JAK NA VÝPOČTY, MpFII

SEPSAL: Iosephus Kučeravý
OBSAH: Ondřej Kreml, Lukáš Krump, Milan Pokorný, Dominik Beck
ILUSTRACE: Iosephus Kučeravý, Michal Stratený

Obsah

1 Fourierovy řady

1.1 Trigonometrické řady

„Funkci f rozložíme do $\sum \ldots \cos(kx) + \sum \ldots \sin(kx)$"

→ Uvažujeme **ortogonální systém** na intervalu $(-\pi, \pi)$: $\{1,\ \cos(x),\ \sin(x),\ \cos(2x),\ \sin(2x),\ \ldots\}$

OG systém: množina ∀sinů a ∀cosinů, které na zadaném intervalu dokončí alespoň 1 násobek celé periody

Vzoreček: Fourierova řada pro 2π periodickou funkci

Fourierovou řadou (funkce f) rozumíme*: $\boxed{f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)}$

kde:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad b_0 = 0$$

***symbol** $\sim$ v definici značí, že funkci f odpovídá Fourierova řada (FŘ) s daným předpisem

Tento systém je úplný v $L^2(-\pi, \pi)$, tudíž $f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ v $L^2(-\pi, \pi)$ a z Carlesonovy věty platí rovnost skoro všude na intervalu $(-\pi, \pi)$ → f obyčejně pak rozšiřujeme periodicky na $\mathbb{R}$

Vzoreček: Fourierova řada pro obecnou periodu

Perioda délky L

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi kx}{L}\right)$$

$$a_k = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi kx}{L}\right)\mathrm{d}x \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi kx}{L}\right)\mathrm{d}x \qquad k \in \mathbb{N}$$

Platí: f **sudá** ⇒ $\boxed{b_k = 0}$ pro $\forall k$ **(cosinový rozvoj)** $\int_{-a}^{a} f(x)\sin(kx) = \int_{-a}^{a} \text{sudá} \,.\, \text{lichá} = 0$

f **lichá** ⇒ $\boxed{a_k = 0}$ pro $\forall k$ **(sinový rozvoj)** $\int_{-a}^{a} f(x)\cos(kx) = \int_{-a}^{a} \text{lichá} \,.\, \text{sudá} = 0$

Fourierovy koeficienty lze spočítat i pro funkce v $L^1(-\pi, \pi)$. Platí Riemann-Lebesgueovo lemma:

Lemma 1 (Riemann-Lebesgueovo)**.**

Jest-li $f \in L^1(-\pi, \pi)$ a a_k, b_k její Fourierovy koeficienty, ⇒ pak $a_k \to 0, b_k \to 0$, když $k \to \infty$

Platí následující věty:

Věta 1. *O derivaci*

Jest-li $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že $\sum_{k=1}^{\infty} k^n \left(|a_k| + |b_k|\right) < \infty$,

pak **trigonometrická řada** s koeficienty a_k, b_k **konverguje stejnoměrně** na $\mathbb{R}$, **součet** jest 2π-periodická funkce třídy C^n a řadu lze až n-krát **derivovat** člen po členu, s tím, že platí rovnosti mezi derivacemi součtu a součty derivací.

Věta 2. *O integraci*

Nechť f je 2π-periodická funkce, po částech spojitá funkce, s Fourierovými koeficienty a_k, b_k.

Označme $g(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{a_0}{2}x$.

Pak g je 2π-periodická, spojitá a její **Fourierova řada** je dána předpisem:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx),$$

kde $A_k = -\frac{b_k}{k}$, $B_k = \frac{a_k}{k}$ a $A_0 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$

Věta 3. *Věta o konvergenci Fourierovy řady*

Nechť existuje derivace funkce f až na konečně mnoho bodů a f i f' jsou po částech spojité.

Pak je **součet** Fourierovy řady dán výrazem: $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ což ve spojitém bodě dává hodnotu funkce $f(x) \in \mathbb{R}$ (pouze vlastní limity $\neq \pm\infty$)

Jest-li navíc f spojitá, je konvergence Fourierovy řady dokonce **stejnoměrná**.

Věta 4. *Dirichlet-Jordanovo kritérium* *(DJ)*

- V bodech, kde je f **spojitá** $\rightarrow$ FŘ konverguje a platí rovnost $f(x) = \sum$
- V bodech nespojitosti funkce f je **součet** $\sum$ FŘ $= \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) + \lim_{x \to x_0^-} f(x)\right)$

Věta 5. *Věta o vztahu hladkosti funkce a chování Fourierových koeficientů* *(19.3.10)*

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Nechť $f \in C^n(\mathbb{R}), f$ je l-periodická, $f^{(n+1)}$ existuje v intervalu $(a, a+l)$ až *na* konečně mnoho bodů a je po částech spojitá na $[a, a+l]$. Pak

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n \left(|a_k| + |b_k|\right) < \infty.$$

Dále $F_{f,n} \rightrightarrows f$ na $[a, a+l]$, řadu F_f lze až n-krát derivovat člen po členu, výsledné řady **konvergují stejnoměrně** na $[a, a+l]$ k odpovídajicím derivacím funkce f a jsou jejich Fourierovými řadami (FŘ).

Příklad

Zadání: Rozviňte funkci $f(x) = x^2$ do Fourierovy řady pro $x \in (-\pi, \pi)$

✓ ***Řešení:***

f jest **sudá**, tedy $\Rightarrow \underline{\underline{\forall\, b_k = 0}}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \underline{\underline{\frac{2\pi^2}{3}}}$$

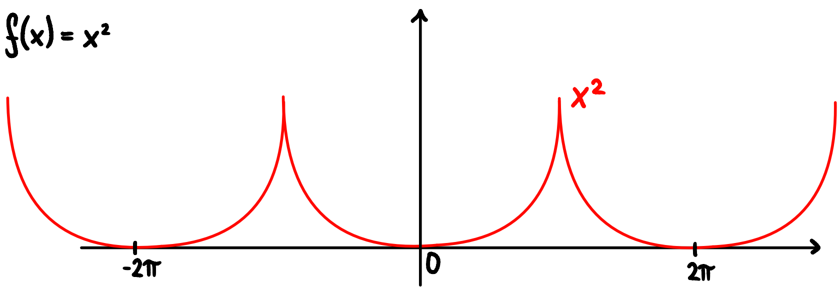
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \overset{per\ partes}{\begin{bmatrix} f = x^2 & g' = \cos(kx) \\ f' = 2x & g = \frac{1}{k}\sin(kx)\end{bmatrix}} = \frac{1}{\pi}\left(\overbrace{\left[\cancel{\frac{x^2}{k}\sin(kx)}\right]_{-\pi}^{\pi}}^{\sin(\pm\pi k)=0} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{2x}{k}\sin(kx)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \overset{per\ partes}{\begin{bmatrix} f = 2x & g' = \sin(kx) \\ f' = 2 & g = -\frac{1}{k}\cos(kx)\end{bmatrix}} = -\frac{1}{\pi k}\left(\left[-\frac{2x}{k}\cos(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{2}{k}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\left(\Big[x\cos(kx)\Big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{2}{\pi k^2}\left(\pi\cos(k\pi) + \pi\,\overbrace{\cos(-k\pi)}^{\cos(k\pi)} - \left[\overbrace{\frac{\sin(kx)}{k}}^{\sin(\pm\pi k)=0}\right]_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{4}{k^2}\cos(k\pi) = \underline{\underline{\frac{4}{k^2}(-1)^k}} \qquad \text{platí totiž: } \cos(k\pi) = (-1)^k$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos(kx)}$$



Na intervalu $(-\pi, \pi) + 2K\pi,\ K \in \mathbb{Z}$ je součet $\sum$ FŘ $= (x - 2K\pi)^2$.

Tedy platí (z Dirichlet-Jordanova kritéria):

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos(kx) = x^2, \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

Takto je někdy možné sčítat některé řady. Dosadíme-li za $x = \pi$

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k(-1)^k = \pi^2 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2} = \frac{2}{3}\pi^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Vzoreček: Parsevalova rovnost pro 2π-periodické funkce **(PR)**

$$\boxed{\left|\left|f\right|\right|^2_{L^2(0,2\pi)} = \frac{\pi}{2}a_0^2 + \pi\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2\right)}$$ Parsevalova rovnost

Alternativně:

Parsevalova rovnost z lineární algebry → $B = \left(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\right)$ báse V

ortonormální báse $\left\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \right\rangle = \delta_{ij}$

$$\forall \vec{v} \in V: \qquad \vec{v} = \sum_{i=1}^{N} \left\langle \vec{v}, \vec{b}_i \right\rangle \vec{b}_i$$

$$\|\vec{v}\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\left\langle \vec{v}, \vec{b}_i \right\rangle\right)^2$$

ON systém v prostoru $L^2(I)$, kde I je otevřený interval délky 2π, je:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}};\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x;\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x;\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x;\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x;\ \dots\right)$$

Potom: $k = 0 \qquad \tilde{a}_0 = \int_I f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0$

$$k \geq 1 \quad \begin{cases} \tilde{a}_k = \int_I f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,a_K \\ \tilde{a}_k = \int_I f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,b_K \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int_I (f(x))^2 = \frac{\pi}{2}a_0^2 + \pi\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2\right)}$$ Parsevalova rovnost

Příklad

Zadání: Rozviňte funkci $f(x) = 2x$ do Fourierovy řady pro $x \in (-\pi, \pi)$

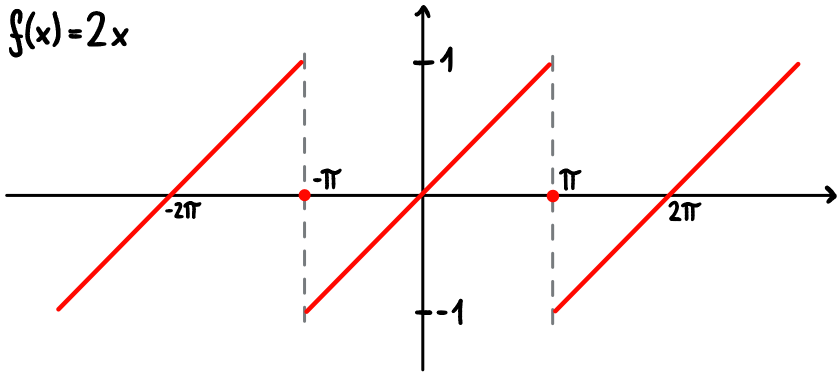
✓ ***Řešení:***

f jest **lichá**, tedy $\Rightarrow \underline{\underline{\forall\, a_k = 0}}$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \overset{\textit{per partes}}{\begin{bmatrix} f = 2x & g' = \sin(kx) \\ f' = 2 & g = -\frac{1}{k}\cos(kx) \end{bmatrix}} = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{2x}{k}\cos(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{2}{k}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi k}\left(\left[x\cos(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \overbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x}}^{=0}\right) = -\frac{2}{\pi k}\left(\pi\cos(k\pi) + \pi\overbrace{\cos(-k\pi)}^{\cos(k\pi)}\right) = -\frac{4\pi}{\pi k}(-1)^k = \underline{\underline{\frac{4}{k}(-1)^{k+1}}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f \sim \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{4}{k}(-1)^k\sin(kx)}$$



Na intervalu $(-\pi, \pi) + 2K\pi,\ K \in \mathbb{Z}$ je součet $\sum$ FŘ $= 2(x - 2K\pi)$.

Pro $x = (2K+1)\pi$ je $\sum$ FŘ $= 0$

Dle věty (1) o derivaci trigonometrické řady

$$(x^2)' = 2x \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}(-1)^k \cos(kx)\right]'$$

platí: $\frac{4}{k^2}(-1)^k \cos(kx) \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-\pi, \pi) + 2K\pi \quad \Rightarrow \quad$ můžeme řadu derivovat člen po členu

$$\left[\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}(-1)^k \cos(kx)\right]' = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{4}{k}(-1)^k \sin(kx) \qquad \text{mimo } x \in (2K+1)\pi$$

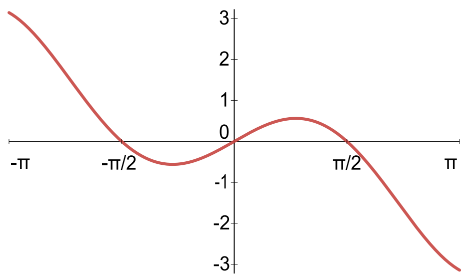
Aplikujeme-li (Parsevalovu rovnost)

$$\int_{-\pi}^{\pi} (2x)^2 \, \mathrm{d}x = 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{8}{3}\pi^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{3}\pi^3 = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{k}(-1)^k\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Příklad

Zadání: Rozviňte do Fourierovy řady na intervalu $(-\pi, \pi)$ funkci $x\cos(x)$

✓ ***Řešení:***



$f(x) = x.\cos(x) =$ LICHÁ.SUDÁ $=$ LICHÁ

f lichá $\quad \Rightarrow \quad \forall a_k = 0,\ k \in \mathbb{N}_0$

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

Poznámka: Následující integrál by šlo řešit i rozpisem integrandu pomocí součinového vzorce pro sinus a cosinus (Odvození tohoto vzorce je v sekci 1.2 Poznámky a početní tríčky):

$$x\Big(\cos(x)\cdot\sin(kx)\Big) = \frac{x}{2}\Big(\sin(x-kx) - \sin(x+kx)\Big) = \frac{x}{2}\sin((1-k)x) - \frac{x}{2}\sin((1+k)x)\ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} x.\cos(x).\sin(kx)\,\mathrm{d}x}_{I} \quad \Rightarrow \left|\begin{matrix} u = x & v' = \cos(x)\sin(kx) \\ u' = 1 & v = I_2 \end{matrix}\right| \quad I = \Big[x\, I_2\Big]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} I_2 \,\mathrm{d}x \;= \ldots$$

$$I_2 = \int \cos(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \;= -\frac{1}{k}\cos(x)\cos(kx) - \frac{1}{k^2}\sin(x)\sin(kx) + \frac{1}{k^2}I_2\ (+C = 0)$$

$$I_2\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = -\frac{\cos(x)\cos(kx).k+\sin(x)\sin(kx)}{k^2}$$

$$I_2 = -\frac{\cos(x)\cos(kx).k+\sin(x)\sin(kx)}{\cancel{k^2}}\cdot\frac{\cancel{k^2}}{k^2-1} = -\frac{\cos(x)\cos(kx).k+\sin(x)\sin(kx)}{k^2-1}$$

$$I = -\Big[x\frac{\cos(x)\cos(kx).k+\sin(x)\sin(kx)}{k^2-1}\Big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(x)\cos(kx).k+\sin(x)\sin(kx)}{k^2-1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{k^2-1}\underbrace{\Big[(\pi)(1)(-1)^k.k-(-\pi)(1)(-1)^k.k\Big]}_{=2k\pi((-1)^k)} + \frac{1}{k^2-1}\underbrace{\Big[(\pi)(0)(0)-(-\pi)(0)(0)\Big]}_{=0} -$$

$$-\frac{1}{k^2-1}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\cos(kx).k+\sin(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{2k\pi(-1)^k}{k^2-1} - \frac{1}{k^2-1}\left(k\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x}_{J_2} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x}_{J_1}\right) = \dots$$

$$J_1 = \int_{-\pi}^{\pi}\sin(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{k}\underbrace{\Big[\sin(x)\cos(kx)\Big]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{k^2}\underbrace{\Big[\cos(x)\sin(kx)\Big]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{k^2}J_1$$

$$\Rightarrow \quad \text{pro } k\neq 1 \to \int = 0 \quad \Rightarrow \quad J_1 = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Poznámka: : Logicky vyšel nenulový pouze první člen ($k=1$), je to rozvoj funkce sinus do OG systému sinů

$$J_2 = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{k}\underbrace{\Big[\cos(x)\sin(kx)\Big]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{k^2}\underbrace{\Big[\sin(x)\cos(kx)\Big]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{k^2}J_2$$

$$\Rightarrow \quad \text{pro } k\neq 1 \to \int = 0 \quad \Rightarrow \quad J_2 = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Poznámka: : Logicky vyšel nenulový pouze první člen ($k=1$), je to rozvoj funkce cosinus do OG systému cosinů

$k>1$

$$b_k = \frac{1}{\pi}I = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2k\pi(-1)^k}{k^2-1}\right) = \frac{2k(-1)^k}{k^2-1}$$

$k=1$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x.\sin(x).\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x.\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\Big[x\cos(2x)\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4}\underbrace{\Big[\sin(2x)\Big]_{-\pi}^{\pi}}_{=0}\right)$$

$$b_1 = -\frac{1}{4\pi}\Big[(\pi)(1)-(-\pi)(1)\Big] = -\frac{1}{2}$$

Celkem: $\boxed{x\cos(x) = -\frac{1}{2}\sin(x) + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{2k(-1)^k}{k^2-1}\sin(kx)}$

Původní funkce f je součinem spojitých funkcí, dle věty o konvergenci FŘ tak funkce f konverguje minimálně lokálně stejnoměrně na intervalu $(-\pi,\pi)$ ke své Fourierově řadě.

Dále platí, že $f(-\pi)=\pi, f(\pi)=-\pi$ tedy v krajních bodech se funkce nedá spojitě napojit a FŘ zde konverguje k aritmetickému průměru krajních hodnot $\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}=0$ a platí tedy závěrem, že f konverguje pouze **lokálně stejnoměrně** na intervalu $(-\pi,\pi)$ ke své Fourierově řadě.

Příklad

Zadání: Nalezněte rozvoj funkce: $f(x) = \left|\sinh\left(\frac{x}{\pi}\right)\right|$

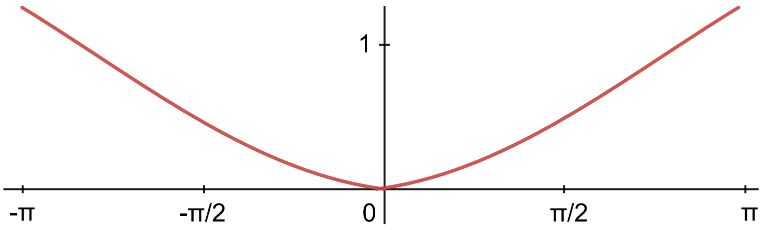
do trigonometrické řady na $(-\pi, \pi)$. Aplikujte na nalezenou řadu Parsevalovu rovnost.

✓ ***Řešení:***

$$f(x) = \left|\sinh\left(\frac{x}{\pi}\right)\right| = \text{SUDÁ}$$

$$f \text{ sudá} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\forall b_k = 0,\ k \in \mathbb{N}}}$$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$



- Začneme s výpočtem koeficientu $\frac{a_0}{2}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sinh\left(\frac{x}{\pi}\right)\right| \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sinh\left(\frac{x}{\pi}\right) \,\mathrm{d}x = \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}\left[\cosh\left(\frac{x}{\pi}\right)\right]_0^{\pi} = 2\cosh(1) - 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{a_0}{2} = \cosh(1) - 1}}$$

- Dále skrz několikanásobné per partes (viz 1.2 Poznámky a početní tríčky) vypočítáme koeficienty a_k

$$a_k = \frac{2}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\left|\sinh\left(\frac{x}{\pi}\right)\right|\cos(kx)\,\mathrm{d}x}_{=I} = \dots$$

$$I = \frac{1}{k}\cancelto{0}{\left[\sinh\left(\frac{x}{\pi}\right)\sin(kx)\right]_0^{\pi}} + \frac{1}{\pi k^2}\left[\cosh\left(\frac{x}{\pi}\right)\cos(kx)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi^2 k^2} I$$

$$I = \frac{1}{\pi k^2}\left[\cosh(1)(-1)^k - 1\right] - \frac{1}{\pi^2 k^2} I$$

$$\left(\frac{\pi^2 k^2 + 1}{\pi^2 k^2}\right) I = \frac{1}{\pi k^2}\left[\cosh(1)(-1)^k - 1\right]$$

$\pm$	**Der**	**Int**
$+$	$\sinh\left(\frac{x}{\pi}\right)$	$\cos(kx)$
$-$	$\frac{1}{\pi}\cosh\left(\frac{x}{\pi}\right)$	$\frac{1}{k}\sin(kx)$
$+$	$\frac{1}{\pi^2}\sinh\left(\frac{x}{\pi}\right)$	$-\frac{1}{k^2}\cos(kx)$

$\int \leftarrow$

$$I = \frac{\pi}{\pi^2 k^2 + 1}\left(\cosh(1)(-1)^k - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a_k = \frac{2}{\pi} I = \frac{2}{\pi^2 k^2 + 1}\left(\cosh(1)(-1)^k - 1\right)}}$$

$$\boxed{f \sim \cosh(1) - 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2 k^2 + 1}\left(\cosh(1)(-1)^k - 1\right)\cos(kx)}$$

Parsevalova rovnost:

$$\frac{1}{\pi}\int_I (f(x))^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sinh\left(\frac{x}{\pi}\right)\right|^2 \mathrm{d}x = 2(\cosh(1) - 1)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\left(\cosh(1)(-1)^k - 1\right)}{\pi^2 k^2 + 1}\right)^2$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sinh\left(\frac{x}{\pi}\right)\right|^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sinh^2\left(\frac{x}{\pi}\right)\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \frac{x}{\pi} = \xi \\ \mathrm{d}x = \pi\,\mathrm{d}\xi \\ 0 \to 0,\ \pi \to 1 \end{bmatrix} = 2\int_0^1 \sinh^2(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 2\int_0^1 \frac{\left(\mathrm{e}^{\xi} - \mathrm{e}^{-\xi}\right)^2}{4}\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{2\xi} - \cancelto{2}{2\mathrm{e}^{\xi}\mathrm{e}^{-\xi}} + \mathrm{e}^{-2\xi}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^1 \cosh(2\xi) - 1\,\mathrm{d}\xi = \left[\frac{\sinh(2\xi)}{2}\right]_0^1 - \left[\xi\right]_0^1 = \frac{\sinh(2)}{2} - 1$$

$$\boxed{\frac{\sinh(2)}{2} - 1 = 2(\cosh(1) - 1)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\left(\cosh(1)(-1)^k - 1\right)}{\pi^2 k^2 + 1}\right)^2}$$

1.2 Poznámky a početní tríčky

Poznámky

Alternativní formulace Dirichlet-Jordanova kritéria

Má-li f konečnou variaci na $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ a je-li l-periodická,

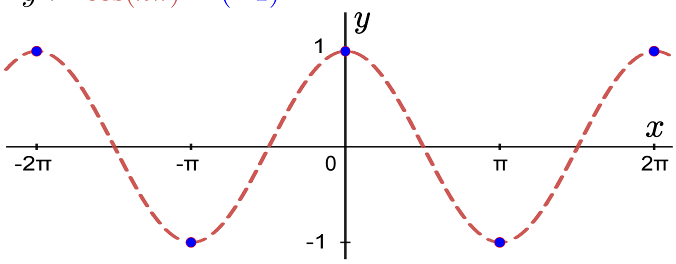
pak v každém bodě $x_0 \in (\alpha, \beta)$ platí $F_f(x_0) = \dfrac{f(x_{0+}) + f(x_{0-})}{2}$.

Tedy je-li f **spojitá**, pak $f(x_0)$ jest součtem své Fourierovy řady vyčíslené v x_0.

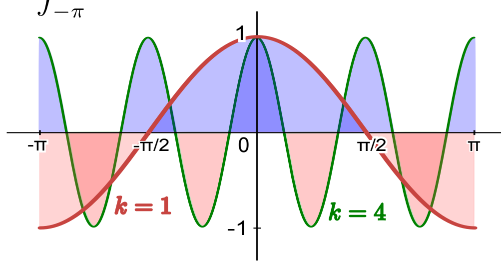
Poznámka: **Stejnoměrná konvergence** na (a, b) splývá se **stejnoměrnou konvergencí** na $[a, b]$. Pro vyjádření toho, že v *krajních bodech* jsou se stejnoměrnou konvergencí potíže, slouží pojem **lokálně stejnoměrná konvergence**.

