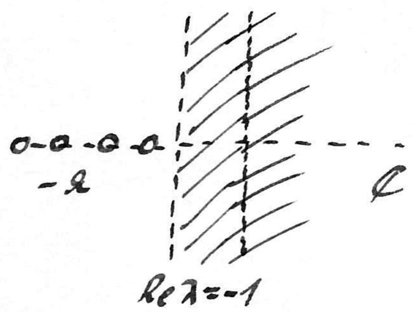
pozoruji: je to rozšíření

vzorce pro různá ℓ nejsou navzájem ve sporu

=> to plyne z: věta o jednoznačnosti + holomorfnost

$\lambda,3$: platí pro $\operatorname{Re}\lambda > -1$

=> platí pro $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$



$\ell \in \mathbb{N}$ pevné:

$$x_+^\lambda = \frac{1}{\lambda+\ell}\cdot\frac{\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell x_+^{\lambda+\ell}}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+\ell-1)} \qquad \lambda \in P(-\ell,\varepsilon);\ \varepsilon \in (0,1)$$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle = \frac{1}{\lambda+\ell}\cdot\underbrace{\frac{\left\langle\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell x_+^{\lambda+\ell}, \varphi\right\rangle}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+\ell-1)}}_{F(\lambda)\in\mathcal{H}(P(-\ell))}$$

$$\Rightarrow \operatorname*{res}_{\lambda=-\ell}\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle = F(-\ell)$$

$$= \frac{\left\langle\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell x_+^0, \varphi\right\rangle}{(-(\ell-1))\cdot\ldots\cdot(-2)(-1)} = \frac{\left\langle\left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell-1}\frac{d}{dx}x_+^0, \varphi\right\rangle}{(-1)^{\ell-1}(\ell-1)!}$$

celkem: $\operatorname*{res}_{\lambda=-\ell}\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle = \frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\left\langle\left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell-1}, \varphi\right\rangle$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ... tj. platí 1. část věty

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\ell} x_+^\lambda = \frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell-1}\delta_0$$

Pozn. jiný (hmatatelnější) způsob rozšíření x_+^λ:

$$\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle = \int_0^\infty x_+^\lambda\varphi(x)\,dx = \int_0^1 x_+^\lambda\varphi(x)\,dx + \int_1^\infty x_+^\lambda\varphi(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\int_0^1 x_+^\lambda[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx}_{\in\mathcal{H}(\operatorname{Re}\lambda>-2)} + \underbrace{\int_0^1 x_+^\lambda\varphi(0)\,dx}_{\frac{\varphi(0)}{\lambda+1} = \frac{\langle\delta_0,\varphi\rangle}{\lambda+1}} + \underbrace{\int_1^\infty x_+^\lambda\varphi(x)\,dx}_{\in\mathcal{H}(\lambda\in\mathbb{C})}$$

$\ell = 1 \to \qquad \operatorname{res}_{\lambda=-1} x_+^{\lambda} = \delta_0$

Def.: Pro $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{-\mathbb{N}\}$ definujeme distribuce

$$\chi_+^{\lambda} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ jako } \frac{x_+^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}$$

Pozn. $\lambda \mapsto \chi_+^{\lambda}$ je p.s.d., závisí holomorfně na $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{-\mathbb{N}\}$

čitatel O.K.

jmenovatel: $\Gamma(z) \neq 0$ a holomorfní v $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$

Věta 27.6. Jestliže dodefinujeme $\chi_+^{-\ell} := \left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell-1}\delta_0$, $\ell \in \mathbb{N}$ závisí p.s.d. χ_+^{λ} holomorfně na $\lambda \in \mathbb{C}$.
Platí rovnost

$$\frac{d}{dx}\chi_+^{\lambda} = \chi_+^{\lambda-1}, \text{ pro } \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Dk.: $\chi_+^{\lambda} = \frac{x_+^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}$ na $P(-\ell)$; $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pevné

$$\langle x_+^{\lambda}, \varphi\rangle = \frac{1}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+\ell)}\left\langle \left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell} x_+^{\lambda+\ell}, \varphi\right\rangle; \ \lambda \in P(-\ell)$$

$$\Gamma(\lambda+1) = \frac{\Gamma(\lambda+\ell+1)}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+\ell)}; \ \lambda \in P(-\ell)$$