Obecné tríčky:

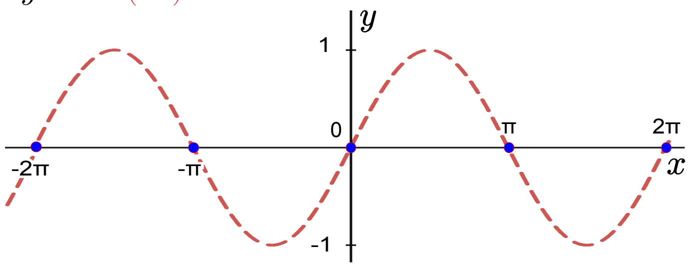
$y: \quad \cos(k\pi) = (-1)^k$



$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\boldsymbol{k}x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$$



$y: \quad \sin(k\pi) = 0$



Problém: Spočítat součet Fourierovy řady: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

➩ **Známý součet řady:**
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

➩ **Trik:**
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(2m)^2} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$$

přejmenujeme index $m = n$
$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{12}$$

➪Několikanásobné per partes

Pokud počítáme několikanásobné per partes, pomůže nám tzv. tabulková metoda, anglicky: *DI method.*

Vypočítejte: $\int x^3 \sin(kx)\,\mathrm{d}x$

$\pm$	**Der.**	**Int.**
$+$	x^3	$\sin(kx)$
$-$	$3x^2$	$-\cos(kx)\frac{1}{k}$
$+$	$6x$	$-\sin(kx)\frac{1}{k^2}$
$-$	6	$\cos(kx)\frac{1}{k^3}$
$+$	0	$\sin(kx)\frac{1}{k^4}$

$\longleftarrow$ **Využijeme tabulky, kterou jsme si rozepsali vlevo.**

V prvním sloupci pravidelně střídáme znaménka $+, -, +, \dots$ vždy nejprve od plusu (znaménková změna ze vzorce $\int u'v = uv - \int v'u$.

Ve druhém sloupci derivujeme funkci určenou pro derivování, zde se dostaneme až $x^3 \to 0$

Ve třetím sloupci integrujeme funkci určenou pro integrování, zde doplníme tabulku.

Nakonec vynásobíme první sloupec se členem z druhého sloupce na prvním řádku a pak vynásobíme se členem z třetího sloupce posunutým o řádek dolů (jdeme po šipce).

Celkově dostaneme v tomto případě:

$$\int x^3 \sin(kx)\,\mathrm{d}x = (x^3)\left(-\cos(kx)\frac{1}{k}\right) + (-1)(3x^2)\left(-\sin(kx)\frac{1}{k^2}\right) + (6x)\left(\cos(kx)\frac{1}{k^3}\right) + (-1)(6)\left(\sin(kx)\frac{1}{k^4}\right)$$

$$\boxed{\int x^3 \sin(kx)\,\mathrm{d}x = -x^3\frac{\cos(kx)}{k} + 3x^2\frac{\sin(kx)}{k^2} + 6x\frac{\cos(kx)}{k^3} - 6\frac{\sin(kx)}{k^4} + C}$$

➪Několikanásobné per partes (repetitivní integrál)

Tabulkovou metodu můžeme použít i v případě výpočtu „repetitivního integrálu”, kdy v rámci úprav získáme opět původní integrál.

Vypočítejte: $\int \sin(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x$

$\pm$	**Der.**	**Int.**
$+$	$\sin(x)$	$\cos(kx)$
$-$	$\cos(x)$	$\sin(kx)\frac{1}{k}$
$+$	$-\sin(x)$	$-\cos(kx)\frac{1}{k^2}$
		$\int$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\longleftarrow$ **Využijeme tabulky, kterou jsme si rozepsali vlevo.**

V prvním sloupci opět pravidelně střídáme znaménka $+, -, +, \dots$

Ve druhém sloupci opět derivujeme funkci určenou pro derivování

Ve třetím sloupci integrujeme funkci určenou pro integrování

Narozdíl od předchozího případu však nedokážeme zderivovat sloupeček s derivačním členem až na nulu.

Musíme si tak všimnout, kdy dostaneme na jednom řádku **stejné členy jako v původním integrálu** (až na multiplikativní konstanty). Tam, myšleno na tom řádku, se zastavíme s derivováním i integrováním.

Opět jako v minulém případě poskládáme předcházející členy z tabulky (úkrokem stranou), až se dostaneme na poslední řádek, kde tentokráte neposuneme se dolů, ale celý řádek umístíme do integrálu.

Celkově dostaneme v tomto případě:

$$I = \int \sin(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \sin(x)\left(\sin(kx)\frac{1}{k}\right) + (-1)\cos(x)\left(-\cos(kx)\frac{1}{k^2}\right) + \int \left(-\cos(kx)\frac{1}{k^2}\right)(-\sin(x))\,\mathrm{d}x$$

$$I = \frac{\sin(x)\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(x)\cos(kx)}{k^2} + \frac{1}{k^2}\underbrace{\int \cos(kx)\sin(x)\,\mathrm{d}x}_{I}$$

$$I = \frac{\sin(x)\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(x)\cos(kx)}{k^2} + \frac{1}{k^2}I \qquad \Rightarrow \quad I\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{\sin(x)\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(x)\cos(kx)}{k^2} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \frac{\sin(x)\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(x)\cos(kx)}{k^2} \quad \Rightarrow \quad I = \left(\frac{\sin(x)\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(x)\cos(kx)}{k^2}\right)\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{I = \frac{k\sin(x)\sin(kx) + \cos(x)\cos(kx)}{k^2-1}}$$

➪Odvození součtových vzorců skrze komplexní čísla

Definujme pomocnou funkci: $\quad \mathrm{cis}(\alpha) \equiv \cos(\alpha) + i\sin(\alpha), \qquad \mathrm{cis}(\alpha+\beta) = \mathrm{cis}(\alpha)\mathrm{cis}(\beta)$

$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = \Big(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\Big)\Big(\cos(\beta) + i\sin(\beta)\Big)$$

$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = \Big(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\Big) + i\Big(\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\Big)$$

Re část: $\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)}$ **Im část:** $\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}$

➪Rozdílové vzorce ze součtových vzorců

Využitím vlastností sudosti/lichosti fcí cosinus/sinus: $\quad \cos(-\beta) = \cos(\beta) \quad \sin(-\beta) = -\sin(\beta)$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)} \qquad \boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)}$$

➪Součinové vzorce ze součtových a rozdílových vzorců

$$\begin{array}{rl} & \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ + & \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \hline & \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ - & \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \hline & \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin(\alpha)\cos(\beta) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ + & \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \hline & \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ - & \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \hline & \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = -2\cos(\alpha)\sin(\beta) \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}} \qquad \boxed{\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2}} \qquad \boxed{\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta)}{2}}$$

Poznámka: Základní vlastnosti komplexních čísel jsou v kapitole: 2.1 Úvod do komplexní analýzy

2 Komplexní analýza

Vzorečky: Připomenutí vlastností funkcí sinus a cosinus

$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ $\qquad$ $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ $\qquad$ $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

$\sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos(\theta)$ $\qquad$ $\cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin(\theta)$ $\qquad$ $\mathrm{tg}(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

Alternativně: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$ $\qquad$ $\mathrm{cotg}(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

➪ Součtové a rozdílové vzorce

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \qquad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \qquad \sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

$$\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}(x) + \mathrm{tg}(y)}{1 - \mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y)} \qquad \mathrm{tg}(x-y) = \frac{\mathrm{tg}(x) - \mathrm{tg}(y)}{1 + \mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y)}$$

➪ Vzorce pro dvojnásobný úhel

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) \qquad \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - \sin^2(\theta) \qquad \mathrm{tg} = \frac{2\mathrm{tg}(\theta)}{1 - \mathrm{tg}^2(\theta)}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

➪ Vzorce pro poloviční úhel

$$\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}} \qquad \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}} \qquad \left|\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}$$

$$\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \qquad \cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \qquad \mathrm{tg}^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{1+\cos(2\theta)}$$

➪ Další užitečné odvozené vzorce

$$\cos^4(\theta) = \frac{1}{8}\left[4\cos(2\theta) + \cos(4\theta) + 3\right] \qquad \mathrm{tg}(\theta)\,\mathrm{cotg}(\theta) = 1$$

➪ Součin na součet

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$$

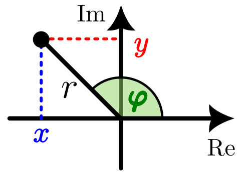
$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2} \qquad \cos(x)\sin(y) = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2}$$

➪ Součet na součin

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

2.1 Úvod do komplexní analýzy



$z \in \mathbb{C}:$ $\quad z = x + iy \begin{cases} x = \mathrm{Re}\,(z) \in \mathbb{R} \\ y = \mathrm{Im}\,(z) \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\quad$ kde $i^2 = -1$

$z = r \cdot \mathrm{e}^{i\varphi} = r \cdot \big(\cos\varphi + i \sin\varphi\big)$ $\quad r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\varphi = \arg(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ $\quad$ pro $\varphi \in (-\pi, \pi]$

➪ Vlastnosti komplexních čísel

- *Algebraický tvar komplexního čísla:* $\boldsymbol{z} = a + ib$ $\quad \boldsymbol{w} = c + id$
- *Součet a rozdíl komplexních čísel:* $\boldsymbol{z} + \boldsymbol{w} = (a+c) + i(b+d)$ $\quad \boldsymbol{z} - \boldsymbol{w} = (a-c) + i(b-d)$
- *Reálná a imaginární složka:* $\mathrm{Re}\,\{z\} = a$ $\quad \mathrm{Im}\,\{z\} = b \quad (\neq ib)$
- *Komplexní sdružení a norma:* $\bar{\boldsymbol{z}} = a - ib$ $\quad \|\boldsymbol{z}\| = \sqrt{\boldsymbol{z}\bar{\boldsymbol{z}}} = \sqrt{a^2+b^2}$
- *Komplexní násobení:* $\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{w} = (a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$
- *Komplexní dělení:* $\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z}} = \dfrac{\bar{\boldsymbol{z}}}{\bar{\boldsymbol{z}}\boldsymbol{z}} = \dfrac{\bar{\boldsymbol{z}}}{\|\boldsymbol{z}\|^{\mathbf{2}}} \quad (\boldsymbol{z} \neq 0)$

➪ Goniometrický tvar komplexního čísla

- *Zavedení:* $\boldsymbol{z} = \|\boldsymbol{z}\|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \|\boldsymbol{z}\|\,\mathrm{e}^{i\varphi} \qquad \varphi \in [0, 2\pi)$
- *Násobení v goniometrickém tvaru:* $\boldsymbol{z_1} \cdot \boldsymbol{z_2} = \|\boldsymbol{z_1}\|\,\mathrm{e}^{i\varphi_1} \cdot \|\boldsymbol{z_2}\|\,\mathrm{e}^{i\varphi_2} = \|\boldsymbol{z_1}\|\,\|\boldsymbol{z_2}\|\,\mathrm{e}^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

➪ Důležité vztahy a vlastnosti

- *Komplexní exponenciála:* $\mathrm{e}^z = \exp(z) := \mathrm{e}^x\big(\cos(y) + i\sin(y)\big)$ $\quad$ pro $z = x + iy$
- *Eulerův vzorec (E):* $\boxed{\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$
- *Eulerova identita:* $\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$
- *Moivreova věta:* $\boldsymbol{z^n} = \|\boldsymbol{z}\|^n\,(\cos(x) + i\sin(x))^n = \|\boldsymbol{z}\|^n\,(\cos(nx) + i\sin(nx))$
- *Moivreova věta exponenciálně:* $\boxed{\boldsymbol{z^n} = \|\boldsymbol{z}\|^n\,\mathrm{e}^{in\varphi}}$
- *Základní věta algebry:* *Polynom stupně n má v $\mathbb{C}$ právě n kořenů (včetně násobnosti)*

➪ Rozdělení funkcí

1) polynomy se chovají jako v $\mathbb{R}$
2) $\sqrt[n]{}$ odmocniny dávají ***tzv. víceznačné funkce***
3) funkce, které jsou rovny svým Taylorovým řadám (analytické) v $\mathbb{C}$:

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{z}^n}{n!}$$

$$\cos(\boldsymbol{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\boldsymbol{z}^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin(\boldsymbol{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\boldsymbol{z}^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh(\boldsymbol{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{z}^{2n}}{(2n)!} \qquad \sinh(\boldsymbol{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{z}^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

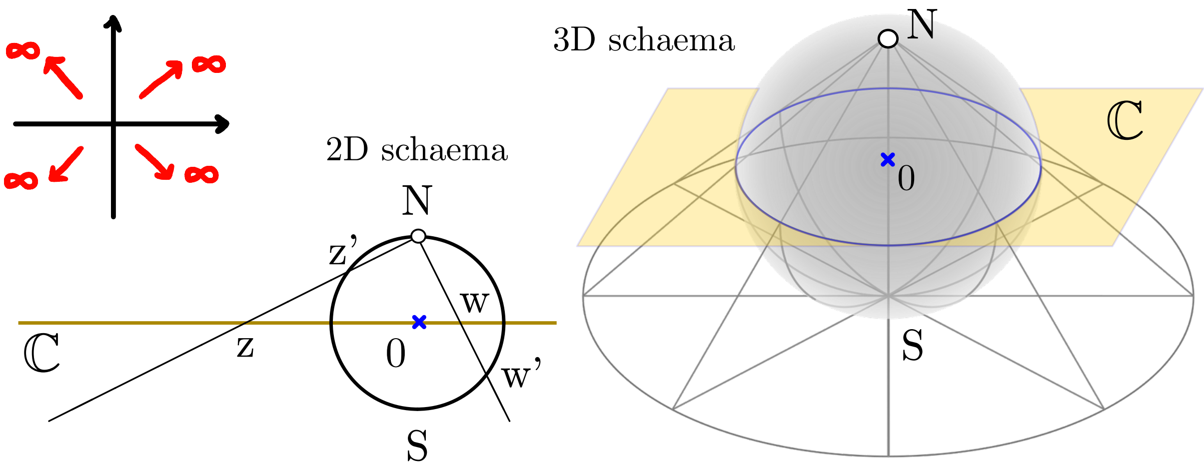
➪ Goniometrické a hyperbolické funkce & exponenciální tvar

$$\cos(iz) = \cosh(z) \qquad \cosh(iz) = \cos(z) \qquad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin(iz) = i\sinh(z) \qquad \sinh(iz) = i\sin(z) \qquad \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

- $\forall$ tyto funkce jsou ***neomezené***, platí tedy i např. $\cos(z) = -3$, $\sin(z) = \pi$
- $\forall$ tyto funkce jsou ***periodické***
  - sin, cos ... perioda 2π
  - sinh, cosh, e^z ... perioda $2\pi i$

➪ V komplexní rovině definujeme "jen"jedno nekonečno $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$



Množina komplexních čísel bývá ztotožňována s jednotkovou sférou v $\mathbb{R}^3$ s vynechaným severním pólem. Střed sféry odpovídá počátku komplexní roviny $0 + 0i$. Toto ztotožnění se nazývá **stereografická projekce**.

- body, pro něž $|z| = 1$ (ležící na rovníku), se zobrazí samy na sebe
- body, pro něž platí $|z| < 1$, se zobrazí na jižní polokouli (případ $W \to W'$)
- počátek $|z| = 0$ se zobrazí na jižní pól S
- body, pro něž platí $|z| > 1$, se zobrazí na severní polokouli (případ $Z \to Z'$)
- body „v nekonečnu”, $|z| = \infty$ se zobrazí na severní pól N

Animace: https://people.reed.edu/~ormsbyk/projectproject/assets/posts/stereographic-projection/stereographic2D.gif

Příklad

Zadání: Čemu se rovná $\cos(2 + i)$?

✓ ***Řešení:*** $\cos(2 + i) = \cos 2 \cos i - \sin 2 \sin i = \cos 2 \cosh 1 - i \sin 2 \sinh 1$

Příklad

Zadání: Vyřešte rovnici $\cos(z) + \sin(z) = 2$ (nemá řešení v $\mathbb{R}$, ale v $\mathbb{C}$ ano)
A řešení uveďte ve tvaru $z = a + ib$

✓ ***Řešení:***

$$\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz} + \frac{1}{i}\left(\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}\right) = 4 \qquad t = \mathrm{e}^{iz}$$

$$t + \frac{1}{t} + \frac{1}{i}\left(t - \frac{1}{t}\right) = 4$$

$$t^2 + 1 - i\left(t^2 - 1\right) = 4t$$

$$(1-i)t^2 - 4t + 1 + i = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{diskriminant } D = 16 - 4(1-i)(1+i) = 8$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2(1-i)} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}(1+i) = (\sqrt{2} \pm 1)\underbrace{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}_{\text{velikost } 1} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2} \pm 1)$$

$$\mathrm{e}^{iz} = t = (\sqrt{2} \pm 1)\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\mathrm{e}^{iz} = \mathrm{e}^{-b+ai} = \mathrm{e}^{-b}\,\mathrm{e}^{ai} = (\sqrt{2} \pm 1)\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\pi}{4}; \quad \mathrm{e}^{-b} = \sqrt{2} \pm 1 \quad \Rightarrow \quad b = -\ln(\sqrt{2} \pm 1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boxed{z = \frac{\pi}{4} - i\ln(\sqrt{2} \pm 1)}}$$

✓ ***Alternativní způsob řešení:***

$$\cos(z) + \sin(z) = 2$$

Vyjádřením komplexního čísla v algebraickém tvaru a využitím součtových vzorců pro sin a cos:

$$\sin(\overbrace{a+ib}^{z}) = \sin(a)\cos(ib) + \cos(a)\sin(ib) = \sin(a)\cosh(b) + i\cos(a)\sinh(b)$$
$$\cos(\overbrace{a+ib}^{z}) = \cos(a)\cos(ib) - \sin(a)\sin(ib) = \cos(a)\cosh(b) - i\sin(a)\sinh(b)$$

LS: $\cosh b \cdot (\sin a + \cos a) + i\sinh b \cdot (\cos a - \sin a)$
PS: $2 + i0$

$\Rightarrow$ Soustava rovnic:

$$\sinh b\,(\cos a - \sin a) = 0$$
$$\cosh b\,(\sin a + \cos a) = 2$$

1. rovnice: 1.) možnost: $\boxed{\sinh b = 0} \quad\Rightarrow\quad b = 0,\ a$ libovolné

$\Longrightarrow$ **2. rovnice:** $\sin a + \cos a = 2$. To nemá v $\mathbb{R}$ řešení

2.) možnost: $\boxed{\sin a = \cos a} \quad\Rightarrow\quad a = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ b$ libovolné

$\Longrightarrow$ **2. rovnice:** $\to k$ sudé: $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \cosh b = \sqrt{2}$

$b = \pm \operatorname{arg\,cosh} \sqrt{2}$

$\to k$ liché: $\sin a + \cos a = -\sqrt{2}$

$\Rightarrow \cosh b = -\sqrt{2}$

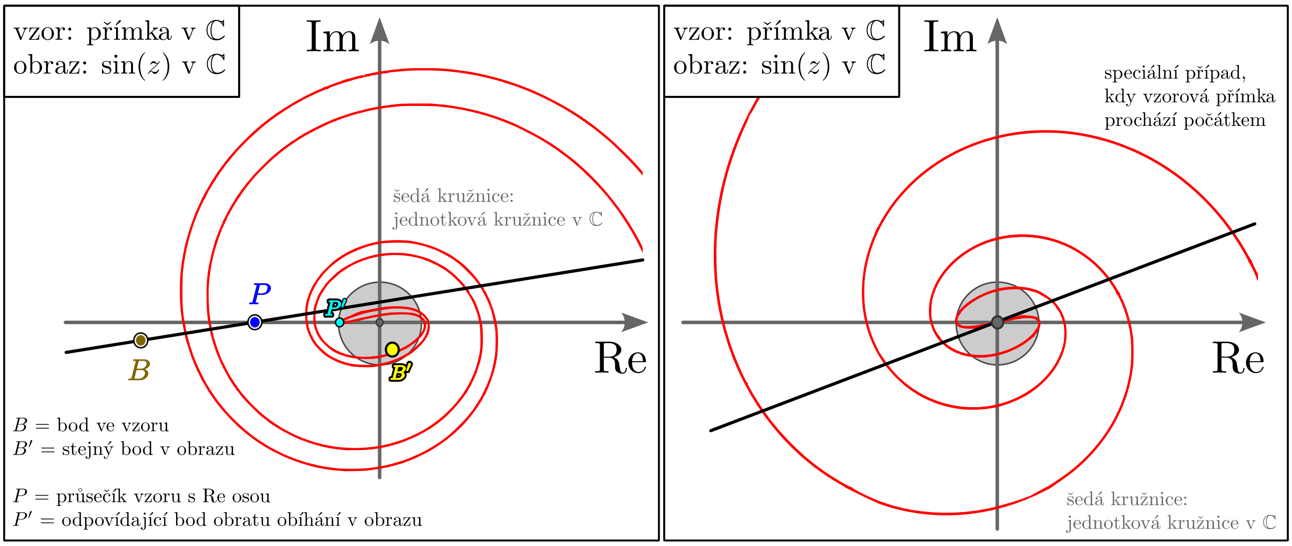
nemá řešení

Celkem: $z = a + ib$, kde $a = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$b = \pm \operatorname{argcosh}(\sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2} \pm 1) \quad\Rightarrow\quad \boxed{\boxed{z = \frac{\pi}{4} + i\ln(\sqrt{2} \pm 1)}}$$

Poznámka: Získané výsledky jsou ekvivalentní:

$$z = \frac{\pi}{4} - i\ln(\sqrt{2} \pm 1) = \frac{\pi}{4} + i\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2} \pm 1}\right) = \frac{\pi}{4} + i\ln\left(\frac{\sqrt{2} \mp 1}{(\sqrt{2} \pm 1)(\sqrt{2} \mp 1)}\right) = \frac{\pi}{4} + i\ln\left(\sqrt{2} \mp 1\right)$$



Obrázek 1: Komplexní sinus, obraz a vzor v jedné komplexní rovině, 2 případy

Příklonem vzorové přímky k reálné ose se „sinová spirála zahušťuje” až na reálné ose zdegeneruje v interval $[-1, 1]$, alias „klasický reálný sinus”.

Interaktivní zdroj: `https://www.geogebra.org/m/qtwNw524` [The Complex Sine Function]

2.2 Komplexní zobrazení, holomorfní fce

2.2.1 Derivace a C-R podmínky

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \sim \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\qquad\qquad\qquad\quad f : (x; y) \to (u; v)$

f má v $a \in \mathbb{C}$ derivaci, jestliže existuje $\quad f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $a \in \Omega$

→ f je holomorfní v a ... jestliže $\exists$ okolí a na němž má f derivaci

→ f je holomorfní v Ω ... jestliže $\exists f'(z)$ pro $\forall z \in \Omega$

Poznámka:

z^k je holomorfní $\forall k \in \mathbb{N}$ na C, $\quad \frac{1}{z}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\quad \bar{z}$ není holomorfní NIKDE!

Věta 6 (Cauchy-Riemannovy podmínky)**.**

Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$ derivaci

Označme: $f(z) = u(z_1, z_2) + iv(z_1, z_2) \quad$ pro $\quad z = z_1 + iz_2, \quad$ kde $\quad u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

a $\qquad \mathbb{F}(z_1, z_2) := \big(u(z_1, z_2), v(z_1, z_1)\big) \quad$ tedy $\quad \mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Pak

a) funkce u, v v bodě $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ splňují C-R podmínky:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{a} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad i\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

b) $\mathbb{F}$ má v bodě (a_1, a_2) totální diferenciál a $J_{\mathbb{F}}(a_1, a_2) = |f'(a)|^2$

Věta 7 (Druhá věta o C-R podmínkách)**.**

Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a u, v jsou jako výše, nechť jsou definovány na okolí $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$

Jestliže u, v mají v (a_1, a_2) totální diferenciál a splňují-li v něm C-R podmínky,

⇒ pak f má v $a = a_1 + ia_2$ derivaci a platí

$$f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a_1, a_2) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a_1, a_2)$$

Definice 1 (Harmonická funkce)**.** *(20.2.12)*

Nechť $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná a je třídy C^2 na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že g je harmonická na Ω, jestliže

$$\Delta g = 0 \quad \text{na } \Omega$$

(připomeňme, že Laplaceův operátor je definován předpisem $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 g}{\partial x_N^2}$).

Poznámka: Z C-R podmínek plyne, že **každá** složka holomorfní funkce (Re, Im) je harmonická.

Naopak znalost 1 složky harmonické funkce umožňuje zkonstruovati druhou harmonickou funkci tak, že společně tvoří Re a Im část holomorfní funkce.[a]

Příklad

Zadání: Zjistěte, jestli je $f(z) = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ je na nějaké množině holomorfní?