$$\langle \chi_+^{\lambda}, \varphi\rangle = \underbrace{\left\langle \left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell} \chi_+^{\lambda+\ell}, \varphi\right\rangle}_{F(\lambda)}$$

pozoruji: $F(\lambda) \in \mathcal{H}(U(-\ell))$

$\langle \chi_+^{-\ell}, \varphi\rangle := F(-\ell)$ je holomorfní rozšíření LS

$$F(-\ell) = \left\langle \left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell} \chi_+^{0}, \varphi\right\rangle = \left\langle \left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell-1} \delta_0, \varphi\right\rangle$$

$$\chi_+^0 = \frac{x_+^0}{\Gamma(1)} = \text{Heaviside}$$

tj.: dodefinování uvedené ve znění věty je holomorfní

$$\operatorname{Re}\lambda > 1: \quad \frac{d}{dx}\chi_+^{\lambda} = \frac{d}{dx}\frac{x_+^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{\lambda x_+^{\lambda-1}}{\lambda\,\Gamma(\lambda)} = \chi_+^{\lambda-1}$$

LS = PS pro $\operatorname{Re}\lambda > -1$ ... věta o jednoznačnosti $\Rightarrow$ LS = PS pro $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

Pozn.: Podobně definujeme $x_-^\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$x_-^\lambda = (-x)_+^\lambda \; ; \; tj. \; \langle x_-^\lambda, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (-x)^\lambda \varphi(x)\, dx \quad Re\, \lambda > -1$$

$$\chi_-^\lambda = \frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \quad \dots \quad \frac{d}{dx} \chi_-^\lambda = \chi_-^{\lambda-1} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

dále definujeme $|x|^\lambda := x_+^\lambda + x_-^\lambda$

$|x|^\lambda \operatorname{sgn}(x) = \text{„} x^\lambda \text{"} = x_+^\lambda - x_-^\lambda$

$$\lim_{\lambda \to -1} x_+^\lambda - x_-^\lambda = v.p. \frac{1}{x}$$

nyní je cíl: Fourierova transformace distribucí

Opakování: $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \dots \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i (\xi, x)} dx \quad \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F} : f(x) \mapsto \hat{f}(\xi)$$

$$L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n) \quad \dots \quad \|\hat{f}\|_C = \sup |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1} = \int |f|$$

spojité, lineární

derivace $\left[D^\alpha f(x) \right]^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$

$$D^\beta \hat{f}(\xi) = \left[(-2\pi i x)^\beta f(x) \right](\xi)$$

pro f dost velké $\quad // \; \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n} \; ; \; \xi \in \mathbb{R}^n$

Lemma 24.4. (o přehození) $f(x), g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x)\, dx \quad \dots \quad \langle T_{\hat{f}}, g \rangle = \langle T_f, \hat{g} \rangle$$

idea: $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad \dots \quad \hat{T}$ definuj jako $\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

PROBLÉM: Věta 24.6: $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \,\&\, \hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi \equiv 0$

řešení: použijeme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (Schwartzův prostor rychle ubývajících funkcí) místo $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Pozn.: $x_-^\lambda := \begin{cases} 0 & ; x \geq 0 \\ (-x)^\lambda & ; x < 0 \end{cases} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$; $\operatorname{Re}\lambda > -1$

$$\langle x_-^\lambda, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{0} (-x)^\lambda \varphi(x)\,dx \underset{subst.}{=} \int_0^\infty x^\lambda \varphi(-x)\,dx = \langle x_+^\lambda, \varphi(-x)\rangle$$

$$\boxed{(x_+)^\lambda(-x) = (x_-)^\lambda(x)}$$

Def.: Schwartzův prostor „rychle klesajících" funkcí

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : x^\alpha D^\beta \varphi(x) \overset{\forall \alpha\beta}{\text{omezená}}\}$$

Řekneme, že $f_n \to 0$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, jestliže

$x^\alpha D^\beta f_n \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}^n$ pro $\forall \alpha, \beta$ multiindex

Pozn.: Věta 24,7.: 1. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subsetneqq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ldots e^{-x^2}$

2. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$; $\forall p \in [1,\infty]$

3. $f(x) \in \mathcal{S} \Rightarrow x^\alpha f(x), D^\beta f(x) \in \mathcal{S}\ \forall \alpha, \beta$

V.24.8., V.24.11. : $\mathcal{F}$ je 1-1 zobrazení $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}$

Věta 27.7. 1. $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi_n \to 0$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

2. $\varphi \mapsto x^\alpha \varphi$, $\varphi \mapsto D^\beta \varphi$ jsou spojitá, lineární zobrazení z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

3. $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je spojité, lineární zobrazení

dk. 1. nechť $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

(i) $\exists K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ; $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K\ \forall n$

(ii) $D^\beta \varphi_n \rightrightarrows 0$ v K ; $\forall \beta$ pevné

$$|\underbrace{x^\alpha}_{\text{omezená na } K} D^\beta \varphi_n(x)| \leq \left.\begin{cases} 0 & ; x \notin K \\ c_\alpha |D^\beta \varphi_n(x)| \rightrightarrows 0 \end{cases}\right\} \rightrightarrows 0 \text{ v } \mathbb{R}^n$$

2. d.cv., viz podobné tvrzení pro $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

3. ?? spojitost: důkaz V.24.8:

$$\xi^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi) = (2\pi i)^{-|\alpha|} \left[D^\alpha\{(-2\pi i x)^\beta f(x)\}\right]^\wedge(\xi)$$

$$\sup_\xi |\xi^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi)| \leq C_{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}^n} |\underbrace{D^\alpha\{x^\beta f_n(x)\}}_{g_n(x)}|\,dx$$

$f_n \to 0$ v $\mathcal{S}$ $\Rightarrow$ $g_n \to 0$ v $\mathcal{S}$ (bod 2)

spec.: $(1+|x|^2)^N g_n(x) \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}^n$

volte $N \in \mathbb{N}$ ... $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^N} = C < \infty$

$n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \sup (1+|x|^2)^N g_n(x) < \dfrac{\varepsilon}{C \cdot C_{\alpha\beta}}$

$$\sup_\xi |\xi^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi)| \leq$$

$$\leq C_{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}^n} |g_n(x)|\, dx = C_{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(1+|x|^2)^N g_n(x)}_{\leq \frac{\varepsilon}{C C_{\alpha\beta}}} \frac{1}{(1+|x|^2)^N}\, dx \leq \varepsilon$$

tj. $\xi^\alpha D^\beta \hat{f}_n(\xi) \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}^n$

Def. Temperovanou distribucí v $\mathbb{R}^n$ rozumíme spojité lineární zobrazení $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$

$$\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$$

Prostor temperovaných distribucí značíme $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Konvergence: $T_n \to T$ v $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Pozn 1 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$: temperovaná distribuce je distribuce (umírněná)

$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ $\qquad T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ lineární

$$\begin{array}{c} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \cup \\ \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

spojitost: $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ $\Rightarrow$ $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle T, \varphi_n \rangle \to 0$$

2 Lemma 27.2. verze $\mathcal{S}$: $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lineární, spojité

definuji $\Phi' : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

takto $\langle \Phi'(T), \varphi \rangle = \langle T, \Phi(\varphi) \rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Potom: Φ' je spojité lineární zobrazení

spec.: $\Phi'(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pro $\forall\, T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Dk. úplně stejně jako v původní verzi

③ derivace v $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; α .. multiindex :

$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := \langle T, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$D^\alpha : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ spojité, lineární

Příkl.: ① $f(x) = e^{2x^2} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Rightarrow T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{2x^2} \varphi(x)\, dx$$

avšak $T_f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$: volme $\varphi(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{2x^2} \cdot e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{x^2} dx = \infty$$

② lze dokázat , $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pro nějaké $p \in [1, \infty] \Rightarrow$
$\Rightarrow T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$f(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$; $\exists N \dots (1 + |x|^2)^N f(x)$ omezená $\Rightarrow$
$\Rightarrow T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

„pomalu rostoucí (moderované) funkce"

③ lze dokázat : $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, T má kompaktní nosič $\Rightarrow$
$\Rightarrow T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

spec. $\delta_a \in \mathcal{S}'$ (zřejmé i z definice)

Def.: Nechť $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Pak definujeme její Four. tr.
$\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ jako $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Věta 27.8. $T \to \hat{T}$ je spojité, lineární, 1-1 na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Příkl.: $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \dots T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; $\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$

$$\langle \hat{T}_f, \varphi \rangle = \langle T_f, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \hat{\varphi}(x) dx \overset{L.24.4.}{=\!=} \int \hat{f}(x) \varphi(x) dx =$$
$$= \langle T_{\hat{f}}, \varphi \rangle$$