✓ ***Řešení:***

$u(x;y) = \mathrm{Re}\{f\}$

$v(x;y) = \mathrm{Im}\{f\} = 0$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial x} &= \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq \tfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \tfrac{\partial u}{\partial y} &= \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq \tfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad [x,y] \neq [0,0]$$

V $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ neexistuje $f'(z)$ & v bodě 0 nemá $f(z)$ parciální derivace ani totální diferenciál

$\Rightarrow f'(z)$ **neexistuje nikde**

Podobné případy jsou: $\bar{z}, \mathrm{Re}\{z\}, \mathrm{Im}\{z\}$

2.2.2 Rekonstrukce holomorfní funkce

Příklad

Zadání: Najděte holomorfní funkci (na maximálním definičním oboru) $f = u + iv$ splňující předpis:

$$u(x,v) = x^2 - y^2 + \mathrm{e}^x\big(x\cos(y) - y\sin(y)\big)$$

✓ ***Řešení:***

Cauchy-Riemannovy podmínky:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + \mathrm{e}^x\big(x\cos(y) - y\sin(y) + \cos(y)\big) = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y + \mathrm{e}^x\big(-x\sin(y) - \sin(y) - y\cos(y)\big) = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y = \int 2x + \mathrm{e}^x\Big[(x+1)\cos(y) - y\sin(y)\Big]\,\mathrm{d}y$$

$$v = 2xy + \mathrm{e}^x\Big[x\sin(y) + y\cos(y)\Big] + C(x) \qquad \underset{\text{dosadíme } v \text{ do derivací}}{\downarrow}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x}\Big(2xy + \mathrm{e}^x\Big[x\sin(y) + y\cos(y)\Big] + C(x)\Big) \\ &= -2y - \mathrm{e}^x\Big(x\sin(y) + y\cos(y) + \sin(y)\Big) + C'(x) \\ = \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y + \mathrm{e}^x\Big(-x\sin(y) - \sin(y) - y\cos(y)\Big) \qquad \Rightarrow C'(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\Longrightarrow v = 2xy + \mathrm{e}^x\Big[x\sin(y) + y\cos(y)\Big] + K; \quad K \in \mathbb{R}}$$

$$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 + \mathrm{e}^x\Big(x\cos(y) - y\sin(y)\Big) + i\Big(2xy + \mathrm{e}^x\Big[x\sin(y) + y\cos(y)\Big] + K\Big)$$

$$\text{kde} \quad z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2; \qquad \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x\Big(\cos(y) + i\sin(y)\Big)$$

$$\text{tedy:} \quad \boxed{\boxed{f(z) = z^2 + z\,\mathrm{e}^z + iK}} \qquad K \in \mathbb{R}, \quad D_f = \mathbb{C}$$

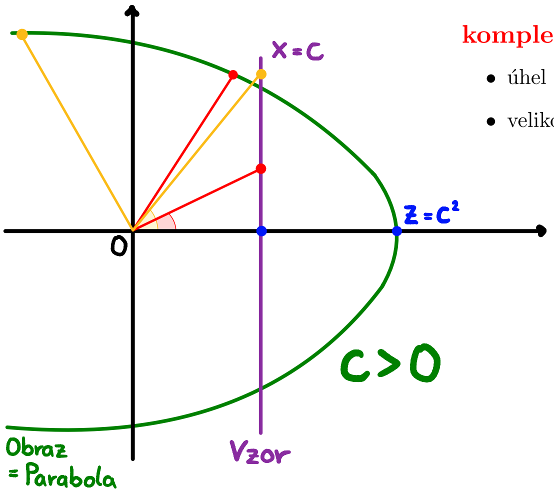
[a] Detailněji vizte M. Pokorný, Věta 20.2.13 (O harmoničnosti složek holomorfní funkce).

2.2.3 Obrazy množin

Příklad

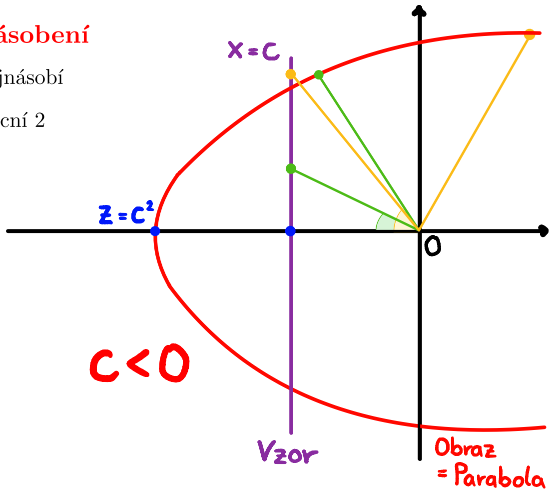
Zadání: Mějme zobrazení: $f(z) = z^2$, určete:

a) obrazy přímek $x = C$

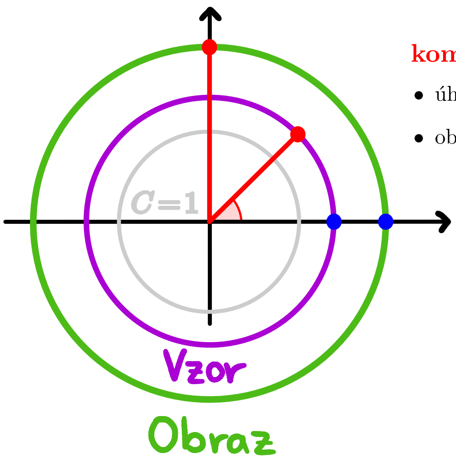


komplexní násobení

- úhel se zdvojnásobí
- velikost umocní 2

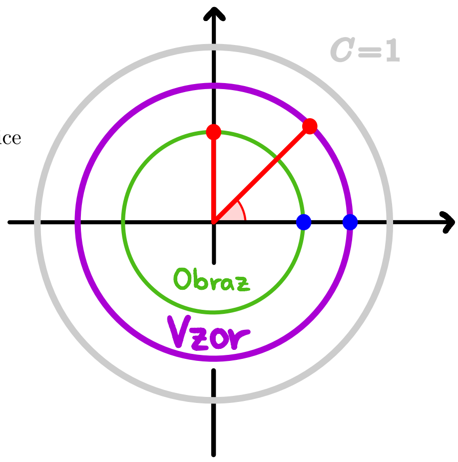


b) obrazy kružnic $|z| = C$



komplexní násobení

- úhel se zdvojnásobí
- obraz je 2x proběhnutá kružnice



Příklad

Zadání: Mějme zobrazení: $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$, určete obrazy přímky Im $z = 1$

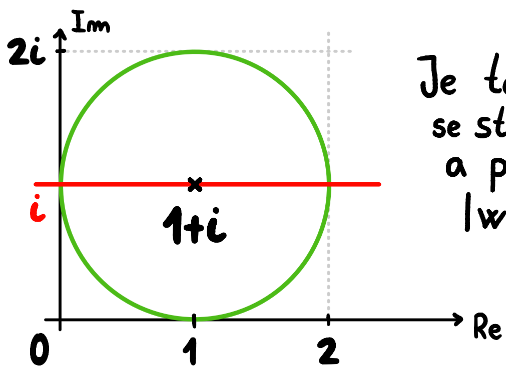
✓ ***Řešení:***

$$f(x+i) = \frac{x-1+i}{x+1+i} = \frac{x^2+2i}{(x+1)^2+1}$$

$x = 0$; $z = i$; $f(i) = \dfrac{2i}{2} = i$

$x = -1$; $z = -1+i$; $f(-1+i) = 1+2i$

$x = \infty$; $z = \infty$; $f(\infty) = 1$



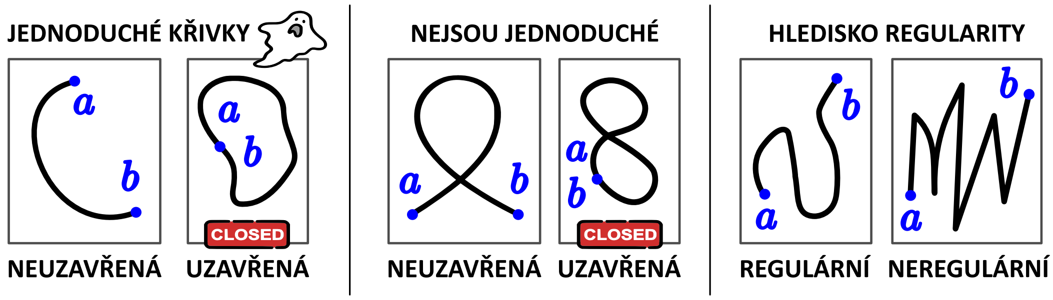
Je to kružnice
se středem $1+i$
a poloměrem 1
$|w-(1+i)| = 1$

Další visualisace zde: https://www.geogebra.org/m/CActpGQE [Complex mapping]

2.3 Křivkový integrál v $\mathbb{C}$

Zavedení pojmů:

- *Křivka (v $\mathbb{C}$):* zobrazení $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$,
- *Regulární křivka:* $\varphi'(t) \neq 0$ na $[a,b]$
- *Jednoduchá křivka:* φ je prostá na $[a,b)$ a na $(a,b]$ a φ^{-1} spojitá na obrazu (a,b)
- *Uzavřená křivka:* $\varphi(a) = \varphi(b)$
- *Jordanova křivka:* jednoduchá + uzavřená

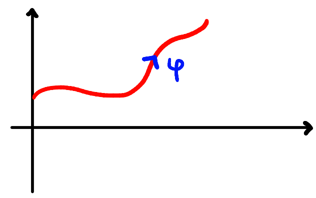


Vzoreček: Křivkový integrál

Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, pak

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

jestliže integrál na PS existuje jako Lebesgueův



- *Délka křivky:* $l_\varphi := \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$

Poznámka:

Vnímáme-li $\mathbb{C}$ jako $\mathbb{R}^2$, je f vektorová funkce a $\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z$ je vlastně křivkový integrál 2. druhu

Definice 2 (Primitivní funkce (v $\mathbb{C}$)).

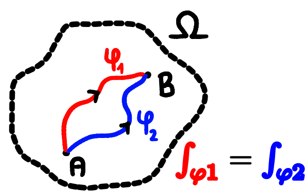
Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená, f, F jsou definované na Ω.

Je-li $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega$, pak $\Rightarrow$ F je primitivní funkcí k f na Ω.

Poznámky:

1. f má primitivní funkci v oblasti Ω právě tehdy,

   když $\Leftrightarrow$ $\int_\varphi f$ nezávisí na volbě křivky



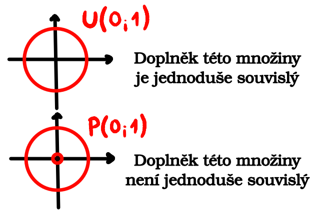
2. platí Newtonův vzoreček:

   Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, f spojitá a F primitivní funkce k f.

   Pak $\Rightarrow$ pro $\underbrace{\forall \varphi}_{\text{po částech } C^1} : [a,b] \to \Omega$ platí

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

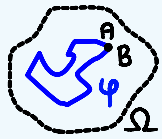
Další pojmy:



- *Jednoduše souvislá oblast:* pro jednoduše souvislou oblast Ω platí, že její doplněk $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$ je též jednoduše souvislá oblast.
- *po částech C^1 křivka* pseudodefinice: spojitá křivka „s konečným počtem hrotů”

2.3.1 Cauchyova věta

Věta 8 (Cauchyova věta). *(CV)*



Nechť Ω je jednoduše souvislá oblast (nemá díry), fce f je holomorfní v oblasti Ω,

pak $\Rightarrow$ pro $\forall$ křivku φ (uzavřená a po částech C^1), jejíž obraz $\langle\varphi\rangle \subset \Omega$ platí:

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Věta 9 (Cauchyova „děravá” věta). *(Věta 20.4.7)*

Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ jsou regulární Jordanovy po částech C^1-křivky v $\mathbb{C}$, pro které platí

$$\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle \subset \operatorname{Int}\varphi \quad \text{pro všechna } j \in \{1,\ldots,k\},$$
$$(\operatorname{Int}\varphi_i \cup \langle\varphi_i\rangle) \cap (\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle) = \emptyset \quad \text{kdykoliv } i \neq j$$

a všechny uvedené křivky jsou obíhány ve stejném smyslu.

Položme $\Omega := \operatorname{Int}\varphi \setminus \bigcup_{j=1}^{k} (\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle)$. Nechť funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a spojitá na $\bar{\Omega}$.

Pak
$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \int_{\varphi_j} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Poznámka:

Poslední věta se ve skriptech jmenuje **třetí verse Cauchyovy věty**. Používáme ji jen ve velmi jednoduchých situacích, kde platí:

- φ bude obíhat velký půlkruh nebo obdélník
- k bude velmi malé a $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ budou obíhat malé kruhy
- dokonce f bude holomorfní na množině Ω mimo středy těchto malých kruhů

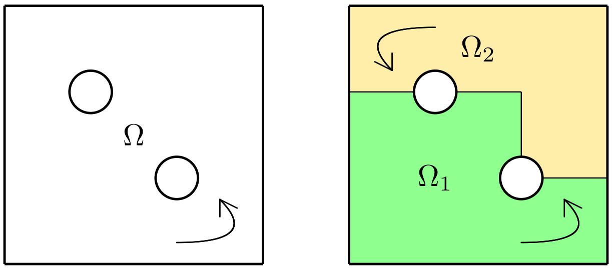
Pak je zcela korektní důkaz na následující straně.

Důkaz (Cauchyova „děravá” věta)

Množinu Ω rozdělíme na dvě disjunktní jednoduše souvislé oblasti Ω_1 a Ω_2 jako na **Obrázku**. Pokud označíme jako $\langle\psi_1\rangle$ geometrický obraz křivky v dolní části obrázku napravo a $\langle\psi_2\rangle$ geometrický obraz křivky v horní části stejného obrázku, dostáváme

$$0 = \int_{\psi_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{j=1}^{k} \int_{\varphi_j} f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

protože integrály přes přidané lomené čáry se navzájem odečtou



Přidáním několika lomených čar probíhaných dvakrát v opačném směru vytvoříme jednoduše souvislé oblasti:

$$\Omega_1, \Omega_2$$

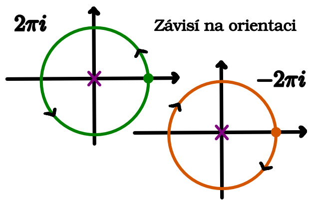
kde již lze použít základní Cauchyovu větu (CV)

Fundamentální příklad (kde Cauchyova věta nefunguje):

$\varphi(t) = R\,\mathrm{e}^{it} \quad t \in [0; 2\pi]$

$\varphi'(t) = iR\,\mathrm{e}^{it}$

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{R\,\mathrm{e}^{it}}} \cdot i\cancel{R\,\mathrm{e}^{it}}\,\mathrm{d}t = \boxed{2\pi i}$$



Proč tu neplatí Cauchyho věta ( )

- $f(z) = \frac{1}{z}$ **definovaná** v $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\}$
- $f(z)$ **holomorfní** v Ω, φ **uzavřená**
- Ω ale **není** jednoduše souvislá!

Důsledek: $\dfrac{1}{z}$ nemá primitivní funkci v $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

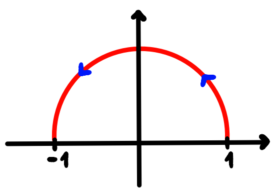
Ještě obecněji (posunutá kružnice): $\varphi(t) = a + R\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0; 2\pi]$, $\varphi'(t) = iR\,\mathrm{e}^{it}$

$$\int_\varphi \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{a} + \cancel{R\,\mathrm{e}^{it}} - \cancel{a}} \cdot i\,\cancel{R\,\mathrm{e}^{it}}\,\mathrm{d}t = \boxed{2\pi i}$$

Typologie příkladů:

1 ***Křivka φ není uzavřená, přesto vyjde $\int f = 0$***

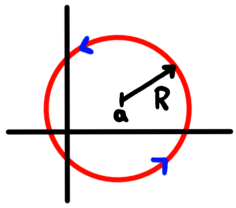
Zadání: $\int_\varphi z\,\mathrm{d}z$, kde φ je polokružnice $|z| = 1$,
z bodu (1,0) do (-1,0) přes horní polorovinu.



✓ ***Řešení:***

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t) &= \mathrm{e}^{it} \qquad t \in [0,\pi] \\ \varphi'(t) &= i\,\mathrm{e}^{it} \end{aligned}\right\} \quad \int_\varphi z\,\mathrm{d}z = \int_0^\pi (\mathrm{e}^{it})\,(i\,\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t = i\int_0^\pi \mathrm{e}^{2it}\,\mathrm{d}t = \cancel{i}\left[\frac{\mathrm{e}^{2it}}{2\cancel{i}}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{2i\pi} - \mathrm{e}^0\right] = 0$$

(2) ***Jsou splněny předpoklady Cauchyho věty, proto*** $\int f = 0$



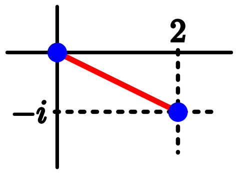
Zadání: $\int_\varphi (z-a)^n \,\mathrm{d}z$, kde φ je kladně orientovaná kružnice s předpisem $|z-a| = R,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\},\ a \in \mathbb{C}$

✓ ***Řešení:***

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t) &= a + R\,\mathrm{e}^{it} \qquad t \in [0, 2\pi] \\ \varphi'(t) &= iR\,\mathrm{e}^{it} \end{aligned}\right\} \qquad \int_0^{2\pi} (R\,\mathrm{e}^{it})^n\,(iR\,\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t \;= iR^{n+1}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{(n+1)it}\,\mathrm{d}t \;= \cancel{i}R^{n+1}\left[\frac{\mathrm{e}^{(n+2)it}}{(n+1)\cancel{i}}\right] = 0$$

---

(3) f ***není holomorfní, křivka*** φ ***není uzavřená***



Zadání: $\int_\varphi |z| \,\mathrm{d}z$, kde φ je průvodič bodu $2-i$

✓ ***Řešení:***

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t) &= (2-i)\,t \qquad t \in [0, 1] \\ \varphi'(t) &= 2-i \end{aligned}\right\} \qquad \int_\varphi |z|\,\mathrm{d}z \;= \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + (1t)^2}\,(2-i)\,\mathrm{d}t \;= \sqrt{5}(2-i)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}\,(2-i)$$

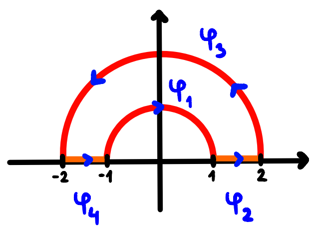
---

(4) f ***není holomorfní, ale křivka*** φ ***je uzavřená***

Zadání: $\int_\varphi \frac{z}{\bar{z}} \,\mathrm{d}z$, φ je kladně orientovaný obvod horního mezikruží se středem v počátku s poloměry 1 a 2.

✓ ***Řešení:***

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-it} && t \in [-\pi; 0] && \varphi_1'(t) = -i\,\mathrm{e}^{-it} \\ &\varphi_2(t) = t && t \in [1; 2] && \varphi_2'(t) = 1 \\ &\varphi_3(t) = 2\,\mathrm{e}^{it} && t \in [0; \pi] && \varphi_3'(t) = 2i\,\mathrm{e}^{it} \\ &\varphi_4(t) = t && t \in [-2; -1] && \varphi_4'(t) = 1 \end{aligned}$$



$$\int_{\varphi_1} \frac{z}{\bar{z}}\,\mathrm{d}z \;= \int_{-\pi}^{0} \frac{\mathrm{e}^{-it}}{\mathrm{e}^{it}}\left(-i\,\mathrm{e}^{-it}\right)\,\mathrm{d}t \;= -i\int_{-\pi}^{0} \mathrm{e}^{-3it}\,\mathrm{d}t \;= -i\left[\frac{\mathrm{e}^{-3it}}{-3i}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{3}\Big[\cos(3t) - i\sin(3t)\Big]_{-\pi}^{0} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{\varphi_2} \frac{z}{\bar{z}}\,\mathrm{d}z \;= \int_1^2 \frac{\cancel{t}}{\cancel{t}}\,\mathrm{d}t \;= [t]_1^2 = 1$$

$$\int_{\varphi_3} \frac{z}{\bar{z}}\,\mathrm{d}z \;= \int_0^{\pi} \frac{2\,\mathrm{e}^{it}}{2\,\mathrm{e}^{-it}}\left(2i\,\mathrm{e}^{it}\right)\,\mathrm{d}t \;= 2i\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{3it}\,\mathrm{d}t \;= 2i\left[\frac{\mathrm{e}^{3it}}{3i}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\Big[\cos(3t) + i\sin(3t)\Big]_0^{\pi} = -\frac{4}{3}$$

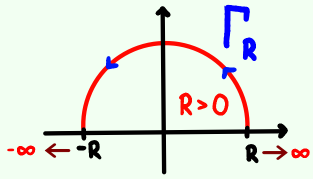
$$\int_{\varphi_4} \frac{z}{\bar{z}}\,\mathrm{d}z \;= \int_{-2}^{-1} \frac{\cancel{t}}{\cancel{t}}\,\mathrm{d}t \;= [t]_{-2}^{-1} = 1$$

$$\boxed{\int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} + \int_{\varphi_4} = \frac{4}{3}}$$

K výpočtům se nám dále bude hodit:

Lemma 2 (Jordanovo lemma). *(Jordan)*

Nechť pro $R_0 > 0$ je $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, |z| > R_0\}$,
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spojitá na $\overline{\Omega}$



Definujeme $\Gamma_R(t) = R\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0,\pi]$ a $M_R = \max\limits_{\langle \Gamma_R \rangle} |f|$

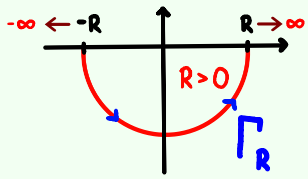
Dále nechť platí

- BUĎ $\alpha = 0$ a $RM_R \to 0$ pro $R \to +\infty$
- NEBO $\alpha > 0$ a $M_R \to 0$ pro $R \to +\infty$

Pak Γ_R je horní půlkružnice, $t \in [0,\pi]$ a platí

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{e}^{i\alpha z}\,\mathrm{d}z \to 0 \quad \text{pro } R \to \infty \qquad (🏀)$$

Pokud $\operatorname{Im} z < 0$, (a opět) $|z| > R_0$



Pak volíme $\Gamma_R(t) = R\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [\pi, 2\pi]$

A vyžadujeme, aby platilo

- BUĎ $\alpha = 0$ a $RM_R \to 0$ pro $R \to +\infty$
- NEBO $\alpha < 0$ a $M_R \to 0$ pro $R \to +\infty$

Tedy
$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{e}^{i\alpha z}\,\mathrm{d}z \to 0 \quad \text{pro } R \to \infty$$

Vzoreček: Cauchyův vzorec (C. vzorec)

Nechť Γ kladně orientovaná Jordanova, po částech C^1 křivka v $\mathbb{C}$. f holomorfní v $\operatorname{Int}\Gamma$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$.