② $$\hat{\delta}_a = e^{-2\pi i (a,x)} = \cos(2\pi (a,x)) - i \sin(2\pi (a,x))$$

$$\langle \hat{\delta}_a , \varphi \rangle = \langle \delta_a , \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(a) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i (a,x)} \, dx =$$

$$= \langle T_{e^{-2\pi i (a,x)}} , \varphi \rangle$$

spec $\hat{\delta}_0 = 1$

③ $$\left(v.p. \frac{1}{x} \right)^{\wedge} = - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn}(y)$$

$$\langle v.p. \hat{\tfrac{1}{x}} , \varphi \rangle = \langle v.p. \tfrac{1}{x} , \hat{\varphi} \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}_\varepsilon} \frac{\hat{\varphi}(x)}{x} \, dx =$$

$$\mathbb{R}_\varepsilon = \left(-\tfrac{1}{\varepsilon}, -\varepsilon\right) \cup \left(\varepsilon, \tfrac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{x \in \mathbb{R}_\varepsilon} \int_{y \in \mathbb{R}} \frac{1}{x} \varphi(y) e^{-2\pi i x y} \, dy \, dx$$

Fubini:

$$\int_{y \in \mathbb{R}} \varphi(y) \int_{x \in \mathbb{R}_\varepsilon} \frac{1}{x} \Big(\underbrace{\cancel{\cos(2\pi y x)}}_{\text{lichá část}} - i \sin(2\pi x y) \Big) \, dx \, dy$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}_\varepsilon} \frac{\sin a x}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\to - \frac{i\pi}{2} \int \varphi(y) \operatorname{sgn}(y) \, dy$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{ \varphi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \, ; \, x^\alpha D^\beta \varphi(x)$ omezené $\forall \alpha, \beta \}$
„Schwartzův prostor"

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: spojité, lineární $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$
„temperovaná distribuce"

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \supsetneqq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \; \ldots \; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subsetneqq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Pozn. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

- $\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := \langle T, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \rangle$
- $\langle T(Ax+b), \varphi(x) \rangle := \langle T(y), \frac{1}{|\det A|} \varphi(A^{-1}(y-b)) \rangle$

$a(x)$ $C^\infty(\mathbb{R}^n)$; „pomalu rostoucí"

- $\langle a(x) T(x), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), a(x)\varphi(x) \rangle$

Def Nechť $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Pak definuji její Four. tr. $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ jako

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad ; \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Věta 27.8 Zobrazení $T \to \hat{T}$ je spojité, lineární, vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Dk. spojité, lineární $\Leftarrow$ Lemma 27.2 – 9, 8 $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ spoj, lin („o duálním zobrazení") $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

? prosté: $\hat{T} = 0 \Rightarrow T = 0$

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lib : $\exists \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{\psi} = \varphi$
(Four. tr. je 1-1 na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)

$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\psi} \rangle = \langle \hat{T}, \psi \rangle = 0$

φ libovolné : $T = 0$

? na : $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dáno $\Rightarrow \exists T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; $\hat{T} = S$

definuji $\langle T, \varphi \rangle := \langle S, \check{\varphi} \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: $\varphi \to \check{\varphi}$ je spojité, lineární v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ & L.27.2.–S.

$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle = \langle S, (\hat{\varphi})^\vee \rangle = \langle S, \varphi \rangle$; $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

tj: $\hat{T} = S$

Def : Pro $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definuji inverzní Four. tr. jako

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle \quad ; \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Pozn. $T \to \check{T}$ je spojité, lineární zobrazení $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vzájemně jednoznačně na sebe

$$(\hat{T})^\vee = (\check{T})^\wedge = T \quad \forall\, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

Věta 27.9 [Vlastnosti F. tr. v $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$]
Nechť $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
Potom
1. $\check{T}(-x) = \hat{T}(x)$
2. $\overline{\check{T}}(x) = \hat{\overline{T}}(x)$; $\overline{\hat{T}}(x) = \check{\overline{T}}(x)$
3. $\hat{T}(y-a) = \left[e^{2\pi i (a,x)}\, T(x)\right]^\wedge(y)$
4. $\left[T(x-a)\right]^\wedge(y) = e^{-2\pi i (a,y)}\,\hat{T}(y)$
5. $\left[T(\varepsilon x)\right]^\wedge(y) = \frac{1}{|\varepsilon|^n}\,\hat{T}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$
6. je-li T sudá (resp. lichá či radiální) pak $\hat{T}$ má stejnou vlastnost
7. $\left[D^\alpha T\right]^\wedge(y) = (2\pi i y)^\alpha\,\hat{T}(y)$
8. $D^\beta \hat{T}(y) = \left[(-2\pi i y)^\beta\, T(x)\right]^\wedge(y)$

Pozn. pro (dosti hladké) funkce dokázáno ve větách 24.1., 24.2., 24.4.