Pak pro $\forall z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z$$

A pro $\forall k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}z$$

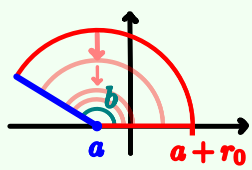
Speciálně:

Pro $\Gamma_r = a + r\,\mathrm{e}^{it}$ $t \in [0; 2\pi]$, a kde $f \equiv 1$, $z_0 = a$ platí:

$$1 = f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\Gamma_r} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi i$$

Lemma 3 (Lemma o obcházení pólu násobnosti 1). *(LOOPN1)*

Buďiž f spojitá na $0 < |z-a| \le r_0$, $0 \le \arg(z-a) \le b$, kde $b \in (0, 2\pi]$



Nechť $\exists \lim\limits_{z \to a} f(z)\cdot(z-a) = A \in \mathbb{C}$

Potom $\Rightarrow \lim\limits_{r \to 0} \int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z = iAb$,

kde C_r značí kladně proběhnutý oblouk kružnice $|z-a| = r$ vyťatý úhlem b

Příklad

Zadání: $\displaystyle\int_\varphi \frac{1}{z^2}\,\mathrm{d}z$ kde φ je jednotková kružnice v $\mathbb{C}$ se středem v počátku

✓ ***Řešení:***

$$\int_\varphi \frac{1}{z^2}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mathrm{e}^{2it}}\, i\,\mathrm{e}^{it} = i\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-it}\,\mathrm{d}t = -\frac{i}{i}\Big[\mathrm{e}^{-it}\Big]_{t=0}^{2\pi} = 0$$

2.3.2 Komplexní Logaritmus, obecná mocnina

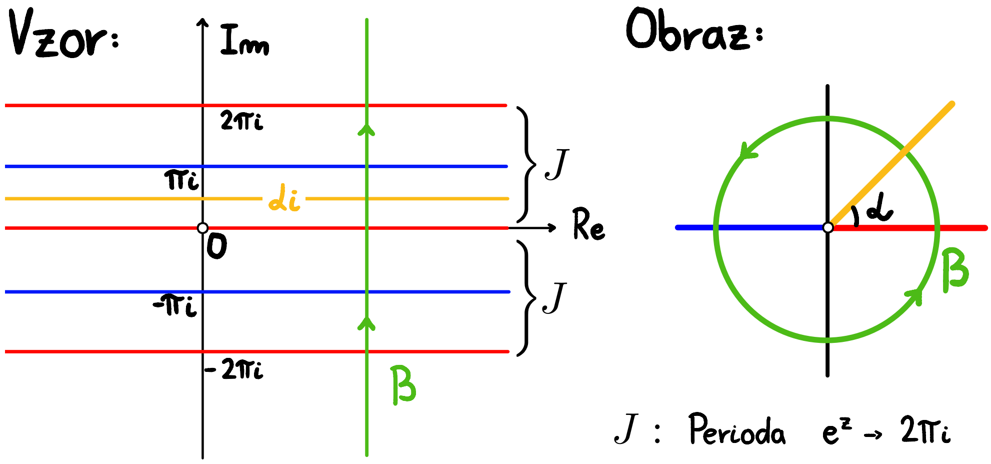
Komplexní Logaritmus

Přirozené zavedení: Pro $z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ jest $\mathrm{Ln}\,(z) = \ln(r) + i\varphi$

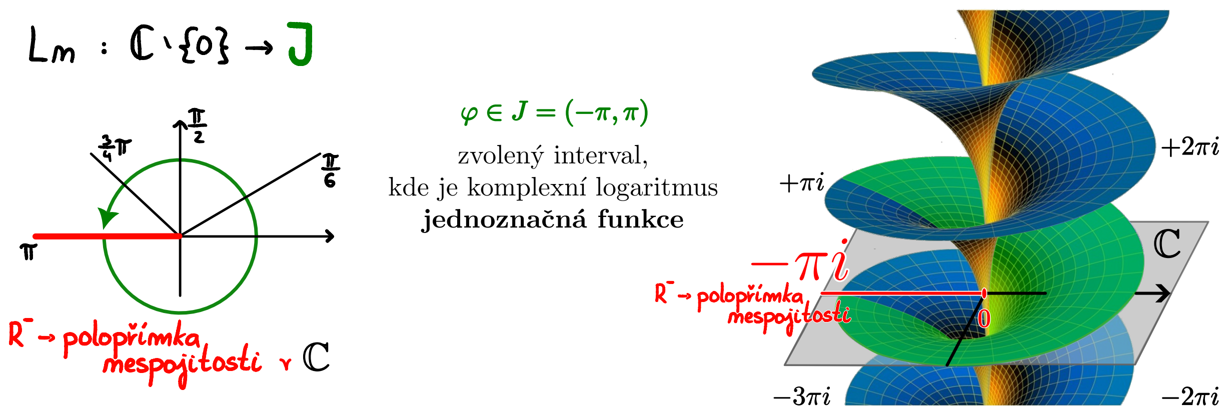

Problém: Dostali jsme víceznačnou funkci, protože φ není určeno jednoznačně!

Řešení: Omezit φ na interval délky jedné periody $J = 2\pi$, např. $(-\pi;\pi)$ nebo $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$, atp.

Pro kladná reálná x je pak $\ln(x)$ standardní logaritmus, může však být i $\ln(x) + 2k\pi i$ pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$



Obrázek 2: Obrazy kartézské sítě při zobrazení e^z



Obrázek 3: Polopřímka nespojitosti komplexního logaritmu a jeho 4D znázornění

Pojmy:

- *Argument Logaritmu* — Definujeme $\varphi = \mathrm{Arg}\,(z) := t \in (c; c+2\pi]$, tak, aby na tomto intervalu byl Logaritmus definovaný jednoznačně.
- *Polopřímka nespojitosti* — Vzhledem k tomu, že $\mathrm{Ln}\,(z)$ je víceznačná funkce, existuje pro ni tzv. polopřímka nespojitosti, jejíž poloha závisí na námi zvoleném intervalu pro t v zavedení $\mathrm{Arg}\,(z)$.
- *Logaritmus jako PF* — Mimo polopřímku nespojitosti je $\mathrm{Ln}\,(z)$ primitivní funkcí k $\frac{1}{z}$
- *Hlavní větev logaritmu* — Hlavní větev Logaritmu se standardně definuje skrze $\mathrm{Arg}\,(z) := t \in (-\pi; \pi]$, polopřímka nespojitosti pak vychází na $\mathbb{R}_0^-$, Takto zvolená větev nám pak pro $x \in \mathbb{R}^+$ dává známý logaritmus $\ln(x)$
- *Vedlejší větev logaritmu* — Nic nám ale nebrání zvolit si t pro $\mathrm{Arg}\,(z)$, často pak dostaneme polopřímku nespojitosti mimo reálnou osu v komplexní rovině.

Logaritmus jako inversní funkce k exponenciále v $\mathbb{C}$

$$e^z = w = |w|\, e^{i\mathrm{Arg}\,(w)} \quad \Leftrightarrow \quad z = \mathrm{Ln}\,|w| + \mathrm{Ln}\,(e^{i\mathrm{Arg}\,(w)}) = \underbrace{\ln|w|}_{\text{„klasický" logaritmus}} + i\mathrm{Arg}\,(z)$$

Př.: $\mathrm{Ln}\,(-1) = \ln|-1| + i\pi = \ln(1) + i\pi = i\pi$

Př.: $\mathrm{Ln}\,(i) = \ln|i| + i\dfrac{\pi}{2} = \ln(1) + i\dfrac{\pi}{2} = i\dfrac{\pi}{2}$ závěr ... ryze imaginární výsledek, vychází pro $|z| = 1$

Obecná mocnina

Zavedení pro $z \neq 0$: $z^a := e^{a\mathrm{Ln}\,(z)} = e^{a(\ln|z| + i\mathrm{Arg}\,(z))}$ obecná mocnina závisí na volbě větve Logaritmu

Jak již bylo zmíněno, větve $\mathrm{Ln}\,(z)$ jsou spojité na oblasti bez příslušných polopřímek nespojitosti (např. pro $(-\pi, \pi]$ je to oblast spojitosti $\mathbb{C} \setminus \{t; t \leq 0\}$

Dokonce jsou zde věte $\mathrm{Ln}\,(z)$ holomorfní a platí $(\mathrm{Ln}\,(z))' = \frac{1}{z}$

Je ale potřeba dávat pozor při přechodu polopřímek nespojitosti.

! Obecně: $\mathrm{Ln}\,(z_1 z_2) \neq \mathrm{Ln}\,(z_1) + \mathrm{Ln}\,(z_2)$
Avšak! $\exists k \in \mathbb{Z}:\ \mathrm{Ln}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\,(z_1) + \mathrm{Ln}\,(z_2) + 2k\pi i$ **!**

Případy:

- $a \in \mathbb{Z}$ ... z^a klasické násobení $\rightarrow$ jednoznačná funkce
- $a \notin \mathbb{Z}$ ... víceznačná funkce

Příklady:

$$\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,(z)} = e^{\frac{1}{2}(\ln|z| + i\arg z)} = \sqrt{|z|}\cdot e^{i\frac{\arg z}{2}}; \quad \frac{\arg z}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{Arg}\, z + k\pi, \ \ k \in \{0; 1\}$$

$$\sqrt{-1} = 1 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = \pm i$$

Ku výpočtu vyšších odmocnin využíváme **Moivreovy věty**

$$(\cos(z) + i\sin(z))^n = \cos(nz) + i\sin(nz)$$

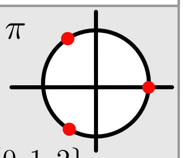
která vychází z vlastností komplexní exponenciály a (Eulerova vzorce)

$$(\,\mathrm{e}^{i\varphi})^n = \mathrm{e}^{i\varphi n}$$

Např:

$z^3 = -1 \to \sqrt[3]{(-1)}$

$\alpha = \pi$



$k = \{0, 1, 2\}$

a jmenovitě pak: $$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

kde $k \in 0, \dots, n-1$; α určíme z pravé strany rovnice

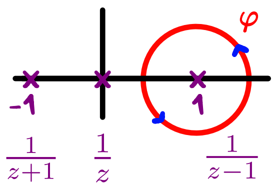
Kompaktnější zápis: $$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[\exp\left(i\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right)\right]$$

2.3.3 Řešené příklady (křivkový integrál)

Příklad 1

Zadání: $\displaystyle\int_\varphi \frac{1}{z\,(z^2-1)}\,\mathrm{d}z$, kde integrační křivka φ je zadána v (a), (b), (c)

(a) $\varphi(t) = 1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{it} \quad t \in [0; 2\pi]$



Parciální zlomky: $$\int_\varphi \frac{1}{z\,(z^2-1)}\,\mathrm{d}z = \int_\varphi \frac{A}{z} + \int_\varphi \frac{B}{z-1} + \int_\varphi \frac{C}{z+1}$$

$$1 = A\left(z^2-1\right) + Bz(z+1) + Cz(z-1)$$

$$\Rightarrow \quad A = -1; \quad B = \frac{1}{2}; \quad C = \frac{1}{2}$$

$$\int_\varphi \frac{1}{z\,(z^2-1)}\,\mathrm{d}z = -\underbrace{\int_\varphi \frac{1}{z}}_{\substack{0\\ \downarrow}} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_\varphi \frac{1}{z+1}}_{\substack{0\\ \downarrow}} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_\varphi \frac{1}{z-1}}_{2\pi i} = \boxed{\pi i}$$

první dva $\int = 0$ z (Cauchyho věty): funkce je v dané oblasti holomorfní

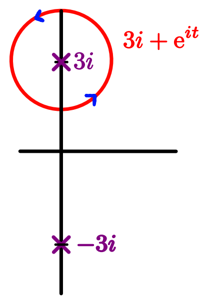
(b) $\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{it} \qquad \Rightarrow \qquad -2\pi i + 0 + 0 = -2\pi i$

(c) $\varphi = -1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{it} \qquad \Rightarrow \qquad 0 + \frac{1}{2}2\pi i + 0 = \pi i$

Příklad 2

Zadání: $\displaystyle\int_\varphi \frac{1}{z^2+9}\,\mathrm{d}z\,,\qquad \text{kde } \varphi = 3i + \mathrm{e}^{it},\quad t\in[0;2\pi]$

✓ ***Řešení:***



Parciální zlomky: $\displaystyle\int_\varphi \frac{1}{z^2+9}\,\mathrm{d}z = \int_\varphi \frac{A}{z+3i}\,\mathrm{d}z + \int_\varphi \frac{B}{z-3i}\,\mathrm{d}z$

$$1 = A(z-3i) + B(z+3i)$$

$$\Rightarrow\quad A = \frac{1}{6}i \quad B = -\frac{1}{6}i$$

$$\int_\varphi \frac{\frac{1}{6}i}{z+3i} + \int_\varphi \frac{-\frac{1}{6}i}{z-3i} = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{6}i}{z+3i} + \int_0^{2\pi} \frac{-\frac{1}{6}i}{z-3i} = \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{6}i}{3i+\mathrm{e}^{it}+3i}\, i\,\mathrm{e}^{it}}_{\substack{=0,\\ \text{splněny předpoklady}\\ \text{(Cauchyho věty)}}} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{-\frac{1}{6}i}{\cancel{3i}+\cancel{\mathrm{e}^{it}}-\cancel{3i}}\, i\,\cancel{\mathrm{e}^{it}}}_{-\frac{1}{6}i2\pi i} = \boxed{\frac{1}{3}\pi}$$

Příklad 3

Zadání: Vypočtěte $\displaystyle I = \int_C \frac{z\,\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{z^2+4}$, kde C je kladně proběhnutá kružnice o středu $2i$ a poloměru 2.

✓ ***Řešení:***

$$\int_\varphi \frac{z\,\mathrm{e}^z}{z^2+4}\,\mathrm{d}z\,;\qquad \varphi(t) = 2i + 2\,\mathrm{e}^{it}$$

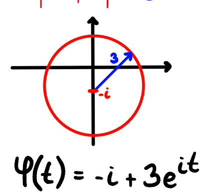
Parciální zlomky: $\displaystyle \frac{z}{z^2+4} = \frac{A}{z+2i} + \frac{B}{z-2i}$

$$\Rightarrow\quad A = \frac{1}{2};\ B = \frac{1}{2}$$

$$\int_\varphi \frac{z\,\mathrm{e}^z}{z^2+4}\,\mathrm{d}z = \underbrace{\int_\varphi \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^z}{z+2i}}_{\substack{=0\\ \text{(Cauchyho věta)}}} + \int_\varphi \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^z}{z-2i} = \text{(C. vzorec)} = 2\pi i\, f(z_0) = 2\pi i\,\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2i} = \boxed{\pi i\,\mathrm{e}^{2i}}$$

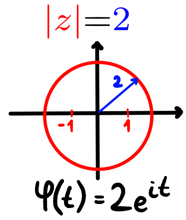
Příklad 4

Zadání: Vypočtěte



a) $\displaystyle\int_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i}\,\mathrm{d}z = \text{(C. vzorec)} = 2\pi i\,\sin(-i) = -2\pi i\,\sin(i) = \boxed{2\pi\sinh(1)}$

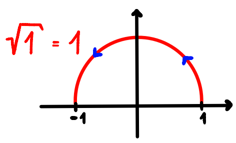
b) $\displaystyle\int_\varphi \frac{\mathrm{e}^z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z \;=\int \mathrm{e}^z\left(\frac{\frac{1}{2}}{z+1}-\frac{\frac{1}{2}}{z-1}\right) = 2\pi i \underbrace{\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^1-\frac{1}{2}e^{-1}\right]}_{\substack{\text{z definice sinh(z)}\\ \text{kde } z=1}} = \boxed{2\pi i\sinh(1)}$



Příklad 5

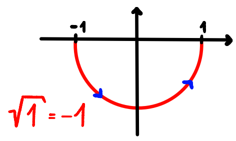
Zadání: Vypočíst $\displaystyle\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$, φ je polokružnice $|z|=1$, z bodu $(1,0)$ do $(-1,0)$ přes horní polorovinu $\sqrt{1}=1$

✓ ***Řešení:***



$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{it} \qquad t\in[0;\pi]$$
$$\varphi'(t) = i\,\mathrm{e}^{it}$$
$$\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{it}}}i\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t \;= i\int_0^\pi \sqrt{\mathrm{e}^{it}}\,\mathrm{d}t \;= i\left[\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}it}}{\frac{1}{2}i}\right]_0^\pi = -2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}i\pi}-\mathrm{e}^0\right) = \boxed{2(1-i)}$$

Pro spodní polorovinu:



$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{it} \qquad t\in[\pi;2\pi]$$
$$\varphi'(t) = i\,\mathrm{e}^{it}$$
$$i\int_{2\pi}^{\pi} \sqrt{\mathrm{e}^{it}}\,\mathrm{d}t \;= -2\left(\mathrm{e}^{\pi i}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}i\pi}\right) = \boxed{2(1+i)}$$

Poznámka: Výsledky se liší o i: $2(1-i)\cdot i = 2(1+i)$

Příklad 6

Zadání: Vypočtěte $\displaystyle\int_\varphi \ln(z)\,\mathrm{d}z$, φ je kružnice $|z|=1$, $\ln 1 = 0$

Poznámka: Komplexní logaritmus $\ln z$ je nekonečně značná funkce, upřesňujeme $\ln(1)=0$

✓ ***Řešení:*** $\varphi = \mathrm{e}^{it}$, $t\in[0;2\pi]$

$$\int_\varphi \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z\,\mathrm{d}z \;= \int_0^{2\pi} (\overbrace{\ln|\,\mathrm{e}^{it}|}^{0} + i\,\mathrm{Arg}\;\mathrm{e}^{it})\;i\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t \;= \int_0^{2\pi} -t\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t \overset{p.p.}{=\!=} \left[\begin{array}{ll} g=t & f'=1 \\ g=\mathrm{e}^{it} & g=\frac{1}{i}\,\mathrm{e}^{it}\end{array}\right] =$$
$$= -\left[\frac{t}{i}\,\mathrm{e}^{it}\right]_{t=0}^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{1}{i}\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t \;= 2\pi i + \left[\frac{\mathrm{e}^{it}}{i}\right]_{t=0}^{2\pi} = \boxed{2\pi i}$$

2.4 Mocninné a Laurentovy řady

Definice 3 (Laurentova řada).

Nechť f holomorfní v Ω, střed $z_0 \in \Omega$, kruh konvergence mocninné řady $B_R(z_0) \subset \Omega$.

Pak $\exists!$ (právě jedna) posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, taková, že:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \forall B_R(z_0)$$

Navíc $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$, kde $C_r(z_0)$ je kružnice o poloměru r a středu z_0

Důsledky:

1. $z = a :$ $\quad \forall n \geq 1 \ldots (z-a)^n = 0$

   $n = 0 \ldots (z-a)^n = 1 \quad \ldots \quad f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma_r} \frac{f(r)}{r - a}\,\mathrm{d}r \quad \ldots$ Cauchyho vzorec

2. $\forall n \geq 0 :$ $\quad f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \quad \Rightarrow$ **Má-li f první derivaci, pak má všechny**

Věta 10. *Hlavní a regulární část Laurentovy řady*

Nechť f holomorfní na $B_{a,b}(z_0)$ Pak $\exists!$ (právě jeden) systém $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, takový, že:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \underbrace{\lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{-1} a_n (z - z_0)^n}_{\text{hlavní část}} + \underbrace{\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n (z - z_0)^n}_{\text{regulární část}} \qquad \forall z \in B_{a,b}(z_0)$$

Navíc $\Big(\forall n \in \mathbb{Z}\Big)\Big(\forall r \in (a,b)\Big) : \qquad a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$

Značení: $\quad B_{a,b}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : a < |z - z_0| < b\} \ldots$ otevřené mezikruží s poloměry $a < b$

Residuum:

Pro $a = 0,\ b > 0$ definujeme $\quad a_{-1} := \mathrm{Res}_{z_0} f \ldots$ residuum f v bodě z_0

Pro $b = \infty$ definujeme $\quad -a_{-1} := \mathrm{Res}_{\infty} f \ldots$ residuum f v ∞

Vzoreček: Laurentova řada v 0 a v ∞

$f(z)$ jest holomorfní v $\infty \quad \Leftrightarrow \quad f\left(\frac{1}{z}\right)$ je holomorfní v 0

Laurentova řada funkce f se středem v $\infty \quad \equiv \quad$ Laurentova řada funkce $f\left(\frac{1}{z}\right)$ v 0

$$\frac{1}{|z|} < \frac{1}{r} \quad \Leftrightarrow \quad |z| > r$$

Platí:

Má-li f v bodě z_0 izolovanou singularitu $\equiv f$ je holomorfní na $B_{0,b}(z_0)$ pro nějaké $b > 0$ (není definovaná v z_0)
$\Leftrightarrow \quad f$ má LŘ v bodě z_0 s poloměrem konvergence b

Příklad

Zadání: Určete Laurentovu řadu funkce $f(z) = \frac{1}{z}$ v bodě $z_0 = 0$

✓ ***Řešení:*** V bodě $z_0 = 0$ je $f(z) = \frac{1}{z}$ svou vlastní LŘ

Příklad

Zadání: Určete Laurentovu řadu funkce $f(z) = \frac{1}{z-2}$

a) v bodě $z_0 = 0$ b) v bodě $z_0 = \infty$

✓ ***Řešení:***

a) $z_0 = 0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\frac{1}{z-2}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

$$\boxed{n \leq -1} \quad \to \quad n+1 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \int \underbrace{\frac{1}{z-2} z^{-(n+1)}}_{\text{holomorfní}}\,\mathrm{d}z \underset{\text{(Cauchyho věta)}}{\overset{\uparrow}{=}} 0 \qquad \Rightarrow \ \textbf{hlavní část} = 0$$

Pro $\boxed{n \geq 0}$ můžeme použít

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = -1(0-2)^{-2} + \frac{1}{2}2(0-2)^{-3} + \frac{1}{6}(-6)(0-2)^{-4} \ldots = (-1)^n(-2)^{-n-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} z^n$$

b) $z_0 = \infty$

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\frac{1}{z}-2} = \frac{z}{1-2z}$$

$$a_n = 2\pi i \int_{C_r(z_0)} \frac{z}{1+2z}\frac{1}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \int \frac{1}{(1-z)z^n} = 0 \qquad \text{pro } n \leq 0 \ (g(0) = 0)$$

$$g'(z) = \frac{1}{(1-2z)^2}, \quad g''(z) = \frac{4}{(1-2z)^3}, \quad g^{(3)} = \frac{24}{(1-2z)^4}, \quad \Rightarrow g^{(n)} = \frac{n!\,2^{n-1}}{(1-2z)^{n+1}} \quad \Rightarrow a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = 2^{n-1}$$

LŘ pro g v 0 je $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot z^n$; konverguje stejnoměrně pro $|z| < \frac{1}{2}$ a platí: $g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m-1} z^m$ pre $|z| < \frac{1}{2}$

LŘ pro f v ∞ je $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot z^{-n} = \sum_{n=-1}^{-\infty} 2^{-n+1} \cdot z^n$ konverguje stejnoměrně pro $|x| > 2$

Příklad

Zadání: Určete Laurentovu řadu funkce $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$

a) v bodě $z_0 = i$ b) v bodě $z_0 = \infty$

✓ ***Řešení:***

Pro $\boxed{\forall n \leq -3}$ bude $a_n = 0$

Pro $\boxed{n \geq -2}$ $\underbrace{\frac{-\frac{1}{4}}{(z-i)^2} + \frac{\frac{i}{4}}{(z-i)}}_{\text{hlavní část}} + \underbrace{\frac{-\frac{i}{4}}{(z+i)^2} + \frac{-\frac{i}{4}}{(z+i)}}_{\text{regulární část}}$ $\rightarrow$ Taylor (derivujeme!)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(r+i)^2}\frac{1}{(r-i)^{2+n+1}}\,\mathrm{d}r \quad \ldots \underline{\underline{=0}} \quad \text{pro } \boxed{n \leq -3} \text{ (integrant holomorfní)}$$

$$\gamma = i + e^{it} \quad a_{-2} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(r+i)^2}\frac{1}{(r-i)}\,\mathrm{d}r = -\frac{1}{4} \leftarrow \text{(Cauchyův vzorec)}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(r+i)^2}\frac{1}{(r-i)^2}\,\mathrm{d}r = \ldots = 2\pi i\left\{\left[\frac{1}{(r+i)^2}\frac{-1}{(r-i)}\right]_\gamma + \int_\gamma \frac{-2}{(r+i)^3}\frac{-1}{(r-i)}\,\mathrm{d}r\right\} = \frac{1}{4i}$$

Podobně $\boxed{\forall n \geq -2}$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(r+i)^2}\frac{1}{(r-i)^{n+3}}\,\mathrm{d}r = \ldots = \frac{1}{2\pi i}\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots(n+3)}{(n+2)(n+1)\ldots 1}\int_\gamma \frac{1}{(r+i)^{n+4}}\frac{1}{(r-i)}\,\mathrm{d}r = \frac{n+3}{2^{n+4}}i^n$$

Sčítací trik:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{(z-i+2i)^2} = \frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{(2i)^2\left(\frac{z-1}{2i}+1\right)^2} \qquad \downarrow\left[\frac{1}{1+q} = \sum_{n=0}^{\infty}(-q)^n\right]\downarrow$$

$$f(z) = \frac{-1}{4(z-i)^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(2i)^n}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2i}\right)^n(z-i)^{n-1}\right)^2$$

$$f(z) = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^n(z-i)^{m-1}\cdot\left(\frac{i}{2}\right)^{n-m}(z-i)^{n-m-1}$$

$$f(z) = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{i}{2}\right)^n(z-i)^{n-2} = \sum_{n=-2}^{\infty}(n+3)\frac{i^n}{2^{n+4}}(z-i)^n$$

2.5 Residuová věta

3 typy singularit

- **Odstranitelná singularita**
- **Pól**
- **Podstatná singularita**

Rozlišení z hlediska limity, kde z_0 je bodem singularity:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) \begin{cases} \exists \text{ vlastní } (\in \mathbb{C}) & \Leftrightarrow\ f \text{ má v } z_0 \text{ odstranitelnou singularitu} \\ \exists \text{ nevlastní } (= \infty) & \Leftrightarrow\ f \text{ má v } z_0 \text{ pól (libovolné násobnosti)} \\ \text{neexistuje} & \Leftrightarrow\ f \text{ má v } z_0 \text{ podstatnou singularitu} \end{cases}$$

Odstranitelná singularita

- Hlavní část LŘ je nulová ($\forall n \leq -1 : c_n = 0$)
- f je možné v bodě z_0 dodefinovat holomorfně
- Např.: $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{z^2-1}{z-1} = 2$ v bodě $z_0 = 1$

Pól

- Pól násobnosti n ($\forall n < -n : c_n = 0$)
- LŘ $= \displaystyle\sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$
- Např.: $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2}$ v bodě $z_0 = 2$ má pól násobnosti 2

Podstatná singularita

- Má nekonečně mnoho nenulových členů v hlavní části LŘ
- Např. $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2!\,z^2} + \dfrac{1}{3!\,z^3} + \dots \qquad \Rightarrow$ má podstatnou singularitu v 0

Pojmy:

- *k-násobný kořen* — z_0 je k-násobný kořen f,
  je-li $f^{(n)}(z_0) = 0$ pro $n = 0, 1, \dots, k-1 \quad$ a $\quad f^{(k)} \neq 0$
  $\Leftrightarrow\ \exists g$ holomorfní v z_0, $g(z_0) \neq 0$ tak, že $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ v okolí z_0
- *k-násobný pól* — f má v z_0 k-násobný pól,
  $\Leftrightarrow\ \exists h$ holomorfní v z_0, $h(z_0) \neq 0$ tak, že $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-z_0)^k}$ na prst. okolí z_0
  $\Rightarrow$ LŘ f začíná výrazem $\dfrac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$

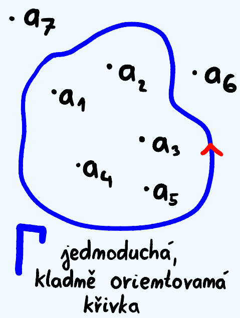
Věta 11 (Residuová věta). *(Res. V.)*

Residuová věta, konečná varianta

Nechť Γ je kladně orientovaná po částech C^1 křivka, $k \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \operatorname{Int}\Gamma$.

f holomorfní na $\Gamma \subset \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ a spojitá na $\overline{\Gamma} \subset \{a_1, \ldots, a_k\}$

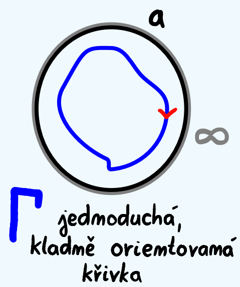
Pak
$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f \qquad (✠)$$



Residuová věta pro ∞

Nechť f holomorfní na $\operatorname{Ext}\Gamma$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Ext}\Gamma}$

Pak
$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{\infty} f \qquad (\bowtie)$$



Poznámka:

Chceme vždy mít singularitu po levé ruce při oběhu. Proto se zdánlivě otočí směr obíhání pro residuum v ∞ a jako důsledek nám vypadne mínus.