Pozn. jak definovat $\overline{T}$?

$$f(x) \in L^1_{loc} \qquad \langle T_{\overline{f}}, \varphi\rangle = \int \overline{f}(x)\,\varphi(x)\,dx = \overline{\int f(x)\,\overline{\varphi}(x)\,dx} = \overline{\int \overline{\overline{f}(x)\,\varphi(x)}\,dx} =$$

$$= \overline{\int f(x)\,\overline{\varphi}(x)\,dx} = \overline{\langle T_f, \overline{\varphi}\rangle}$$

$$\langle \overline{T}, \varphi\rangle := \overline{\langle T, \overline{\varphi}\rangle} \quad ; \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \ \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

dk. 1. $\langle \check{T}(-x), \varphi(x)\rangle = \langle \check{T}(x), \varphi(-x)\rangle = \langle T(x), \underbrace{(\varphi(-x))^\vee}_{\hat{\varphi}(x)}\rangle =$

$= \langle T(x), \hat{\varphi}(x)\rangle = \langle \hat{T}(x), \varphi(x)\rangle$

2. $\langle \bar{\hat{T}}(x), \varphi(x)\rangle = \overline{\langle \hat{T}, \bar{\varphi}\rangle} = \overline{\langle T, \underbrace{\hat{\bar{\varphi}}}_{\bar{\check{\varphi}}}\rangle} = \overline{\langle T, \bar{\check{\varphi}}\rangle} =$

$= \langle \bar{T}, \check{\varphi}\rangle = \langle \check{\bar{T}}, \varphi\rangle$

dostatečná kladka

3. $\langle \hat{T}(y-a), \varphi(y)\rangle = \langle \hat{T}(x), \varphi(x+a)\rangle_x = \langle T(y), \overbrace{[\varphi(x+a)]^\wedge(y)}^{e^{2\pi i(a,y)}\hat{\varphi}(y)}\rangle_y =$

$= \langle e^{2\pi i(a,y)} T(y), \hat{\varphi}(y)\rangle = \langle [e^{2\pi i(a,y)} T(y)]^\wedge(x), \varphi(x)\rangle$

4., 5, 6, 7 d. cv.

8. $\langle D^\beta \hat{T}(y), \varphi(y)\rangle = (-1)^{|\beta|}\langle \hat{T}(y), D^\beta\varphi(y)\rangle = (-1)^{|\beta|}\langle T(y), [D^\beta\varphi(x)]^\wedge(y)\rangle$

$\overset{7}{\Rightarrow} (2\pi i y)^\beta \hat{\varphi}(y)$

$= \langle (-2\pi i y)^\beta T(y), \hat{\varphi}(y)\rangle = \langle [(-2\pi i y)^\beta T(y)]^\wedge(x), \varphi(x)\rangle$

Příklady:

① $\hat{\delta}_a = e^{-2\pi i(a,x)}$; $a \in \mathbb{R}^n$

$\check{\delta}_a(x) = \hat{\delta}_a(-x) = e^{2\pi i(a,x)} \quad \Big| F$

$\delta_a(y) = [e^{2\pi i(a,x)}]^\wedge(y)$ speciálně $\hat{1} = \delta_0$

d. cv. $\begin{matrix}\cos(a,x)\\ \sin(a,x)\end{matrix} \xrightarrow{F} ?$

② $(v.p. \frac{1}{x})^\wedge(y) = -i\pi \operatorname{sgn}(y) \Big|_{F^{-1}}$

$v.p. \frac{1}{x} = (-i\pi \operatorname{sgn}(y))^\vee(x) = i\pi(\operatorname{sgn} y)^\wedge(x)$

Heavisideova funkce $h \xrightarrow{F} ?$

Pozn. tenzorový součin $f \otimes g \quad (= fg)$

$f(x): \Omega_1 \to R \qquad (f\otimes g)(x,y): \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$