O součtu residuí

Zkombinováním konečného případu a residua v ∞ dostaneme: $\operatorname{Res}_\infty f + \sum_a \operatorname{Res}_a f = 0$

Dodatky k výpočtu residua v ∞:

Dodatek 1: Jest-li $|f(z)| \le \dfrac{C}{|z|^2}$ pro $|z| \ge R$, pak $\operatorname{Res}_\infty f = 0$

Dodatek 2: Má-li f v ∞ pól násobnosti nejvýše k, pak $\operatorname{Res}_\infty f = \lim_{z\to\infty} (-1)^k \dfrac{1}{(k+1)!} \left(z^{k+2} f^{(k+1)}(z)\right)$

Poznámka:

Exponent v kulaté závorce, např. $f^{(k+1)}$ označuje stupeň derivace (zde $k+1$)

Vzorečky: Pravidla pro výpočet residuí (v bodě a) (Pravidla)

$\boxed{0}$ $\operatorname{Res}_a f = c_{-1}$ ($\leftarrow$ koeficient Laurentovy řady)

$\boxed{1}$ f má v a odstranitelnou singularitu $\Rightarrow$ $\operatorname{Res}_a f = 0$

$\boxed{2}$ f má v a pól násobnosti (nejvýše) $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Res}_a f = \lim_{z\to a} \dfrac{1}{(n-1)!} \left(f(z)(z-a)^n\right)^{(n-1)}$

$\boxed{3}$ *speciálně:* f má v a pól násobnosti 1 $\Rightarrow$ $\operatorname{Res}_a f = \lim_{z\to a} f(z)(z-a)$

$\boxed{4}$ *speciálně:* f a g jsou holomorfní na okolí a, $g(a) = 0$; $g'(a) \ne 0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Res}_a \left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{f(a)}{g'(a)}$

$\boxed{5}$ *speciálně:* f holomorfní na okolí a, g má v a pól násobnosti 1 $\Rightarrow$ $\operatorname{Res}_a(fg) = f(a)\operatorname{Res}_a(g)$

Jordanovo lemma a LOOPN1 - verse pro residua

Jordanovo lemma (reformulace pro výpočet residua)

Nechť pro nějaké $R \geq 0$ je $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z \geq 0\} \cap \{z \in \mathbb{C}; |z| \geq R\}$ a nechť f je spojitá na Ω.

Označíme Γ_R křivku $z = R\,\mathrm{e}^{it}$; $\quad t \in [0, \pi]$ a $\max\limits_{\langle \Gamma_R \rangle} |s|$.

Pokud nastane jedem z případů:

a) $\alpha = 0 \quad \wedge \quad RM_R \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$

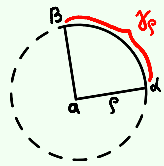
b) $\alpha > 0 \quad \wedge \quad M_R \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Potom: $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{e}^{i\alpha z}\,\mathrm{d}z \underset{R\to+\infty}{\to} 0$

Lemma o obcházení pólů násobnosti 1 (LOOPN1) (pro výpočet residua)

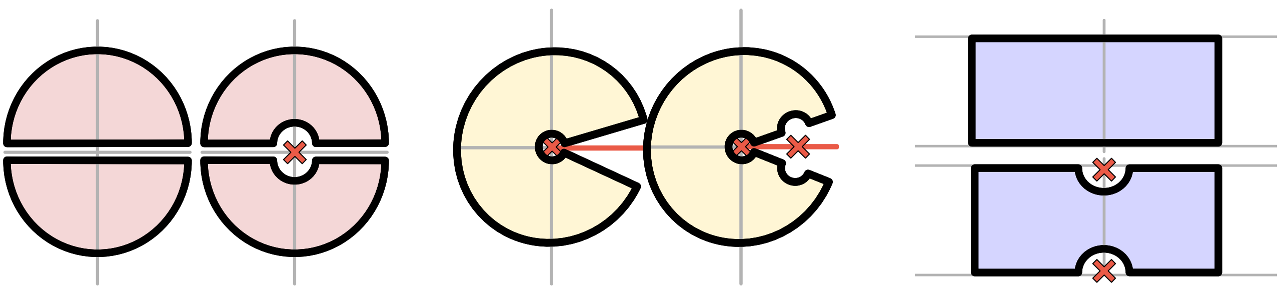
Nechť f má v bodě a pól násobnosti 1. $\qquad 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 2\pi; \quad 0 < \rho < r;$

$\gamma_\rho = a + \rho\,\mathrm{e}^{it}, \quad t \in [\alpha, \beta]$



Potom : $\displaystyle\lim_{\rho\to 0^+} \int_{\gamma_\rho} f = (\beta - \alpha)i \cdot \operatorname{Res}_a f$

Příklady základních integračních kontur



půlkružnice — „pacman” — „žiletka”

Typy integrálů

Při výpočtu residuí rozdělujeme integrály do následujících typů dle způsobu řešení a použitých integračních kontur, podrobněji viz následující kapitola 2.5.1 Řešené příklady (residuovka):

A) Přímý výpočet

B) Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

C) Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\alpha x} R(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}x$ alias „ sin a cos”

D) Integrály typu $\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$ alias „pacman a čínka”

E) Integrály typu $\int_0^{\infty} f(x)\log(x)\,\mathrm{d}x$ alias „logaritmus”

F) Integrály obsahující exponenciálu alias „žiletka”

2.5.1 Řešené příklady (residuovka)

A) Přímý výpočet

Příklad

Zadání: Vypočítejte následující integrál: $\displaystyle\int_{\varphi} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}$,
kde $\varphi : x^2+y^2=2x$ je kladně orientovaná křivka

✓ ***Řešení:***

- Vyjádříme si křivku φ ve známém tvaru

$$\begin{aligned} \varphi: &\quad x^2-2x+1+y^2=1 \\ \varphi: &\quad (x-1)^2+y^2=1 \end{aligned}$$

- Nalezneme singularity funkce $f(z)$

$$\text{singularity funkce } f(z)=\frac{1}{z^4+1} \quad \Rightarrow \quad \text{hledáme kořeny polynomu } z^4+1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[4]{-1}=\{z_0,z_1,z_2,z_3\}$$

- Pro nalezení singularit potřebujeme nalézt kořeny komplexní odmocniny

$$z^4=-1 \quad \Leftrightarrow \quad z=\sqrt[4]{-1}$$

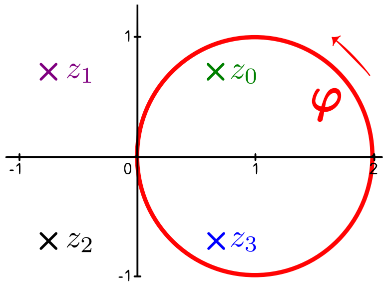
1. krok: Zjistit úhel cílového čísla, zde $-1 \quad \rightarrow \quad \varphi=\pi$
2. krok: Převést do exponenciálního tvaru: $\sqrt[4]{|z|}\,\mathrm{e}^{i\frac{\varphi}{4}} = \sqrt[4]{z\cdot\bar{z}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$
3. krok: Hledání kořenů ve tvaru: $\mathrm{e}^{i\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{2\pi k}{4}\right)}$

$$k=0,1,2,3: \qquad z_{0,1,2,3}=\left\{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\pi i};\ \mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi i};\ \mathrm{e}^{\frac{5}{4}\pi i};\ \mathrm{e}^{\frac{7}{4}\pi i}\right\}$$

Singularity fce $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}\ \ldots\ \sqrt[4]{-1}=\left\{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\pi i};\ \mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi i};\ \mathrm{e}^{\frac{5}{4}\pi i};\ \mathrm{e}^{\frac{7}{4}\pi i}\right\}$

$\rightarrow$ jen 2 leží v kružnici φ

$$\Rightarrow \int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\pi i})+\mathrm{Res}(f,\ \mathrm{e}^{\frac{1}{4}\pi i})\right]$$



$$\mathrm{Res}\left(f,\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\pi i}\right)=\lim_{z\to \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}}\left(\frac{z-\ \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}}{z^4+1}\right)=\lim_{z\to \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}}\frac{z-\ \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}}{\underbrace{(1+iz^2)}_{\to 2}(1-iz^2)}\rightarrow\left[\left.\begin{matrix} z\rightarrow\ \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i} \\ t\rightarrow 0\end{matrix}\right\}z=t+\ \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}\right]\rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{t}{1-i\left(t+\ \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\cancel{1}-it^2-2it\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}-\cancel{i\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}i}}}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{1}{-i\left(t+2\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}\right)}=\boxed{\frac{i}{4}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}}$$

$$\mathrm{Res}\left(f,\ \mathrm{e}^{\frac{1}{4}\pi i}\right)=\lim_{z\to \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}}\left(\frac{z-\ \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}}{z^4+1}\right)=\lim_{z\to \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}}\frac{z-\ \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}}{(1+iz^2)\underbrace{(1-iz^2)}_{\to 2}}\rightarrow\left[\left.\begin{matrix} z\rightarrow\ \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i} \\ t\rightarrow 0\end{matrix}\right\}z=t+\ \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}\right]\rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{t}{1+i\left(t+\ \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\cancel{1}+it^2+2it\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}+\cancel{i\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}i}}}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{1}{i\left(t+2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}\right)}=\boxed{-\frac{i}{4}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}}$$

Celkem: $$\boxed{\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left[\frac{i}{4}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}-\frac{i}{4}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}\right]=\frac{\pi}{2}\left(-i\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}}$$

(Další příklady výpočtu komplexní odmocniny v sekci 2.7 Poznámky a početní tríčky)

Příklad

Zadání: Vypočítejte následující integrál: $I := \displaystyle\int_{C_2(0)} \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$

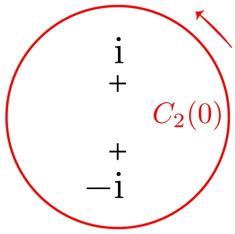
✓ ***Řešení:***

Použijeme (Residuovou větu) v kombinaci s (Pravidly pro výpočet residuí).

- funkce $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1}{(z-i)(z+i)}$ je **holomorfní** na $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$
- v bodech $-i$ a i má jednoduché póly
- oba body $-i$ a i se vyskytují ve vnitřku křivky $C_2(0)$, proto se oba budou podílet na hodnotě integrálu I

Výpočet křivkového integrálu z funkce $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ přes kružnici $C_2(0)$.

Obě izolované singularity se nalézají uvnitř kruhu, proto se obě podílí na hodnotě integrálu.



Podle (4. pravidla pro výpočet residuí):

$$\operatorname{Res}_{-i} \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(1+z^2)'\big|_{z=-i}} = \frac{1}{2z|_{z=-i}} = \frac{1}{-2i} = -\frac{1}{2i}$$

$$\operatorname{Res}_{i} \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(1+z^2)'\big|_{z=i}} = \frac{1}{2z|_{z=i}} = \frac{1}{2i}$$

Proto (Residuová věta) dává

$$\boxed{I = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{-i} \frac{1}{1+z^2} + \operatorname{Res}_{i} \frac{1}{1+z^2}\right) = 2\pi i \left(-\frac{1}{2i} + \frac{1}{2i}\right) = 0}$$

Poznámka:

$C_2(0)$ znamená kružnici o poloměru 2 a středu v bodě 0

Poznámka 2:

Postupovat jsme také mohli přes (Reziduovou větu pro reziduum v nekonečnu) kombinovanou společně s **Dodatek** 2 (platí $\operatorname{Res}_\infty \frac{1}{1+z^2} = 0$).

Takový přístup by byl obzvlášť výhodný při počítání integrálu:

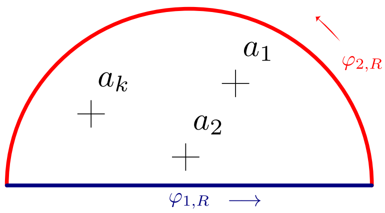
$$\int_{C_2(0)} \frac{1}{1+z^n}\,\mathrm{d}z \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \text{ pokud by } n \text{ bylo velmi velké číslo}$$

B) Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

Předpokládejme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **spojitá na reálné ose** a je ji možné **rozšířit na komplexní** funkci $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, která je holomorfní na množině $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ (přičemž všechny body $a_1, \dots, a_k$ leží v horní polorovině). Budeme zde kombinovat (Residuovou větu) a (Jordanovo lemma)

Definujme křivky

$$\varphi_{1,R}(t) = t + i0 \quad \text{pro } t \in [-R, R],$$
$$\varphi_{2,R}(t) = Re^{it} \quad \text{pro } t \in [0, \pi]$$
$$\text{a} \qquad \varphi_R := \varphi_{1,R} \oplus \varphi_{2,R}$$



Obrázek: Výpočet reálného integrálu přes interval $(-\infty, \infty)$ pomocí integrace přes horní půlkruh.

Jsou-li nyní splněny předpoklady (Jordanova lemmatu), dostáváme pro všechna $R > \max\{|a_1|, \dots, |a_k|\}$

$$2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f = \int_{\varphi_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_{1,R}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad \overset{R\to+\infty}{\to} (\mathcal{N}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + 0$$

Příklad

Zadání: Vypočítejte následující integrál: $\quad I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}\,\mathrm{d}x$

✓ ***Řešení:***

- funkce $f(z) = \frac{1}{1+z^6}$ je holomorfní všude na $\mathbb{C}$ až na šest bodů $\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{6}+j\frac{\pi}{3}\right)}$, kde $j \in \{0, 1, \dots, 5\}$
- ve zmíněných šesti bodech má **jednoduché póly**
- z těchto bodů leží v horní polorovině **první tři**

V (Jordanově lemmatu) máme $\alpha = 0$. Proto potřebujeme odhadnout

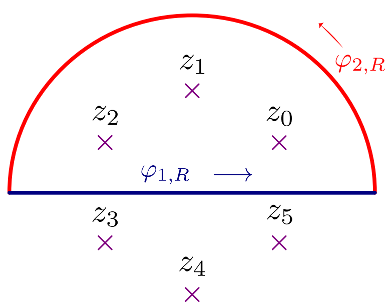
$$RM_R = R \max_{\langle\varphi_{2,R}\rangle} |f| \quad \leq \quad R\frac{1}{R^6 - 1} \overset{R\to+\infty}{\to} 0.$$

$\Rightarrow$ můžeme použít výše uvedený postup

- Potřebujeme však ještě spočítat rezidua odpovídající trojici bodů $\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{6}+j\frac{\pi}{3}\right)}$, kde $j \in \{0, 1, 2\}$. Ve všech případech použijeme (4. pravidla pro výpočet residuí) opírající se o vzorec $\frac{1}{(1+z^6)'} = \frac{1}{6z^5}$

Proto máme:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}} f + \operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)}} f + \operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{6}+2\frac{\pi}{3}\right)}} f \\
&= \frac{1}{6}\,\frac{1}{\mathrm{e}^{i5\frac{\pi}{6}}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{i5\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{i5\left(\frac{\pi}{6}+2\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-i\frac{5}{6}\pi} + \mathrm{e}^{-i\frac{15}{6}\pi} + \mathrm{e}^{-i\frac{25}{6}\pi} \\
&= \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-i\frac{5}{6}\pi} + \mathrm{e}^{-i\frac{1}{2}\pi} + \mathrm{e}^{-i\frac{1}{6}\pi} \\
&= \frac{1}{6} \cos\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = -\frac{i}{3}
\end{aligned}$$



Celkově dostáváme

$$\boxed{I = 2\pi \operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}} f + \operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)}} f + \operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{6}+2\frac{\pi}{3}\right)}} f = 2\pi i - \frac{i}{3} = \frac{2}{3}\pi}$$

Příklad

Zadání: Vypočítejte následující integrál: $I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$

✓ ***Řešení:***

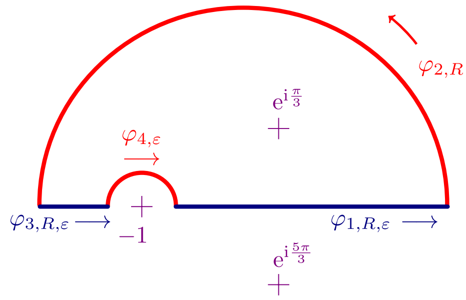
Uvedený integrál **neexistuje** jako Lebesgueův. **Existuje** však jako integrál ve smyslu hlavní hodnoty (p.v.)

- funkce $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$ je holomorfní všude na $\mathbb{C}$ až na tři body $\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{3}+j\frac{2\pi}{3}\right)}$, kde $j \in \{0,1,2\}$
- ve zmíněných třech bodech má **jednoduché póly**
- $z_0 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ leží **v horní polorovině**,
$z_1 = \mathrm{e}^{i\pi} = -1$ leží **na reálné ose**,
$z_2 = \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{3}}$ leží **ve spodní polorovině**
- aplikujeme postup z předchozího příkladu, nicméně musíme oběhnout singularitu na reálné ose (bod -1)

Zafixujme $R > 1, \varepsilon \in (0,1)$ a definujme křivky:

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,R,\varepsilon}(t) &= t + i0 && \text{pro } t \in [-1+\varepsilon, R]\\
\varphi_{2,R}(t) &= R\mathrm{e}^{it} && \text{pro } t \in [0,\pi]\\
\varphi_{3,R,\varepsilon}(t) &= t + i0 && \text{pro } t \in [-R, -1-\varepsilon]\\
\varphi_{4,\varepsilon}(t) &= -1 + \varepsilon\mathrm{e}^{i(\pi-t)} && \text{pro } t \in [0,\pi]
\end{aligned}$$

a $\qquad \varphi_{R,\varepsilon} := \varphi_{1,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{2,R} \oplus \varphi_{3,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{4,\varepsilon}$



Obrázek: Leží-li na reálné ose bod se singularitou, můžeme si vypomoci malou půlkružnicí.

Z (Residuové věty) máme

$$\int_{\varphi_{R,\varepsilon}} \frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}} \frac{1}{1+z^3} = 2\pi i \frac{1}{(1+z^3)'\big|_{z=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}} = 2\pi i \frac{1}{3z^2\big|_{z=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}} =$$
$$= 2\pi i \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-i\frac{2}{3}\pi} = \frac{2}{3}\pi i \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi i - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - i\frac{\pi}{3}$$

Nyní se budeme věnovat integraci přes jednotlivé křivky tvořící křivku $\varphi_{R,\varepsilon}$. Nejprve si povšimněme, že podle Tvrzení o obíhání části kružnice (LOOPN1) máme:

$$\int_{\varphi_{4,\varepsilon}} \frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z \overset{\varepsilon\to 0_+}{\to} -\pi \operatorname{Res}_{-1} \frac{1}{1+z^3} = -\pi i \frac{1}{(1+z^3)'\big|_{z=-1}} = \frac{-\pi i}{3(-1)^2} = -i\frac{\pi}{3}.$$

Dále (Jordanova lemmatu) $\left(\text{používáme } \max_{\langle\varphi_{2,R,e}\rangle} |f| \le \frac{1}{R^3-1}\right)$ platí $\int_{\varphi_{2,R}} \frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z \overset{R\to+\infty}{\to} 0$

Nyní si povšimněme, že pro všechna $\xi > 0$ existují $R > 1$ tak velké a $\varepsilon \in (0,1)$ tak malé, že

$$\left|\ \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x - \int_{\varphi_{1,R,\varepsilon}} \frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z - \int_{\varphi_{3,R,\varepsilon}} \frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z \right| < \xi$$

Celkově jsme proto dostali: $\boxed{\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - i\frac{\pi}{3} - -i\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}}$

Poznámka: Přístup, který jsme si zde ukázali, je často možné s menšími či většími modifikacemi používat i při integraci přes interval $(0,\infty)$. Asi nejsnazší je situace, když je funkce sudá. Tehdy můžeme psát

$$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

C) Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\alpha x} R(x)\,\mathrm{d}x$ alias „sin a cos"

Pro tento typ integrálů najdeme uplatnění při počítání **Fourierovy transformace**, ale i při čistě reálné integraci, neboť $\boxed{\cos(\alpha x) = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{i\alpha x}}$ a $\boxed{\sin(\alpha x) = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{i\alpha x}}$.

kde předpokládáme: $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q jsou polynomy, polynom Q **není** identicky nulový a st$P <$ st$Q$

Poznámka: U polynomu Q můžeme mít kořeny prvního stupně, při jejich přítomnosti si můžeme vypomoci malými obloučky a integrál chápat jako *integrál ve smyslu hlavní hodnoty.*

Základní schéma řešení si ukažme na jednoduchém případě, kdy polynom Q nemá reálné kořeny.

$$\text{Položme } f(z) := \mathrm{e}^{i\alpha z} \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Je-li $\alpha > 0$, volíme křivky:

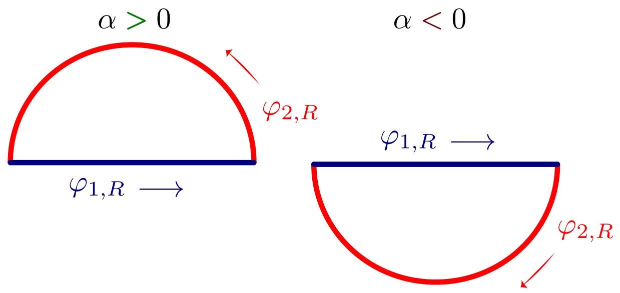
$$\varphi_{1,R}(t) = t + i0 \qquad \text{pro } t \in [-R, R]$$
$$\varphi_{2,R}(t) = R\mathrm{e}^{it} \qquad \text{pro } t \in [0, \pi]$$

a pak zavádíme $\varphi_R := \varphi_{1,R} \oplus \varphi_{2,R}$.

Pro $\alpha < 0$ volíme:

$$\varphi_{1,R}(t) = t + i0 \qquad \text{pro } t \in [-R, R]$$
$$\varphi_{2,R}(t) = R^{-it} \qquad \text{pro } t \in [0, \pi]$$

a pak opět položíme $\varphi_R := \varphi_{1,R} \oplus \varphi_{2,R}$.



Obrázek: Volba křivky v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Pozor, pro $\alpha < 0$ se jedná o obíhání v záporném smyslu.

Pak:
$$\int_{\varphi_{1,R}} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{R\to+\infty}{\to} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\alpha x} R(x)\,\mathrm{d}x$$

Poznámka:

- Pokud st$P \le$ st$Q - 2$, vychází nám Lebesgueův integrál
- Pokud st$P =$ st$Q - 1$, integrál konverguje jen jako Newtonův (ne Lebesgueův) prostřednictvím Dirichletova kritéria

Z (Jordanova lemmatu) dále plyne
$$\int_{\varphi_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{R\to+\infty}{\to} 0$$

Jsou-li body $\{a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$ všechny kořeny polynomu Q, celkově jsme dostali (pozor na směr obíhání v případě $\alpha < 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\alpha x} R(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi i \sum_{\{j\in\{1,\dots,k\}:\operatorname{Im} a_j>0\}} \operatorname{Res}_{a_j} f & \text{pro } \alpha > 0 \\ -2\pi i \sum_{\{j\in\{1,\dots,k\}:\operatorname{Im} a_j<0\}} \operatorname{Res}_{a_j} f & \text{pro } \alpha < 0 \end{cases}$$

Modifikaci postupu a výsledku pro případ, že Q má i reálné kořeny, si ukážeme později.

Příklad

Zadání: Nechť' $a, b > 0$. Spočítejme Newtonův (či zobecněný Lebesgueův) integrál:

$$I := \int_0^\infty \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2}\, \mathrm{d}x.$$

✓ ***Řešení:***

Nejprve si povšimněme, že nám zde skutečně může pomoci právě probíraná metoda, neboť

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{x\mathrm{e}^{iax}}{x^2 + b^2}\, \mathrm{d}x$$

- Zaveďme komplexní funkci komplexní proměnné: $f(z) = \dfrac{z\mathrm{e}^{iaz}}{z^2 + b^2}$
- $f(z)$ je holomorfní na množině $\mathbb{C} \setminus \{-ib, ib\}$ a ve zmíněných dvou bodech má jednoduché póly.
- Protože $a > 0$, dostáváme

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{Im} 2\pi i \operatorname{Res}_{ib}\frac{z\mathrm{e}^{iaz}}{z^2 + b^2} = \frac{1}{2}\operatorname{Im} 2\pi i \frac{z\mathrm{e}^{iaz}}{(z^2 + b^2)'}\bigg|_{z=ib} = \frac{1}{2}\operatorname{Im} 2\pi i \frac{z\mathrm{e}^{iaz}}{2z}\bigg|_{z=ib} = \frac{1}{2}\operatorname{Im} \pi i\mathrm{e}^{-ab} = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-ab}$$

Příklad

Zadání: Nechť $a, b > 0$. Spočítejme integrál ve smyslu hlavní hodnoty

$$I := \text{ p.v.} \int_0^\infty \frac{x \sin(ax)}{x^2 - b^2}\, \mathrm{d}x.$$

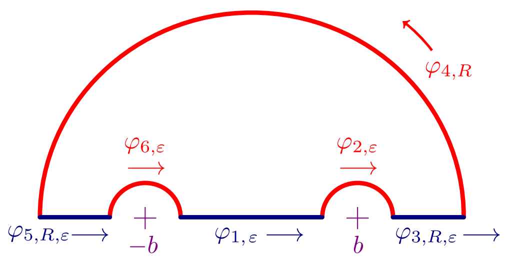
✓ ***Řešení:***

Vidíme, že nyní má integrand **póly na reálné ose** $\to \{-b, b\}$, které musíme vyjmout.

- Opět přepíšeme $\quad I = \dfrac{1}{2}\text{ p.v.}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin(ax)}{x^2 - b^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\text{ p.v.}\int_{-\infty}^\infty \frac{x\mathrm{e}^{iax}}{x^2 - b^2}\, \mathrm{d}x.$
- Nyní zafixujme $\varepsilon \in (0, b)$ a $R > 2b$.
- Položme $f(z) = \dfrac{z\mathrm{e}^{ia}z}{z^2 - b^2}$ a volme následující křivky:

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,\varepsilon}(t) &= t + i0 && \text{pro } t \in [-b+\varepsilon, b-\varepsilon] \\
\varphi_{2,\varepsilon}(t) &= b + \varepsilon\mathrm{e}^{i(\pi - t)} && \text{pro } t \in [0, \pi] \\
\varphi_{3,R,\varepsilon}(t) &= t + i0 && \text{pro } t \in [b+\varepsilon, R] \\
\varphi_{4,R}(t) &= R\mathrm{e}^{it} && \text{pro } t \in [0, \pi] \\
\varphi_{5,R,\varepsilon}(t) &= t + i0 && \text{pro } t \in [-R, -b-\varepsilon] \\
\varphi_{6,\varepsilon}(t) &= -b + \varepsilon\mathrm{e}^{i(\pi - t)} && \text{pro } t \in [0, \pi]
\end{aligned}$$

a $\quad \varphi_{R,\varepsilon} := \varphi_{1,\varepsilon} \oplus \varphi_{2,\varepsilon} \oplus \varphi_{3,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{4,R} \oplus \varphi_{5,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{6,\varepsilon}$



Obrázek: Leží-li na reálné ose bod se singularitou, můžeme si vypomoci malou půlkružnicí.

Pro část integrálu na reálné ose (modré křivky) platí:

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\lim_{R\to+\infty}\int_{\varphi_{5,R,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_{1,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_{3,R,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z = \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\mathrm{e}^{iax}}{x^2-b^2}\,\mathrm{d}x.$$

Všechny integrály jsou konečné, tedy přehozením pořadí limit se výsledek nezmění.

Dle Tvrzení o obíhání části kružnice (LOOPN1) máme:

$$\int_{\varphi_{6,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_{2,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\varepsilon\to 0_+}{\to} -\pi i\left(\operatorname{Res}_{-b} f + \operatorname{Res}_b f\right).$$

Navíc (Jordanovo lemma) dává: $\displaystyle\int_{\varphi_{4,R}} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{R\to\infty}{\to} 0$

a díky holomorfnosti funkce f na Int $\varphi_{R,\varepsilon}$ ještě máme $\int_{\varphi_{R,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Celkově jsme dostali:

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\pi i\left(\operatorname{Res}_{-b} f + \operatorname{Res}_b f\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\pi i \frac{z\mathrm{e}^{iaz}}{(z^2-b^2)'}\bigg|_{z=-b} + \frac{z\mathrm{e}^{iaz}}{(z^2-b^2)'}\bigg|_{z=b}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\pi i\frac{\mathrm{e}^{-iab}+\mathrm{e}^{iab}}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\pi i\cos(ab) = \boxed{\frac{\pi}{2}\cos(ab)}$$

C) Integrály typu $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}x$ alias „sin a cos" vol.2

Příklad

Zadání: Nechť $a\in\mathbb{C}$, $|a|\neq 1$. Spočítejme integrál pro pevně zvolené $a=2$:

$$I(a) := \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1-2a\cos(t)+a^2}$$

Poznámka: Ve skriptech Milana Pokorného je tento příklad (20.9.22) vyřešen pro obecné $a\in\mathbb{C}$.

✓ ***Řešení:***

Pro $a=2$:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1-4\cos(t)+4} = \begin{bmatrix}\text{Z definice cosinu:}\\ \cos(t) = \frac{\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it}}{2}\end{bmatrix} = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{5-2\left(\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it}\right)} =$$

$$= \begin{bmatrix}\text{Reparametrisace:}\\ \varphi:\ \mathrm{e}^{it} = z\\ \varphi':\ i\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = iz\,\mathrm{d}z\end{bmatrix} = \int_{C_1(0)} \frac{1}{5-2\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{\mathrm{d}z}{iz} = \int_{C_1(0)}\frac{i\,\mathrm{d}z}{2z^2-5z+2}$$

- Vietovými vztahy nebo skrze diskriminant zjistíme kořeny jmenovatele: $\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$
- Zajímá nás pouze residuum v $\frac{1}{2}$, neb bod 2 jest mimo $C_1(0)$
- Jednonásobný kořen $\Rightarrow$ můžeme využít (4. pravidla pro výpočet residuí)

$$2\pi i \operatorname{Res}_{\frac{1}{2}} \frac{i}{2z^2-5z+2} = 2\pi i\frac{i}{(2z^2-5z+2)'}\bigg|_{z=\frac{1}{2}} = 2\pi i\frac{i}{4z-5}\bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{-2\pi}{-3} = \boxed{\frac{2}{3}\pi = I(2)}$$

D) Integrály typu $\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ alias „pacman"

Budeme předpokládat, že $\alpha \in (0,1)$ a funkci f můžeme **holomorfně prodloužit na** $\mathbb{C}$ s výjimkou konečně mnoha bodů $a_1, \dots, a_k$, z nichž žádný neleží na kladné reálné poloose ani v počátku. Navíc předpokládejme, že

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z|}$$

na jistém prstencovém okolí nekonečna. Zřejmě pak uvažovaný integrál existuje jako Lebesgueův i Newtonův.

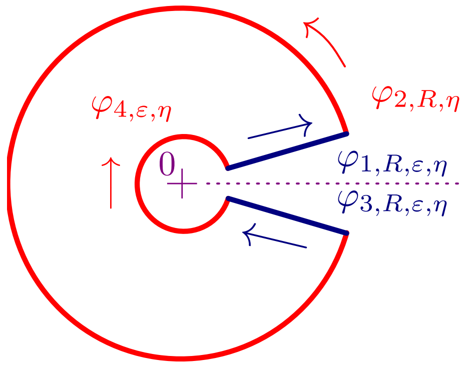
Kromě komplexního rozšíření fce f , potřebujeme **holomorfně rozšířit** i fci $x^{\alpha-1}$. Připomeňme, že obecná mocnina je zavedena prostřednictvím logaritmu, u něhož můžeme volit z většího počtu větví. Zde volbu podřídíme volbě integrační dráhy, kterou zvolme nejdříve.

Zafixujme velmi malé číslo $\varepsilon \in (0,1)$, velmi velké číslo $R > 1$ a velmi malé číslo $\eta \in (0,\pi)$.

Definujme křivky:

$\varphi_{1,R,\varepsilon,\eta}(t) = t\mathrm{e}^{i\eta}$	pro $t \in [\varepsilon, R]$
$\varphi_{2,R,\eta}(t) = R\mathrm{e}^{it}$	pro $t \in [\eta, 2\pi-\eta]$
$\varphi_{3,R,\varepsilon,\eta}(t) = (R-t)\mathrm{e}^{-i\eta}$	pro $t \in [0, R-\varepsilon]$
$\varphi_{4,\varepsilon,\eta}(t) = \varepsilon\mathrm{e}^{i(2\pi-t)}$	pro $t \in [\eta, 2\pi-\eta]$

a $\varphi_{R,\varepsilon,\eta} := \varphi_{1,R,\varepsilon,\eta} \oplus \varphi_{2,R,\eta} \oplus \varphi_{3,R,\varepsilon,\eta} \oplus \varphi_{4,\varepsilon,\eta}$



Obrázek: Využíváme křivku mající kladnou reálnou poloosu (nespojitost našeho logaritmu) ve svém vnějšku

Větev logaritmu nyní zvolíme tak, aby byla holomorfní na vnitřku zvolené křivky. **Volíme proto logaritmus** s argumentem probíhajícím interval $(0, 2\pi)$. Tato volba se projeví jak při vyhodnocování dílčích integrálů, tak při počítání reziduí.

Zabývejme se nyní **integrály přes jednotlivé křivky**. (Residuová věta) nám dává pro všechna ε, η dostatečně malá a R dostatečně velká:

$$\int_{\varphi_{R,\varepsilon,\eta}} z^{\alpha-1} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} z^{\alpha-1} f(z)$$

Dále si povšimněme, že pro R dostatečně velké díky **růstové podmínce** pro funkci f (natvrdo odhadnu velikost (není třeba Jordan)) platí na $\langle \varphi_2, R, \eta\rangle$

$$\left|z^{\alpha-1} f(z)\right| = |f(z)|\left|\mathrm{e}^{(\alpha-1)\mathrm{Log}\, z}\right| = \begin{bmatrix}\text{první Log } \to \mathbb{C} \\ \text{a ostatní log} \to \mathbb{R}\end{bmatrix} = |f(z)|\left|\mathrm{e}^{(\alpha-1)(\log|z| + i\arg z)}\right| =$$
$$= |f(z)|\left|\mathrm{e}^{(\alpha-1)\log|z|}\right|\left|\mathrm{e}^{(\alpha-1)i\arg z}\right| = |f(z)|\left|\mathrm{e}^{(\alpha-1)\log|z|}\right| = |f(z)||z|^{\alpha-1} \leq C|z|^{\alpha-2},$$

a proto máme zajištěno **chování v nekonečnu**: $\displaystyle\left|\int_{\varphi_{2,R,\eta}} z^{\alpha-1} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq C|z|^{\alpha-2}\ell_{\varphi_{2,R,\eta}} \leq C|z|^{\alpha-1} \overset{R\to+\infty}{\to} 0.$

Protože f je **holomorfní v počátku**, je na jeho okolí **omezená**. Odtud (obecnou mocninu opět odhadujeme jako výše, tedy $|z^\alpha - 1| \leq |z|^{\alpha-1}$)

$$\left|\int_{\varphi_{4,\varepsilon,\eta}} z^{\alpha-1} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq C|z|^{\alpha-1}\ell_{\varphi_{4,\varepsilon,\eta}} \leq C|z|^{\alpha} \overset{\varepsilon\to 0+}{\to} 0$$

přičemž limita je stejnoměrná vůči $\eta \in (0,1)$. Nyní si uvědomme, že ke každému libovolně malému $\xi \in (0,1)$ existují $R_0 > 0, \varepsilon_0 \in (0,1)$ a $\eta_0 \in (0,1)$ taková, že

$$\left|\int_{\varphi_{1,R,\varepsilon,\eta}} z^{\alpha-1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \xi \qquad \text{pro všechna } R > R_0\,,\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0) \text{ a } \eta \in (0,\eta_0).$$

Při práci s integrálem přes křivku $\varphi_{3,R,\varepsilon,\eta}$ pracujeme podobně. Dojde však ke dvěma změnám. Jednak se **změní znaménko** (díky obrácenému smyslu obíhání). Dále je ve výrazu

$$z^{\alpha-1} = \mathrm{e}^{(\alpha-1)\log z} = \mathrm{e}^{(\alpha-1)(\log|z|+i\arg z)} = |z|^{\alpha-1}\mathrm{e}^{i(\alpha-1)\arg z}$$

pro η blízké nule argument logaritmu blízko k hodnotě 2π. To se nakonec projeví multiplikativní konstantou $\mathrm{e}^{i(\alpha-1)2\pi} = \mathrm{e}^{i2\pi\alpha}$. A tato **multiplikativní konstanta** zabrání odečtení integrálů přes $\varphi_{1,R,\varepsilon,\eta}$ a $\varphi_{3,R,\varepsilon,\eta}$

Celkově jsme dostali $$\boxed{\int_0^\infty x^{\alpha-1}f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi i}{1-\mathrm{e}^{i2\pi\alpha}}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}_{a_j}\, z^{\alpha-1}f(z)}$$

Příklad

Zadání: Za pomoci právě představené metody a částečných výsledků spočítejme

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{\beta+x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{kde } \alpha\in(0,1) \text{ a } \beta>0.$$

✓ ***Řešení:***

- Funkce $f(z) = \dfrac{1}{\beta+z}$ má všechny požadované vlastnosti
- Při výpočtu reziduí používáme výše zavedenou **větev logaritmu** (resp. obecnou mocninu) s argumentem z intervalu $(0,2\pi))$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{\beta+x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi i}{1-\mathrm{e}^{i2\pi\alpha}}\mathrm{Res}_{-\beta}\frac{z^{\alpha-1}}{z+\beta} = \frac{2\pi i}{1-\mathrm{e}^{i2\pi\alpha}}(-\beta)^{\alpha-1} = \frac{2\pi i\beta^{\alpha-1}\mathrm{e}^{\pi i(\alpha-1)}}{1-\mathrm{e}^{i2\pi\alpha}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{\beta+x}\,\mathrm{d}x = \pi\beta^{\alpha-1}\frac{2i}{\mathrm{e}^{i\pi\alpha}-\mathrm{e}^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi\beta^{\alpha-1}}{\sin(\pi\alpha)}}$$

D) Integrály typu $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}f(x)\,\mathrm{d}x$ alias „činka"

Tento typ integrálů se dá řešit dvěma způsoby:

1) Substitucí a převedením na případ „pacmana" $\rightarrow \int_0^\infty x^{\alpha-1}f(x)\,\mathrm{d}x$

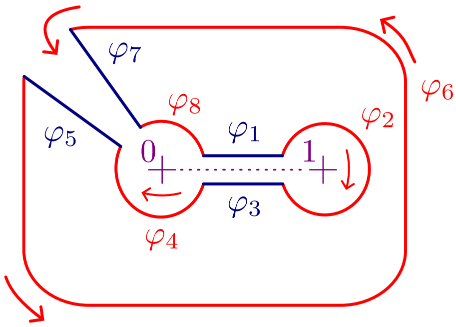
2) Řešením přímo a zavedením integrační kontury tzv. „činky", což je následující postup:

Budeme předpokládat, že $\alpha\in(0,1)$ a funkci f můžeme **holomorfně prodloužit** na $\mathbb{C}$ s výjimkou konečně mnoha bodů $a_1,...,a_k$, z nichž žádný neleží na úsečce $\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z\in[0,1], \mathrm{Im}\, z=0\}$. Navíc předpokládejme, že funkce f má **odstranitelnou singularitu v nekonečnu**.

Kromě toho, že jsme do komplexní roviny rozšířili funkci f, potřebujeme **holomorfně rozšířit** také funkci $x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}$. O to se nám opět postará **vhodně zvolená větev logaritmu**. Tentokrát bude mít rozšířená funkce $x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}$ skok na úsečce $\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z\in(0,1), \mathrm{Im}\, z=0\}$.

Řešení zahájíme **volbou integrační dráhy**. Zafixujme velmi malé číslo $\varepsilon\in(0,1)$, velmi velké číslo $R>1$, velmi malé číslo $\eta\in(0,\pi)$ a číslo $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ takové, aby na úsečce $\{te^{i\theta} : t\geq 0\}$ neležela žádná singularita (takový paprsek jistě najdeme, neboť bodů se singularitou je jen konečný počet).

Definujme křivky:



$$
\begin{aligned}
&\varphi_{1,\varepsilon,\eta}(t) = t + i\varepsilon \sin\eta && \text{pro } t \in [\varepsilon\cos\eta, 1-\varepsilon\cos\eta] \\
&\varphi_{2,\varepsilon,\eta}(t) = 1 + \varepsilon e^{i(\pi - t)} && \text{pro } t \in [\eta, 2\pi - \eta] \\
&\varphi_{3,\varepsilon,\eta}(t) = 1 - t - i\varepsilon \sin\eta && \text{pro } t \in [\varepsilon\cos\eta, 1-\varepsilon\cos\eta] \\
&\varphi_{4,\varepsilon,\eta;\theta}(t) = \varepsilon e^{i(2\pi - t)} && \text{pro } t \in [\eta, 2\pi - \theta - \eta] \\
&\varphi_{5,R,\varepsilon,\eta;\theta}(t) = t e^{i(\theta+\eta)} && \text{pro } t \in [\varepsilon, R] \\
&\varphi_{6,R,\eta;\theta}(t) = R e^{i(t+\theta)} && \text{pro } t \in [\eta, 2\pi - \eta] \\
&\varphi_{7,R,\varepsilon,\eta;\theta}(t) = (R-t) e^{i(\theta-\eta)} && \text{pro } t \in [0, R-\varepsilon] \\
&\varphi_{8,\varepsilon,\eta;\theta}(t) = \varepsilon e^{i(2\pi - t)} && \text{pro } t \in [2\pi - \theta + \eta, 2\pi - \eta]
\end{aligned}
$$

$$\text{a} \quad \varphi_{R,\varepsilon,\eta;\theta} := \varphi_{1,\varepsilon,\eta} \oplus \varphi_{2,\varepsilon,\eta} \oplus \varphi_{3,\varepsilon,\eta} \oplus \varphi_{4,\varepsilon,\eta;\theta} \oplus \varphi_{5,R,\varepsilon,\eta;\theta} \oplus \varphi_{6,R,\eta;\theta} \oplus \varphi_{7,R,\varepsilon,\eta;\theta} \oplus \varphi_{8,\varepsilon,\eta;\theta}$$

Zkusme zavést **rozšíření** fce $x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}$ na **holomorfní** funkci. Začneme přepisem do vhodnějšího tvaru:

$$\underbrace{x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}}_{\substack{\text{Nepracujeme s jednotlivými} \\ \text{funkcemi odděleně}}} = \underbrace{\frac{1}{x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}}_{\substack{\text{pracujeme s nimi} \\ \text{dohromady}}}$$

Nyní funkci $x \mapsto \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}$ **rozšíříme** na $z \mapsto \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}$ prostřednictvím volby vhodné větve **komplexního logaritmu**.

Zobrazení: $\quad z \mapsto \dfrac{z}{1-z} = -1 + \dfrac{1}{1-z} \quad$ je dobře definované na $\mathbb{C}^*$, je prosté

$$\text{a množinu } \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [0,1], \operatorname{Im} z = 0\} \xrightarrow{\text{zobrazuje na množinu}} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [0,\infty), \operatorname{Im} z = 0\} \cup \{\infty\}$$

Volíme proto logaritmus s argumentem probíhajícím interval $(0, 2\pi)$ a dostáváme tak funkci $\frac{1}{z}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}$, která je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [0,1], \operatorname{Im} z = 0\}$.

- Než vyhodnotíme integrály přes jednotlivé křivky, zkusme prostudovat chování argumentu výrazu $\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}$ při integraci přes křivky $\varphi_{1,\varepsilon,\eta}$ a $\varphi_{3,\varepsilon,\eta}$.

$\varphi_{1,\varepsilon,\eta}$

Jednak pro body tvaru $t + i\delta$, kde $t \in (0,1)$ a $\delta > 0$ je velmi malé číslo, máme

$$\frac{t+i\delta}{1-(t+i\delta)} = \frac{(t+i\delta)(1-t+i\delta)}{|1-t-i\delta|^2} = \frac{t-t^2-\delta^2+i\delta}{|1-t-i\delta|^2}.$$

Bude-li tedy t odraženo od čísel 0 a 1 , postupné zmenšování čísla δ povede k tomu, že argument výrazu $\frac{t+i\delta}{1-(t+i\delta)}$ půjde **do nuly**

$$\left(\text{výraz } \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} \text{ pak jde stejnoměrně k } \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}\right)$$

$\varphi_{3,\varepsilon,\eta}$

Naopak pro body tvaru $t - i\delta$, kde $t \in (0,1)$ a $\delta > 0$ je velmi malé číslo, máme

$$\frac{t-i\delta}{1-(t-i\delta)} = \frac{(t-i\delta)(1-t-i\delta)}{|1-t+i\delta|^2} = \frac{t-t^2-\delta^2-i\delta}{|1-t+i\delta|^2}.$$

Bude-li tedy t odraženo od čísel 0 a 1 , postupné zmenšování čísla δ povede k tomu, že argument výrazu $\frac{t-i\delta}{1-(t-i\delta)}$ půjde **do hodnoty 2π**

$$\left(\text{výraz } \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} \text{ pak jde stejnoměrně k } \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} e^{2\pi\alpha i}\right)$$

Nyní již můžeme vyhodnotit integrály přes jednotlivé křivky. Předně, protože bodů $a_1, \ldots, a_k$ je jen konečný počet, jsou-li ε, η dostatečně malá a R dostatečně velké,

máme: $$\int_{\varphi_{R,\varepsilon,\eta}} \frac{1}{z}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} \frac{1}{z}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} f(z)$$

- Dále integrály přes křivky $\varphi_{2,\varepsilon,\eta}, \varphi_{4,\varepsilon,\eta;\theta}$ a $\varphi_{8,\varepsilon,\eta;\theta}$ umíme udělat libovolně malé volbou $\varepsilon > 0$.

Např. pro $\varphi_{2,\varepsilon,\eta}$: $$\left|\int_{\varphi_{2,\varepsilon,\eta}} \frac{1}{z}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \ell_{\varphi_{2,\varepsilon,\eta}} \max_{\langle\varphi_{2,\varepsilon,\eta}\rangle}\left|\frac{1}{z}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} f(z)\right| \leq 2\pi\varepsilon\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}}\right)^{\alpha} C \leq C\varepsilon^{\alpha}$$

Ještě si uvědomme, že tyto odhady jsou **stejnoměrné** vůči η a **nezávisí** na θ.