$g(y): \Omega_2 \to R \qquad (x,y) \mapsto f(x)\,g(y)$

nechť $f, g \in L^1_{loc}$ na Ω_1, Ω_2 $(\Rightarrow f \otimes g \in L^1_{loc}(\Omega_1 \times \Omega_2))$

$\varphi = \varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$

$$\langle T_{f\otimes g}, \varphi \rangle = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x) g(y) \varphi(x,y)\, dx\, dy \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \int_{\Omega_1} f(x) \left(\int_{\Omega_2} g(y) \varphi(x,y)\, dy \right) dx = \langle T_f(x), \langle T_g(y), \varphi(x,y) \rangle_y \rangle_x$$

nebo

$$\int_{\Omega_2} g(y) \left(\int_{\Omega_1} f(x) \varphi(x,y)\, dx \right) dy = \langle T_g(y), \langle T_f(x), \varphi(x,y) \rangle_x \rangle_y$$

Def: Nechť $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, nechť $S \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, kde $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené

Pak definujeme

$T \otimes S \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ předpisem

$$\langle T \otimes S, \varphi \rangle = \langle T(x), \langle S(y), \varphi(x,y) \rangle_y \rangle_x \quad \text{pro } \forall \varphi = \varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$$

Pozn. ověření korektnosti definice nebudeme provádět

Věta 27.10.* [Vlastnosti tenzorového součinu distribucí]

1. $\langle T(x), \langle S(y), \varphi(x,y) \rangle_y \rangle_x = \langle S(y), \langle T(x), \varphi(x,y) \rangle_x \rangle_y$

   tzv. distributivní Fubiniho věta

2. $\operatorname{supp}(T \otimes S) \subset \operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} S$

3. $T_n \to T$ v $\mathcal{D}'(\Omega_1) \Rightarrow T_n \otimes S \to T \otimes S$ v $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$

4. $D^\alpha_x (T \otimes S) = (D^\alpha_x T) \otimes S$; $D^\beta_y (T \otimes S) = T \otimes D^\beta_y S$

Příklad: $\delta_a \otimes \delta_b$; $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$

$\varphi = \varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$

$$\langle \delta_a \otimes \delta_b , \varphi \rangle = \langle \delta_a(x) , \langle \delta_b(y) , \varphi(x,y) \rangle_y \rangle_x$$

$$= \langle \delta_a(x) , \varphi(x,b) \rangle_x$$

$$= \varphi(a,b) = \langle \delta_{(a,b)} , \varphi \rangle$$

$$\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}$$

opakování: $f(x), g(x) : \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

konvoluce $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dy$

platí $f * g = g * f$ komutativita

$f * (g * h) = (f * g) * h$ asociativita

$$D^\alpha \{ f * g \} = \{ D^\alpha f \} * g = f * \{ D^\alpha g \}$$

dk. (formální)

$$D^\alpha_x \{ f * g \}(x) = D^\alpha_x \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) (D^\alpha_x g)(x-y)\, dy = \{ f * D^\alpha_x g \}(x)$$

důsledek: „$f * g$ je tak hladká, jako f a g dohromady"

$$D^{\alpha+\beta} \{ f * g \} = D^\alpha f * D^\beta g$$

Fourierova transformace a konvoluce

$F\{ f * g \} = Ff \cdot Fg$ | hladkost $f \longleftrightarrow$ pokles Ff pro $|\xi| \to \infty$

Pojem: „fundamentální řešení"

(1) $\mathcal{D}[u] = f$ ... pravá strana

↳ diferenciální operátor $\mathcal{D} = \partial_t - \Delta x$

Fundamentální řešení je U takové, že $\mathcal{D}[U] = \delta_0$

tvrdím u je fund. řeš. $\Rightarrow$ $u := U * f$ řeší (1)

dk.
$$\mathcal{D}[u] = \mathcal{D}[U * f] = \mathcal{D}[U] * f = \delta_0 * f = f$$

δ_0 je neutrální prvek pro $*$: $\delta_0 * f = f * \delta_0 = f$

motivační výpočet č. 1 : $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dy = \langle T_f(y), g(x-y)\rangle_y$$

Definice [konvoluce verze 1]