- Vyhodnoťme integrál přes $\varphi_{6,R,\eta;\theta}$. Ten umíme učinit libovolně blízký hodnotě $2\pi i \mathrm{e}^{i\pi\alpha}\lim_{z\to\infty} f(z)$. Skutečně, pro R dost velké je $f(z)$ libovolně (stejnoměrně) blízko k $\lim_{z\to\infty} f(z)$, $\frac{z}{1-z}$ je libovolně (stejnoměrně) blízko k číslu -1 . Kde jsme α-tou mocninu definovali holomorfně na okolí bodu -1 a platí $(-1)^{\alpha} = \left(\mathrm{e}^{i\pi}\right)^{\alpha}$

Navíc využíváme: $$\int_{C_R(0)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i$$

(ve skutečnosti neintegrujeme přes celou křivku $C_R(0)$, ale volbou η velice malého se umíme uvedené hodnotě libovolně přiblížit). Proto jsme dostali (znaku konvergence dáváme význam popsaný výše)

$$\int_{\varphi_{6,R,\eta;\theta}} \frac{1}{z}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} f(z)\,\mathrm{d}z \to 2\pi i\mathrm{e}^{i\pi\alpha}\lim_{z\to\infty} f(z).$$

- Dále integrály přes křivky $\varphi_{5,R,\varepsilon,\eta;\theta}$ a $\varphi_{7,R,\varepsilon,\eta;\theta}$ se s libovolnou přesností vyruší, opět nezávisle na θ. To umíme zařídit pro zafixovaná R a ε postupným zmenšováním čísla η díky stejnoměrné spojitosti integrandu.

Tedy $$\int_{\varphi_{5,R,\varepsilon,\eta;\theta}} \frac{1}{z}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_{7,R,\varepsilon,\eta;\theta}} \frac{1}{z}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0$$

- Připomeňme ještě výsledky získané výše, podle nichž se integrálem přes křivku $\varphi_{1,R,\varepsilon,\eta}$ umíme libovolně přiblížit zadanému integrálu a integrálem přes křivku $\varphi_{3,R,\varepsilon,\eta}$ zase $-\mathrm{e}^{2\pi\alpha i}$-násobku zadaného integrálu.

Pak $$\int_{\varphi_{1,\varepsilon,\eta}} \frac{1}{z}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} f(z)\,\mathrm{d}z \to \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a $$\int_{\varphi_{3,\varepsilon,\eta}} \frac{1}{z}\frac{z}{1-z}^{\alpha} f(z)\,\mathrm{d}z \to -\mathrm{e}^{2\pi\alpha i}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Celkově máme $$\boxed{\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi i}{1-\mathrm{e}^{2\pi\alpha i}}\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}_{a_j}\frac{1}{z}\frac{z}{1-z}^{\alpha} f(z) - \mathrm{e}^{i\pi\alpha}\lim_{z\to\infty} f(z)}$$

Příklad

Pro každé $\alpha \in (0,1)$ máme:

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi i}{1-\mathrm{e}^{2\pi\alpha i}}\left(-\mathrm{e}^{i\pi\alpha}\right) = \pi\frac{2i}{\mathrm{e}^{\pi\alpha i}-\mathrm{e}^{-\pi\alpha i}} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

E) Integrály typu $\int_0^\infty f(x)\log(x)\,\mathrm{d}x$ alias „logaritmus”

Budeme předpokládat:

- Funkce f je **spojitá a sudá** na $\mathbb{R}$.
- Existuje konečný počet bodů $a_1,\dots,a_k \in \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ a rozšíření funkce f, které je spojité na $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}\setminus\{a_1,\dots,a_k\}$ a holomorfní na $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}\setminus\{a_1,\dots,a_k\}$.
- A navíc platí růstová podmínka: $\max\limits_{\{z\in\mathbb{C}:\, \operatorname{Im} z\geq 0,\, |z|=R\}} |f(z)| R\log R \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

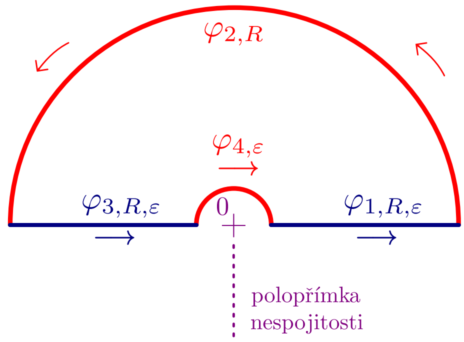
Tentokrát budeme pracovat s funkcí **logaritmus** takovou, že její argument leží v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ (níže uvidíme, že potřebujeme interval obsahující $[0,\pi]$).

Zadefinujme ještě integrační dráhu. Zafixujme velmi malé číslo $\varepsilon\in(0,1)$ a velmi velké číslo $R>1$.

Definujme křivky:

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,R,\varepsilon}(t) &= t && \text{pro } t\in[\varepsilon,R]\\
\varphi_{2,R}(t) &= R\mathrm{e}^{it} && \text{pro } t\in[0,\pi]\\
\varphi_{3,R,\varepsilon}(t) &= t && \text{pro } t\in[-R,-\varepsilon]\\
\varphi_{4,\varepsilon}(t) &= \varepsilon\mathrm{e}^{i(\pi-t)} && \text{pro } t\in[0,\pi]
\end{aligned}$$

a $\quad \varphi_{R,\varepsilon} := \varphi_{1,R,\varepsilon}\oplus\varphi_{2,R}\oplus\varphi_{3,R,\varepsilon}\oplus\varphi_{4,\varepsilon}$



Obrázek: Potřebujeme, aby polopřímka nespojitosti ležela v záporné imaginární polorovině

Nyní vyhodnotíme integrály přes jednotlivé křivky. Protože bodů $a_1,\dots,a_k$ je jen konečný počet, je-li ε dostatečně malé a R dostatečně velké, máme:

$$\int_{\varphi_{R,e}} f(z)\log z\,\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}_{a_j}(f(z)\log z).$$

Dále díky růstové podmínce platí:

$$\left|\int_{\varphi_{2,R}} f(z)\log z\,\mathrm{d}z\right| \leq \ell_{\varphi_{2,R}} \max_{\langle\varphi_{2,R,\varepsilon}\rangle}|f(z)\log z| \leq \pi R \max_{\{z\in\mathbb{C}:\,\operatorname{Im} z\geq 0,\,|z|=R\}}|f(z)|\log R^{R\to+\infty} \to 0.$$

Navíc díky spojitosti funkce f v počátku máme

$$\left|\int_{\varphi_{4,\varepsilon}} f(z)\log z\,\mathrm{d}z\right| \leq \ell_{\varphi_{4,e}} \max_{\langle\varphi_{4,\varepsilon}\rangle}|f(z)\log z| \leq \pi\varepsilon C\log\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0+}{\to} 0.$$

Dále dostáváme (zvětšováním R a zmenšováním ε se můžeme libovolně přiblížit integrálům na pravých stranách)

$$\int_{\varphi_{1,R,e}} f(z)\log z\,\mathrm{d}z \to \int_0^\infty f(x)\log x\,\mathrm{d}x$$

a

$$\int_{\varphi_{3,R,\varepsilon}} f(z)\log z\,\mathrm{d}z \to \int_{-\infty}^0 f(|x|)(\log|x|+i\pi)\,\mathrm{d}x\,.$$

Celkově:

$$\boxed{2\int_0^\infty f(x)\log x\,\mathrm{d}x + i\pi\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}_{a_j}(f(z)\log z)}$$

Poznámka: Povšimněme si, že jsme navíc zjistili, čemu se rovná $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$

Příklad

Zadání: Spočítejme integrál:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

✓ ***Řešení:***

- Na množině $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ má funkce $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$ jedinou singularitu a tou je dvojnásobný pól v bodě i
- Proto pro výpočet rezidua tentokrát použijeme (2. pravidla pro výpočet residuí)

Dostaneme:

$$\operatorname{Res}_i \frac{\log z}{(1+z^2)^2} = \lim_{z\to i} \frac{\log z}{(z+i)^2}\ ' = \lim_{z\to i} \frac{\frac{1}{z}(z+i)^2 - 2(z+i)\log z}{(z+i)^4} = \frac{\frac{-4}{i} - 4i\left(i\frac{\pi}{2}\right)}{16} = \frac{\pi}{8} + \frac{i}{4}$$

Díky tomu po dosazení do obecného výsledku dostáváme

$$2\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x + i\pi \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \frac{\pi}{8} + \frac{i}{4} = -\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4}$$

Odtud
$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4} \quad \text{a} \quad \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}}$$

Poznámka: Předchozí integrál dokonce existuje jako Lebesgueův.

F) Integrály obsahující exponenciálu alias „žiletka"

Tentokrát neodvodíme obecný postup, ale ukážeme si výpočet konkrétního příkladu

Příklad

Zadání: Pro $a > 0$ spočítejme integrál:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\sinh(x)}\,\mathrm{d}x$$

✓ ***Řešení:***

- Nejprve si integrál přepíšeme do **vhodnějšího tvaru** (přechod k integrálu ve smyslu hlavní hodnoty způsobuje singularita v počátku)

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\sinh x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(ax)}{\sinh x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\ \text{p.v.} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iax}}{\sinh x}\,\mathrm{d}x.$$

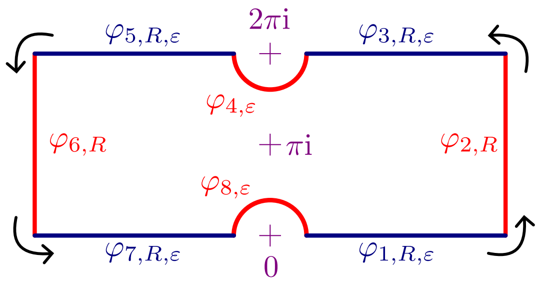
- V úlohách našeho typu se dá využít **periodicity** komplexní exponenciály, díky níž máme $\sinh(z+2\pi i) = \sinh z$ na $\mathbb{C}$.

Tato vlastnost nám přinese jisté výhody při následující volbě integrační dráhy (pokoušíme se obíhat pás $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \in (0, 2\pi)\}$, dáváme si pozor na kořen jmenovatele v počátku a jeho kopii v bodě $2\pi i$).

Zafixujme velmi malé číslo $\varepsilon \in (0,1)$ a velmi velké číslo $R > 1$.

Definujme křivky:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{1,R,\varepsilon}(t) &= t + i0 && \text{pro } t \in [\varepsilon, R] \\
\varphi_{2,R}(t) &= R + it && \text{pro } t \in [0, 2\pi] \\
\varphi_{3,R,\varepsilon}(t) &= R - t + 2\pi i && \text{pro } t \in [0, R-\varepsilon] \\
\varphi_{4,\varepsilon}(t) &= 2\pi i + \varepsilon \mathrm{e}^{-it} && \text{pro } t \in [0, \pi] \\
\varphi_{5,R,\varepsilon}(t) &= -t + 2\pi i && \text{pro } t \in [\varepsilon, R] \\
\varphi_{6,R}(t) &= -R + i(2\pi - t) && \text{pro } t \in [0, 2\pi] \\
\varphi_{7,R,\varepsilon}(t) &= t + i0 && \text{pro } t \in [-R, -\varepsilon] \\
\varphi_{8,\varepsilon}(t) &= \varepsilon \mathrm{e}^{i(\pi - t)} && \text{pro } t \in [0, \pi]
\end{aligned}
$$



Obrázek: Kladně obíhaná křivka z příkladu na integrál obsahující exponenciální funkci.

$$\text{a} \quad \varphi_{R,\varepsilon} := \varphi_{1,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{2,R} \oplus \varphi_{3,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{4,\varepsilon} \oplus \varphi_{5,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{6,R} \oplus \varphi_{7,R,\varepsilon} \oplus \varphi_{8,\varepsilon}$$

Uvnitř obíhané oblasti se nachází ještě jedna singularita v bodě πi, kde má jmenovatel jednonásobný kořen.

Proto:
$$\int_{\varphi_{R,\varepsilon}} \frac{\mathrm{e}^{iaz}}{\sinh z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}_{\pi i} \frac{\mathrm{e}^{iaz}}{\sinh z} = 2\pi i \frac{\mathrm{e}^{iaz}}{\sinh' z}\bigg|_{z=\pi i} = 2\pi i \frac{\mathrm{e}^{-\pi a}}{\frac{\mathrm{e}^{\pi i} + \mathrm{e}^{-\pi i}}{2}} = 2\pi i \frac{\mathrm{e}^{-\pi a}}{\frac{-1-1}{2}} = -2\pi i \mathrm{e}^{-\pi a}$$

Dále při integraci přes křivky $\varphi_{4,\varepsilon}$ a $\varphi_{8,\varepsilon}$ použijeme Tvrzení o obíhání části kružnice (LOOPN1). Dostáváme:

$$\int_{\varphi_{4,\varepsilon}} \frac{\mathrm{e}^{iaz}}{\sinh z}\,\mathrm{d}z \overset{\varepsilon\to 0+}{\to} -\pi i \operatorname{Res}_{2\pi i} \frac{\mathrm{e}^{iaz}}{\sinh z} = -\pi i \frac{\mathrm{e}^{iaz}}{\sinh' z}\bigg|_{z=2\pi i} = -\pi i \frac{\mathrm{e}^{-2\pi a}}{\frac{\mathrm{e}^{2\pi i} + \mathrm{e}^{-2\pi i}}{2}} = -\pi i \frac{\mathrm{e}^{-2\pi a}}{\frac{1+1}{2}} = -\pi i \mathrm{e}^{-2\pi a}$$

a

$$\int_{\varphi_{8,\varepsilon}} \frac{\mathrm{e}^{iaz}}{\sinh z}\,\mathrm{d}z \overset{\varepsilon\to 0^+_+}{\to} -\pi i \operatorname{Res}_{0} \frac{\mathrm{e}^{iaz}}{\sinh z} = -\pi i \frac{\mathrm{e}^{iaz}}{\sinh' z}\bigg|_{z=0} = -\pi i \frac{\mathrm{e}^{0}}{\cosh 0} = -\pi i.$$

Ještě si povšimněme, že máme:

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \lim_{R\to\infty} \int_{\varphi_{1,R,e}} \frac{\mathrm{e}^{iaz}}{\sinh z}\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_{7,R,e}} \frac{\mathrm{e}^{iaz}}{\sinh z}\,\mathrm{d}z = \text{ p.v. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{iax}}{\sinh x}\,\mathrm{d}x$$

a

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \lim_{R\to\infty} \int_{\varphi_{3,R,\varepsilon}} \frac{\mathrm{e}^{iaz}}{\sinh z}\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_{5,R,\varepsilon}} \frac{\mathrm{e}^{iaz}}{\sinh z}\,\mathrm{d}z = -\text{ p.v. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ia(x+2\pi i)}}{\sinh x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-2\pi a} \text{ p.v. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{iax}}{\sinh x}\,\mathrm{d}x$$

Konečně
$$\int_{\varphi_{2,R}} \frac{\mathrm{e}^{iaz}}{\sinh z}\,\mathrm{d}z \overset{R\to+\infty}{\to} 0 \quad \text{a} \quad \int_{\varphi_{6,R}} \frac{\mathrm{e}^{iaz}}{\sinh z}\,\mathrm{d}z \overset{R\to+\infty}{\to} 0$$

neboť pro $z_1 + iz_2 \in \mathbb{C}$ splňující $|z_1| = R$ a $z_2 \in [0, 2\pi]$ platí:

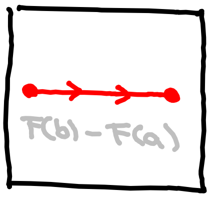
$$\left|\frac{\mathrm{e}^{iaz}}{\sinh z}\right| = 2\frac{\left|\mathrm{e}^{iaz_1}\mathrm{e}^{-az_2}\right|}{\left|\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{iz_2} - \mathrm{e}^{-z_1}\mathrm{e}^{-iz_2}\right|} \le 2\frac{\mathrm{e}^{-az_2}}{\left|\left|\mathrm{e}^{z_1}\right| - \left|\mathrm{e}^{-z_1}\right|\right|} \le 2\frac{1}{\mathrm{e}^{R} - \mathrm{e}^{-R}} \overset{R\to+\infty}{\to} 0.$$

Celkově jsme získali:

$$\text{p.v} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{iax}}{\sinh x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi a}} - 2\pi i \mathrm{e}^{-\pi a} + \pi i \mathrm{e}^{-2\pi a} + \pi i = \pi i \frac{\left(1-\mathrm{e}^{-\pi a}\right)^2}{\left(1-\mathrm{e}^{-\pi a}\right)\left(1+\mathrm{e}^{-\pi a}\right)} = \pi i \frac{1-\mathrm{e}^{-\pi a}}{1+\mathrm{e}^{-\pi a}} = \pi i \tanh \frac{\pi a}{2}$$

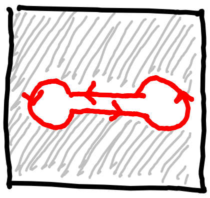
Proto:
$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{\sinh x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \pi i \tanh \frac{\pi a}{2} = \frac{\pi}{2} \tanh \frac{\pi a}{2}}$$

Dominik Beck - Typologie příkladů



$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x+x^2)^2}$$

$$\int_1^\infty \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$$



$$\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1-x}\,dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{4+x^2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)}}$$

$$\int_0^1 \ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

$$\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)}}$$

$$\int_0^1 \frac{2x-1}{1-x+x^2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)dx$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x+x^2)^2}$$

$$\int_0^1 \ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right)dx$$

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{x}$$

$$\int_0^1 \ln^3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{x}$$

$$\int_{-1}^1 \left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-2x\right)\frac{dx}{x^3}$$

$$\int_0^1 \ln^3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{x^3}$$

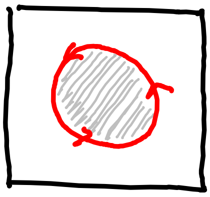
$$\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\ln x\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{\ln^2 x\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

$$\int_0^1 \ln^2\frac{x}{1-x}\arccos\sqrt{x}\,dx$$

$$\int_0^1 \ln\frac{x}{1-x}\ln x\arccos\sqrt{x}\,dx$$



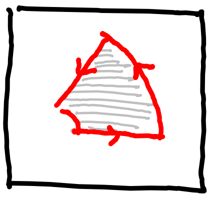
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x\,dx}{(1+4\sin^2 x)^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^2 x-\cos x+1}$$

$$\fint_0^{\pi} \frac{dx}{\cos x-\alpha}$$

$$\int_0^{2\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$$



$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^6+1}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x^6+1)}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{x\ln x}{1+x^3}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^4}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^4}\,dx$$

$$\fint_0^\infty \frac{dx}{1-x^3}$$

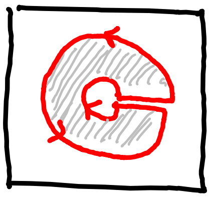
$$\fint_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}(x^6-1)^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{x^2+x+1}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1-x+x^2}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+x^4)}\,dx$$



$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^6+1)^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x)^2}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{(x+1)^2(x+4)\sqrt{x}}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}(1+x)}\,dx$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^3)}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x+x^2)^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}\,dx$$

$$\fint_0^\infty \frac{dx}{x^2-6x+1}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x+x^2}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{(x+1)^2}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^3 x\,dx}{(1+x^2)(1+x)^2}$$

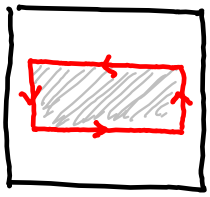
$$\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{1-x+x^2}\,dx$$

$$\fint_0^\infty \frac{\ln x}{(x-1)^2}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{x^3}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx$$



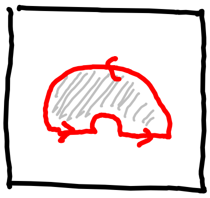
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\alpha x}{\cosh x}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{x/2}}{e^{2x}+2e^{x}+2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\sinh x}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+e^x}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sinh x}e^{-x}\,dx$$



$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin kx}{x(x^2+\alpha^2)}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}$$

$$\fint_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1-x^3}$$

$$\fint_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{(x-1)^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\,dx$$

$$\fint_0^\infty \frac{\ln^2 x\,dx}{(x-1)^2(x-4)\sqrt{x}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{arcctg} x}{x(1+x^2)}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{1-x+x^2}\,dx$$

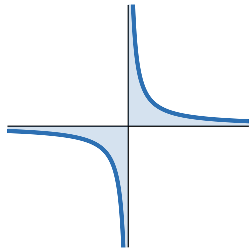
$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^4)}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln^2(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$$

2.6 Poznámka k typům integrálů

Rozlišujeme 3 typy existence integrálů:



- Lebesgueův integrál
- Newtonův integrál
- Integrál ve smyslu hlavní hodnoty (p.v.)

Lebesgueův integrál

Vyžaduje **absolutní konvergenci**

Vyžadujeme lepší pokles, než $\frac{1}{(x)^1}$ v okolí nekonečna a zároveň pomalejší růst než $\frac{1}{(x)^1}$ u nuly

Například: exponenciální pokles v okolí nekonečna

Newtonův integrál

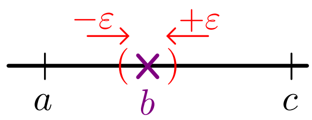
Vyžaduje alespoň **neabsolutní konvergenci**

Díky neabsolutní konvergenci se nám některé členy mohou vhodně odečíst

Například: sin(x)/x

Integrál ve smyslu hlavní hodnoty (p.v.)

$$\text{p.v.} \int_a^c f = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_a^{b-\varepsilon} f + \int_{b+\varepsilon}^c f \right); \quad \text{pokud existuje}$$



Například: 1/x okolo nuly

2.7 Poznámky a početní tríčky

Připomenutí střední školy:

Problém: $x^2 + y^2 = 2x$ je předpis pro kružnici, jak ale najít její střed a poloměr?

$x^2 + y^2 - 2x = 0$

➪Doplnění na čtverec

Doplnění na čtverec je převod problému do tvaru rovnice:

$$ax^2 + bx + c \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x + 0 \qquad \left.\begin{matrix} d = -1 \\ e = -1 \end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \quad (x-1)^2 - 1$$

Nalezneme koeficienty: $\quad a(x+d)^2 + e \quad$ kde $d = \frac{b}{2a}; \quad e = c - \frac{b^2}{4a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(x-1)^2 - 1 + y^2 = 0}$

➪Dosazení do předpisu pro kružnici

$$(x-X)^2+(y-Y)^2=r^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} X = & \text{posunutí v } x \\ Y = & \text{posunutí v } y \\ r = & \text{poloměr kružnice} \end{cases}$$

$$(x-1)^2+(y)^2=1 \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{matrix} X=1 \\ Y=0 \\ r=1 \end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \quad S=[1,0];\ r=1$$

➪Řešení kvadratické rovnice

$$0=ax^2+bx+c \quad \rightarrow \quad D=b^2-4ac \quad \rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

Vysokoškolské tríčky:

➪Výpočet komplexní odmocniny

Pozorování: O čísle i se dá uvažovat jako o „rotaci o 90°”, úhel cílového čísla $= \frac{\pi}{2}$

Příklad: $z^n = 2i \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt[n]{2i}$

1) Zjistit úhel cílového čísla, zde $2i \rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$
2) Převést do exponenciálního tvaru:

$$\sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{i\frac{\varphi}{n}} = \sqrt[n]{z\cdot\bar{z}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2n}} = \sqrt[n]{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2n}}$$

3) Hledání kořenů ve tvaru: $\sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)}$

$$\begin{aligned} k=0: &\quad z_0 = \sqrt[n]{2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2n}+0\right)} \\ k=1: &\quad z_1 = \sqrt[n]{2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2\pi}{n}\right)} \\ &\quad\vdots \\ k=n-1: &\quad z_{n-1} = \sqrt[n]{2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2\pi(n-1)}{n}\right)} \\ k=n: &\quad z_n = z_0 \end{aligned}$$

Příklad: $z^n = -1 \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt[n]{-1}$

1) Zjistit úhel cílového čísla, zde $-1 \rightarrow \varphi = \pi$
2) Převést do exponenciálního tvaru:

$$\sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{i\frac{\varphi}{n}} = \sqrt[n]{z\cdot\bar{z}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}$$

3) Hledání kořenů ve tvaru: $\sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)}$

$$\begin{aligned} k=0: &\quad z_0 = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{n}+0\right)} \\ k=1: &\quad z_1 = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)} \\ &\quad\vdots \\ k=n-1: &\quad z_{n-1} = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2\pi(n-1)}{n}\right)} \\ k=n: &\quad z_n = z_0 \end{aligned}$$

Poznámky:

Poznámka: Pro obecnou mocninu platí $|z^\alpha| = |z|^\alpha$ bez ohledu na zvolený interval argumentu logaritmu.

Poznámka 2: Funkce $\alpha\in(0,1)\mapsto \displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}f(x)\,\mathrm{d}x$ se nazývá Mellinova transformace funkce f.