Nechť $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Pak definujeme konvoluci $T * \varphi$ předpisem

$$(T * \varphi)(x) := \langle T(y), \varphi(x-y)\rangle_y \quad \text{pro } \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Věta 27.11. Nechť $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, potom $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

a platí $D^\alpha\{T * \varphi\} = D^\alpha T * \varphi = T * D^\alpha \varphi$

dk. (náznak)

spojitost $x \mapsto (T * \varphi)(x)$

$$\overset{\parallel}{\langle T(y), \varphi(x-y)\rangle_y}$$

je třeba ověřit, že $\lim x_m \to x_0 \Rightarrow \varphi(x_m - y) \to \varphi(x_0 - y)$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

jakožto funkce proměnné y

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(T * \varphi)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\{(T * \varphi)(x + he_1) - (T * \varphi)(x)\} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\langle T(y), \underbrace{\frac{\varphi(x + he_1 - y) - \varphi(x-y)}{h}}_{\to \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x-y)} \right\rangle$$

$\to \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x-y)$: bodově zjevně ale též v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$= \left\langle T(y), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x-y)\right\rangle_y = T * \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(T * \varphi)(x) = \left(T * \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)(x) = \left\langle T(y), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x-y)\right\rangle =$$

$$= \left\langle T(y), -\frac{\partial}{\partial y_1}\{\varphi(x-y)\}\right\rangle_y = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_1} T(y), \varphi(x-y)\right\rangle_y = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} * \varphi\right)(x)$$

motivační výpočet č. 2 : $f(x), g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\langle T_{f*g}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dy\right)\varphi(x)\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\,\varphi(x)\, dx\right) dy = \Big| \; x \leftarrow x + y$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x)\, \varphi(x+y)\, dx\, dy = \langle T_f \otimes T_g\, , \varphi(x+y)\rangle$$

Idea: $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $\quad T \circledast S$ definuji jako

$$\langle T * S, \varphi\rangle := \langle (T \otimes S)(x,y), \varphi(x,y)\rangle_{x,y} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Problém: $\varphi(x,y)$ nemá kompaktní nosič

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: $\operatorname{supp}\varphi \subset \{|x| < R\} \Rightarrow \operatorname{supp}\varphi(x+y) \subset \{(x,y)\,|\,|x+y| < R\}$ neomezená množina

Značení $\Omega_R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, |x+y| < R\}$

Def [Konvoluce 2. verze] Nechť $T, S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, nechť navíc$^{(\square)}$ je $\operatorname{supp} T \otimes S \cap \Omega_R$ omezená množina pro $\forall R > 0$

Potom definujeme konvoluci $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ jako

$$\langle T * S, \varphi\rangle := \langle T \otimes S(x,y), \eta(x,y)\varphi(x+y)\rangle_{x,y} \; ; \; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

kde $\eta = \eta(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ takové, že $\eta = 1$ na okolí $\operatorname{supp} T \otimes S \cap \operatorname{supp}\varphi(x+y)$

Pozn: podmínka navíc$^{(\square)}$ je splněna, pokud T nebo S mají omezený nosič obecněji mají-li T a S omezený nosič z téže (jedné) strany

Pozn. $T * S$ je korektně definovaná distribuce, ? nezávisí na konkrétní volbě η: $\eta, \tilde{\eta} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $\eta = \tilde{\eta} = 1$ na $\operatorname{supp} T \otimes S \cap \operatorname{supp}\varphi(x+y)$: $\quad \langle T \otimes S, \eta\varphi(x+y)\rangle \overset{?}{=} \langle T \otimes S, \tilde{\eta}\varphi(x+y)\rangle$

$$\langle T \otimes S, \underbrace{(\eta - \tilde{\eta})\varphi(x+y)}_{\psi}\rangle \quad ; \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

$\psi = 0$ na $\operatorname{supp} T \otimes S$ ($\Rightarrow$ jsem hotov)

$(x,y) \in \operatorname{supp} T \otimes S$:
- $(x,y) \in \operatorname{supp}\varphi(x+y) \Rightarrow \eta - \tilde{\eta} = 0$
- $(x,y) \notin \operatorname{supp}\varphi(x+y) \Rightarrow \varphi(x+y) = 0$

Příklad: $T * \delta_0 = T$; $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$: dodatečná podmínka$^{(\square)}$ je splněna

$$\langle T * \delta_0, \varphi\rangle = \langle T \otimes \delta_0, \eta\varphi(x+y)\rangle_{x,y} \; ; \; \eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

$\eta = 1$ na $\operatorname{supp} T \otimes \delta \cap \operatorname{supp}\varphi(x+y)$

$$= \langle T(x), \langle \delta_0(y), \eta(x,y)\varphi(x+y)\rangle_y\rangle_x = \langle T(x), \eta(x,0)\varphi(x)\rangle_x$$

volme $y = 0$: $\eta = 1$ na $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp}\varphi(x)$

Věta 27.12.*

1. $T * S = S * T$ (komutativita)

2. mají-li alespoň dvě z distribucí T, S, R omezený nosič, pak $(T * S) * R = T * (S * R)$ (asociativita)

3. $D^\alpha (T * S) = D^\alpha T * S = T * D^\alpha S$

4. $\operatorname{supp} T * S \subset \underbrace{\operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S}_{=: \{a+b,\ a \in \operatorname{supp} T,\ b \in \operatorname{supp} S\}}$

Příkl. (1) $T * \delta_0 = T = \delta_0 * T$

(2) $T * \left(\frac{d}{dx}\right)^k \delta_0 = \left(\frac{d}{dx}\right)^k \{T * \delta_0\} = \left(\frac{d}{dx}\right)^k T$

(3) $(T * \delta_a)(x) = T(x-a)$

(4) protipříklad k V27.12./2

uvažujeme distribuce $1, \frac{d}{dx}\delta_0, h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

jen jedna má omezený nosič

$$1 * \left(\frac{d}{dx}\delta_0 * h\right) = 1 * \frac{d}{dx}\big(\underbrace{\delta_0 * h}_{h}\big) = 1 * \delta_0 = 1$$

$$\left(1 * \frac{d}{dx}\delta_0\right) * h = \left(\frac{d}{dx} 1 * \delta_0\right) * h = 0$$

Příkl. Zavedení necelých derivací

$\chi_+^\lambda := \frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$; ... lze rozšířit pro $\lambda \in \mathbb{C}$ (holomorfní)

platí: $\frac{d}{dx}\chi_+^\lambda = \chi_+^{\lambda-1}$ $\quad \chi_+^\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$\chi_+^{-k} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1}\delta_0$ $\quad \operatorname{supp} \chi_+^\lambda = [0, \infty)$

Pro $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$; $\operatorname{supp} g \subset [0, \infty)$ definuji $d^\lambda g =: g * \chi_+^{-1-\lambda}$

platí: konvoluce je definována (nosiče jsou zleva omezené)

$$d^0 g = g * \chi_+^{-1} = g * \delta_0 = g$$

$$d^1 g = g * \chi_+^{-2} = g * \left(\frac{d}{dx}\delta_0\right) = \frac{d}{dx} g$$

obecněji

$$d^n g = \left(\frac{d}{dx}\right)^n g \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$d^{-1} g = g * \chi_+^0 = g * h \leftarrow \text{primitivní distribuce}$$

$$\frac{d}{dx}\left(d^{-1} g\right) = \frac{d}{dx}(g * h) = g * \underbrace{\frac{dh}{dx}}_{\delta_0} = g$$

Obecně platí $d^\lambda (d^\mu g) = d^{\lambda+\mu} g \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

dk. $LS = (d^\mu g) * \chi_+^{-1-\lambda} = \left(g * \chi_+^{-1-\mu}\right) * \chi_+^{-1-\lambda}$

$PS = g * \chi_+^{-1-\mu-\lambda}$

BÚNO: $\mu = -\beta \quad ; \quad Re\, \alpha, \beta > 1$

(1. krok) $\lambda = -\alpha$

stačí ukázat $\chi_+^{-1+\alpha+\beta} = \chi_+^{\alpha-1} * \chi_+^{\beta-1}$

$$\chi_+^{-1+\alpha} * \chi_+^{-1+\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \underbrace{x_+^{\alpha-1} * x_+^{\beta-1}}_{K}$$

$$K = \int_{\mathbb{R}} (y)_+^{\alpha-1} (x-y)_+^{\beta-1} \, dy = \int_0^x \dots \, dy = \left| \begin{array}{l} y = xt \quad , t \in (0,1) \\ dy = x\,dt \end{array} \right.$$

$$= x^{\alpha+\beta-1} \underbrace{\int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} \, dt}_{B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}}$$

Poznámka: $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ s kompaktním nosičem:

$\Rightarrow T * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (formální definice jako výše)

a platí $\mathcal{F}(T * S) = \mathcal{F}T \cdot \mathcal{F}S$

Pozn. S má kompaktní nosič $\Rightarrow S$ je temperovaná

$\mathcal{F}S \in C^\infty$; „pomalu rostoucí"