3 Fourierova transformace

Definice 4 (Schwartzův prostor)**.**

Prostor Fourierovy transformace nazýváme **Schwartzovým prostorem**:

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \left\| x^\alpha D^\beta f \right\|_{L^\infty} < \infty; \quad \forall \alpha, \beta \in N_0^n \right\}$$

Vzoreček: Fourierova transformace (FT)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\quad \xi \in \mathbb{R}^n \ldots$ „v 1D - navíjecí frekvence” , $\quad x \in \mathbb{R}^n \ldots$ „v 1D - čas navíjení”

FT: $$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x \qquad \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

Zpětná FT: $$\check{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\,\mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi \qquad \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

(a pokud přejmenujeme proměnné) $$\check{f}(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x \qquad \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

Vzorečky:

Derivace v multiindexu: $$D^\beta f = \frac{\partial^{\beta_1+\ldots+\beta_n} f}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}; \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

Poznámka: $D^\beta f$: značí derivaci fce n proměnných podle multiindexu β, který má n složek

Konvoluce: $$\boxed{(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y}$$

Základní vlastnosti Fourierovy transformace:

- $\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)$, $\quad \overline{\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)} = \mathcal{F}(\bar{f})(\xi)$, $\quad \overline{\mathcal{F}(f)(\xi)} = \mathcal{F}^{-1}(\bar{f})(\xi)$
- $\mathcal{F}(f(x-z)) = e^{-2\pi i z\cdot\xi}\mathcal{F}(f)(\xi)$, $\quad \forall z \in \mathbb{R}^n$
- $\mathcal{F}(f)(\xi-\eta) = \mathcal{F}\left(e^{2\pi i x\cdot\eta} f(x)\right)(\xi)$, $\quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n$
- $\mathcal{F}\Big(f(\varepsilon x)\Big)(\xi) = |\varepsilon|^{-n}\,\mathcal{F}(f(x))\left(\dfrac{\xi}{\varepsilon}\right)$, $\quad \forall \varepsilon \neq 0$
- f sudá/lichá v $x_j \Rightarrow \mathcal{F}(f)$ sudá/lichá v ξ_j
- $\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi)$, $\qquad \mathcal{F}^{-1}(D^\alpha f)(\xi) = (-2\pi i\xi)^\alpha \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)$
- $D^\alpha(\mathcal{F}(f))(\xi) = \mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha f(x))(\xi)$, $\quad D^\alpha\left(\mathcal{F}^{-1}(f)\right)(\xi) = \mathcal{F}^{-1}((2\pi i x)^\alpha f(x))(\xi)$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f\mathcal{F}(g)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)g\,\mathrm{d}x$, $\quad$ totéž pro $\mathcal{F}^{-1}$
- $\mathcal{F}(f*g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)\,\mathcal{F}(g)(\xi)$, $\quad$ totéž pro $\mathcal{F}^{-1}$

Rozšíření F.T. mimo $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$:

- $f \in L^1: \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(f) \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \big(\text{totéž } \mathcal{F}^{-1}\big)$

  Pokud je $f \in L^1$ a $\mathcal{F}(f) \in L^1$, pak $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$

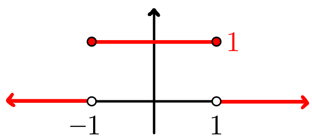
- $f \in L^2$: $\quad \mathcal{F}(f) = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{B_R(0)} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x \qquad f \in L^2 \Rightarrow \mathcal{F}(f) \in L^2$ (důsledek vlastností FT)

  a platí: $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ (Planderelova rovnost)

Příklad

Zadání: Vypočítejte Fourierovu transformaci $\mathcal{F}(f)(\xi)$ z charakteristické funkce intervalu $[-1,1]$:

$$f(x) = \chi_{[-1;1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & x \notin [-1,1] \end{cases}$$



✓ ***Řešení:***

Fourierova transformace:

$\xi \neq 0$

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-1,1]}(x)\ \mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}}{-2\pi i\xi}\right]_{-1}^{1} = \frac{i}{2\pi\xi}\left(-2i\sin(2\pi\xi)\right) = \boxed{\frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}}$$

$$\hat{f}(0) = \mathcal{F}(f)(0) = \int_{-1}^{1} 1 = \boxed{2} \quad \rightarrow \quad \hat{f} \text{ je spojitá v } \mathbb{R}$$

Poznámka: Víme, že $\chi_{[-1,1]}(x)$ náleží jak do prostoru L^1, tak do L^2, tedy $\hat{f}$ existuje ve smyslu L^1 i L^2

Zpětná Fourierova transformace aplikovaná na $\hat{f}$:

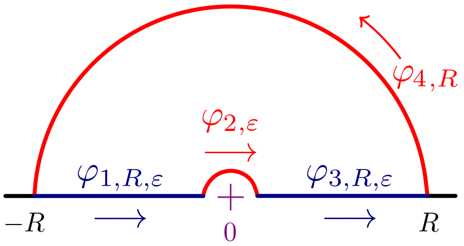
Poznámka: $\hat{f} \notin L^1$, ale $\hat{f} \in L^2$, tedy $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x)$ je počítána ve smyslu L^2

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big(\mathcal{F}(f)\Big)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi\xi}\sin(2\pi\xi)\ \mathrm{e}^{2\pi i x\xi}\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i\xi}\Big(\mathrm{e}^{2\pi i\xi(x+1)} - \mathrm{e}^{2\pi i\xi(x-1)}\Big)\,\mathrm{d}\xi$$

Parametrisujeme si integrál pomocí α: $\quad I_\alpha := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i\xi\alpha}}{2\pi i\xi}\,\mathrm{d}\xi$

- **Horní polorovina, $\alpha > 0$**

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$$



Žádný pól v $\mathrm{Int}(\varphi) \ \Rightarrow\ \int_\varphi = 0$

$$\int_\varphi = \int_{\varphi 1} + \int_{\varphi 2} + \int_{\varphi 3} + \int_{\varphi 4} = 0 \quad \text{(lajdácky zapsáno)}$$

$$\int_{\varphi 1} + \int_{\varphi 3} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{R\to\infty} I_\alpha$$

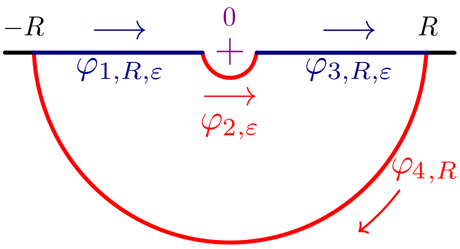
$$\int_{\varphi 2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{\text{(LOOPN1)}} (0-\pi)i\ \mathrm{Res}_0\left(\frac{\mathrm{e}^{2\pi i\xi\alpha}}{2\pi i\xi}\right) = -\pi i\frac{1}{2\pi i} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{\varphi 4} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \qquad \text{(Jordan) pro } \alpha > 0,\ M_R \sim \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = I_\alpha + \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{I_\alpha = \frac{1}{2}}$$

- **Spodní polorovina, $\alpha < 0$**

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$$



Žádný pól v Int(φ) $\Rightarrow$ $\int_\varphi = 0$

$$\int_\varphi = \int_{\varphi 1} + \int_{\varphi 2} + \int_{\varphi 3} + \int_{\varphi 4} = 0 \quad \text{(lajdácky zapsáno)}$$

$$\int_{\varphi 1} + \int_{\varphi 3} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{R \to \infty} I_\alpha$$

$$\int_{\varphi 2} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{\text{(LOOPN1)}} (2\pi - \pi) i \operatorname{Res}_0 \left(\frac{e^{2\pi i \xi \alpha}}{2\pi i \xi} \right) = \pi i \frac{1}{2\pi i} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\varphi 4} \xrightarrow{R \to \infty} 0 \qquad \text{(Jordan) pro } \alpha < 0,\ M_R \sim \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = I_\alpha + \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{I_\alpha = -\frac{1}{2}}$$

- **Třetí případ, $\alpha = 0$**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i \xi} \, d\xi = \lim_{R \to \infty} \left(\text{p. v.} \int_{-R}^{R} \frac{d\xi}{2\pi \xi} \right) = 0}$$

Provedeme dosazení do parametrisovaného integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \xi \alpha}}{2\pi i \xi} \, d\xi \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i \xi} e^{2\pi i \xi (x+1)} \, d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i \xi} e^{2\pi i \xi (x-1)} \, d\xi$$

$$\alpha \longrightarrow (x+1),\ (x-1)$$

$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = x \notin [-1;1]$

$\rightarrow \quad (x+1),\ (x-1)$ mají stejná znaménka (buď $-,-$ nebo $+,+$)

(tedy oba integrály jsou buď $\alpha < 0$ nebo $\alpha > 0$)

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \begin{Bmatrix} x < 1 & -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \\ x > 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = 0$$

$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = x \in (-1;1)$

$\rightarrow \quad x + 1 > 0$ a $x - 1 < 0$, tedy dohromady $(+,-)$

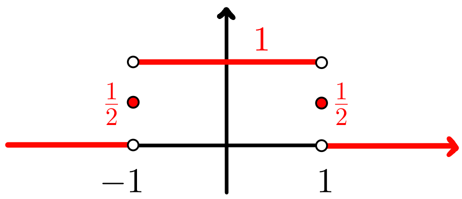
(tedy první integrál dává $\alpha > 0$, druhý dává $\alpha < 0$)

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = 0 \text{ a } x - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x = \ \ 1 \quad \Rightarrow \quad x + 1 > 0 \text{ a } x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Celkem: $$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big(\mathcal{F}(f)\Big)(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-1,1) \\ \frac{1}{2} & x \in \{-1\} \cup \{1\} \\ 0 & x \notin [-1,1] \end{cases}}$$



Poznámka: Vidíme, že $\mathcal{F}^{-1}\Big(\mathcal{F}(f)\Big)(x) = f(x)$ pro s.v. x, takže nám to skoro vyšlo :).

Příklad

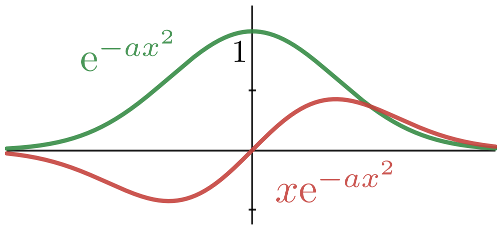
Zadání: Pro $a > 0$ a $x \in \mathbb{R}^n$ spočítejme Fourierovu transformaci funkce f:

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-a|x|^2}$$

✓ ***Řešení:*** Nejprve si všimneme, že $\left(\mathrm{e}^{-ax^2}\right)' = -2ax\,\mathrm{e}^{-ax^2} \quad \to \quad x\,\mathrm{e}^{-ax^2} = -\dfrac{1}{2a}\left(\mathrm{e}^{-ax^2}\right)'$

☒ **Výpočet v 1D ($x \in \mathbb{R}$)**

- Tento typ příkladů se vyplatí počítat nejprve v jedné dimensi (kde je situace častokráte jednodušší) a pak zobecnit na $\mathbb{R}^n$.



$$\mathcal{F}\left(x\,\mathrm{e}^{-ax^2}\right)(\xi) = -\frac{1}{2a}\mathcal{F}\left(\left(\mathrm{e}^{-ax^2}\right)'\right)(\xi) = \text{(Vlastnosti FT)} =$$

$$= -\frac{1}{2a}2\pi i\xi\;\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-ax^2}\right)(\xi) = \dots$$

- Nyní vypočítáme, čemu se rovná $\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-ax^2}\right)(\xi)$

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-ax^2}\right)(\xi) \overset{\text{z def.}}{=\!=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{e}^{-2\pi ix\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a\overbrace{\left(x^2+2x\frac{\pi i\xi}{a}+\frac{\pi^2 i^2\xi^2}{a^2}\right)}^{\text{binom: }(A^2+2AB+B^2)}}\,\mathrm{e}^{a\left(\frac{\pi^2 i^2\xi^2}{a^2}\right)}\,\mathrm{d}x =$$

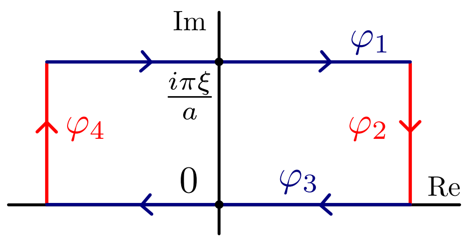
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a\left(x+\frac{\pi i\xi}{a}\right)^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-a\left(x+\frac{\pi i\xi}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x}_{=I} = \dots$$

- Nyní vypočítáme pomocí (Residuové věty), čemu se rovná integrál I, zavedením komplexní funkce:

$$\tilde{f} := \mathrm{e}^{-az^2}$$

Definujme křivky:

$\varphi_1(t) = t + i\dfrac{\pi\xi}{a}$	pro $t \in [-R, R]$;	$\varphi_1'(t) = 1\,\mathrm{d}t$
$\varphi_2(t) = R - it$	pro $t \in \left[-\dfrac{\pi\xi}{a}, 0\right]$;	$\varphi_2'(t) = -i\,\mathrm{d}t$
$\varphi_3(t) = -t + 0i$	pro $t \in [-R, R]$;	$\varphi_3'(t) = -1\,\mathrm{d}t$
$\varphi_4(t) = -R + it$	pro $t \in \left[0, \dfrac{\pi\xi}{a}\right]$;	$\varphi_4'(t) = i\,\mathrm{d}t$



Funkce $\tilde{f}$ jest holomorní na Int φ, tedy (lajdáckým zápisem): $\displaystyle\int_\varphi = \int_{\varphi 1} + \int_{\varphi 2} + \int_{\varphi 3} + \int_{\varphi 4} = 0$

Integrály **nepřispívající** („hamouni jedni!"):

➪ $$\left|\int_{\varphi 2}\tilde{f}\right| = \left|\int_{\varphi 2}\mathrm{e}^{-az^2}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{-\frac{\pi\xi}{a}}^{0}\mathrm{e}^{-a(R-it)^2}\cdot\underbrace{(-i)}_{||i||=1}\,\mathrm{d}t\right| = \left|-\int_{-\frac{\pi\xi}{a}}^{0}\mathrm{e}^{-a\left(R^2-2Rit+i^2t^2\right)}\,\mathrm{d}t\right| =$$

$$= \left|-\int_{-\frac{\pi\xi}{a}}^{0}\mathrm{e}^{-aR^2}\underbrace{\mathrm{e}^{a2Rit}}_{||\,\mathrm{e}^{it}||=1}\mathrm{e}^{at^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \mathrm{e}^{-aR^2}\int_{-\frac{\pi\xi}{a}}^{0}\mathrm{e}^{at^2}\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-aR^2}\cdot\underbrace{\frac{\pi\xi}{a}\,\mathrm{e}^{a\frac{\pi^2\xi^2}{a^2}}}_{\text{konstanta}} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

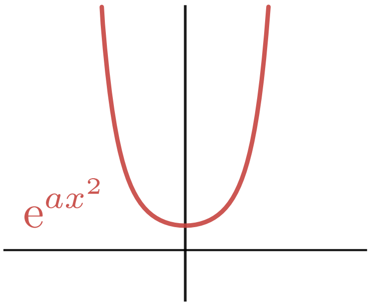
▷ kde jsme v poslední nerovnosti odhadli: $\displaystyle\int_{-\frac{\pi\xi}{a}}^{0}\mathrm{e}^{at^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_{-\frac{\pi\xi}{a}}^{0}\max_{\left[-\frac{\pi\xi}{a},0\right]}\mathrm{e}^{at^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi\xi}{a}}^{0}\mathrm{e}^{a\frac{\pi^2\xi^2}{a^2}}\,\mathrm{d}t$

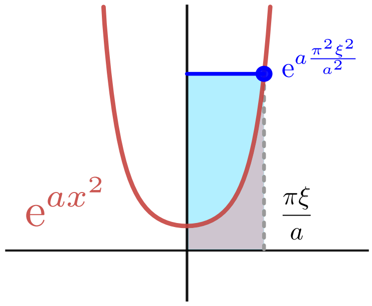
$$\Rightarrow \left|\int_{\varphi 4} \tilde{f}\right| = \left|\int_{\varphi 2} \mathrm{e}^{-az^2}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi\xi}{a}} \mathrm{e}^{-a(-R+it)^2}\cdot \underbrace{(i)}_{||i||=1}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi\xi}{a}} \mathrm{e}^{-a\left(R^2-2Rit+i^2t^2\right)}\,\mathrm{d}t\right| =$$

$$= \left|\int_0^{\frac{\pi\xi}{a}} \mathrm{e}^{-aR^2}\underbrace{\mathrm{e}^{a2Rit}}_{||\,\mathrm{e}^{it}||=1}\mathrm{e}^{at^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \mathrm{e}^{-aR^2}\int_0^{\frac{\pi\xi}{a}} \mathrm{e}^{at^2}\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-aR^2}\cdot \underbrace{\frac{\pi\xi}{a}\,\mathrm{e}^{a\frac{\pi^2\xi^2}{a^2}}}_{\text{konstanta}} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Grafické znázornění odhadu integrálu:

$$\int_0^{\frac{\pi\xi}{a}} \mathrm{e}^{at^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi\xi}{a}} \mathrm{e}^{a\frac{\pi^2\xi^2}{a^2}}\,\mathrm{d}t$$





Integrály **přispívající**: $\Rightarrow \int_{\varphi 1} \tilde{f} \to I;$

$$\Rightarrow \int_{\varphi 3} \tilde{f} = \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-at^2}\cdot(-1)\,\mathrm{d}t \to -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x \to -\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \left[\begin{matrix}\text{tabulkový}\\ \text{integrál}\end{matrix}\right]$$

<u>Celkem tedy dostáváme:</u> $$I + 0 + \left(-\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right) + 0 = 0 \Rightarrow I = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-ax^2}\right)(\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

<u>A dáááááál:</u> $$\mathcal{F}\left(x\,\mathrm{e}^{-ax^2}\right)(\xi) = -\frac{1}{2a}2\pi i\xi\ \mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-ax^2}\right)(\xi) \Rightarrow \boxed{\mathcal{F}\left(x\,\mathrm{e}^{-ax^2}\right)(\xi) = -\frac{\pi i\xi}{a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}}$$

- Nyní nalezené řešení zobecníme do vyšších dimensí!

☒ Výpočet v nD ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$)

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-a|x|^2}\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-a\sum x_j^2}\,\mathrm{e}^{-2\pi i\sum x_j\xi_j}\,\mathrm{d}x = \prod_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax_j^2}\,\mathrm{e}^{-2\pi i x_j\xi_j}\,\mathrm{d}x_j = \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^N \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2|\xi|^2}{a}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-a|x|^2}\right)(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{N}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2|\xi|^2}{a}}}$$

Pro náš příklad dále dává smysl uvažovat $f(x) = x_j\,\mathrm{e}^{-a|x|^2}$ pro $j \in \{1, \dots, N\}$

A tedy nakonec dostáváme: $$\boxed{\boxed{\mathcal{F}\left(x\,\mathrm{e}^{-a|x|^2}\right)(\xi) = -\frac{\pi i\xi_j}{a}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{N}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2|\xi|^2}{a}}}}$$

<u>*Poznámka:*</u> Pro $a = \pi$ je $\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-ax^2}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-\pi x^2}\right)(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi\xi^2}$ ($a = \pi$ je *pevný bod* dané FT)

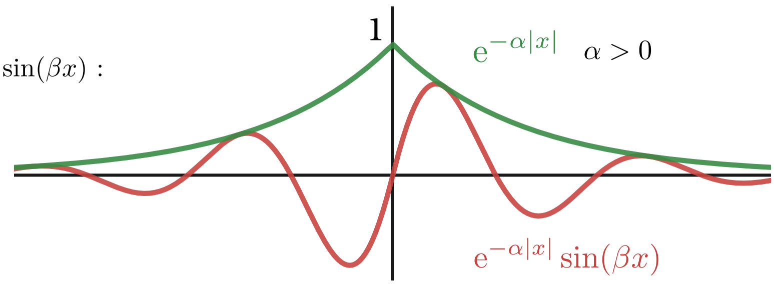
Příklad

Zadání: Pro $\alpha > 0$ a $\beta \in \mathbb{R}$ spočtěte: $\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\sin(\beta x)\right)$

Vysvětlete také, jakou definici Fourierovy transformace používáte a proč.

✓ ***Řešení:***

Nejprve si vykreslíme $\mathrm{e}^{-\alpha|x|}$ a $\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\sin(\beta x)$:



Pro $\alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$ je $f(x) \overset{\text{def.}}{=\!=} \mathrm{e}^{-\alpha|x|}\sin(\beta x) \in L^1(\mathbb{R})$ Proto lze použít standardní definici na $L^1(\mathbb{R})$.

Protože je funkce f lichá, máme:

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\sin(\beta x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|x|}\sin(\beta x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|x|}\sin(\beta x)\left[\cancelto{0}{\cos(2\pi x\cdot\xi)} - i\sin(2\pi x\cdot\xi)\right]\mathrm{d}x =$$

$$= -i\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\overbrace{\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\sin(\beta x)}^{\text{lichá}}\ \overbrace{\sin(2\pi x\xi)}^{\text{lichá}}}_{\text{sudá}}\,\mathrm{d}x = -2i\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\sin(\beta x)\sin(2\pi x\xi)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix}\text{goniometrické}\\ \text{vzorce}\end{bmatrix} = \dots$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{cis}(A+B) = \mathrm{cis}(A) + \mathrm{cis}(B) \quad \Rightarrow \quad \cos(A+B) + i\sin(A+B) = \Big(\cos(A) + i\sin(A)\Big)\Big(\cos(B) + i\sin(B)\Big) \\ \left.\begin{array}{rl} \cos(A+B) &= \cancel{\cos(A)\cos(B)} - \boxed{\sin(A)\sin(B)} \\ -\Big(\cos(A-B) &= \cancel{\cos(A)\cos(B)} + \boxed{\sin(A)\sin(B)}\Big) \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}\Big(\cos(A-B) - \cos(A+B)\Big) \end{array}\right]$$

$$\dots = -2i\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\Big(\cos(\beta x - 2\pi x\xi) - \cos(\beta x + 2\pi x\xi)\Big)\,\mathrm{d}x = -i\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\Big(\cos(\beta x - 2\pi x\xi)\,\mathrm{d}x$$

$$+\, i\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\cos(\beta x + 2\pi x\xi)\Big)\,\mathrm{d}x = -i\,\mathrm{Re}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{e}^{i(\beta x - 2\pi x\xi)}\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{Re}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{e}^{i(\beta x + 2\pi x\xi)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -i\,\mathrm{Re}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{[-\alpha + i(\beta - 2\pi\xi)]x}\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{Re}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{[-\alpha + i(\beta + 2\pi\xi)]x}\,\mathrm{d}x = -i\,\mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{e}^{[-\alpha + i(\beta - 2\pi\xi)]x}}{-\alpha + i(\beta - 2\pi\xi)}\right]_0^{\infty}$$

$$+\, i\,\mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{e}^{[-\alpha + i(\beta + 2\pi\xi)]x}}{-\alpha + i(\beta + 2\pi\xi)}\right]_0^{\infty} = -i\,\mathrm{Re}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}\ \overbrace{\mathrm{e}^{i\beta x}}^{||.||=1}\ \overbrace{\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}}^{||.||=1}}{-\alpha + i(\beta - 2\pi\xi)}\right]_0^{\infty} - \left[\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}\ \overbrace{\mathrm{e}^{i\beta x}}^{||.||=1}\ \overbrace{\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}}^{||.||=1}}{-\alpha + i(\beta + 2\pi\xi)}\right]_0^{\infty}\right) =$$

$$= -i\,\mathrm{Re}\left(0 - \frac{1}{-\alpha + i(\beta - 2\pi\xi)} - 0 + \frac{1}{-\alpha + i(\beta + 2\pi\xi)}\right) = i\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{-\alpha + i(\beta - 2\pi\xi)} - \frac{1}{-\alpha + i(\beta + 2\pi\xi)}\right) =$$

[Nyní zlomky rozšíříme komplexně sdruženým jmenovatelem]

$$\dots = i\,\mathrm{Re}\left(\frac{-\alpha - i(\beta - 2\pi\xi)}{\alpha^2 + (\beta - 2\pi\xi)^2} - \frac{-\alpha - i(\beta + 2\pi\xi)}{\alpha^2 + (\beta + 2\pi\xi)^2}\right) = \frac{i\alpha}{\alpha^2 + (\beta + 2\pi\xi)^2} - \frac{i\alpha}{\alpha^2 + (\beta - 2\pi\xi)^2} = \begin{bmatrix}\text{společný}\\ \text{jmenovatel}\end{bmatrix}\dots$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\sin(\beta x)\right) = -i\frac{8\pi\xi\beta\alpha}{\left(\alpha^2 + (\beta + 2\pi\xi)^2\right)\left(\alpha^2 + (\beta - 2\pi\xi)^2\right)}}$$

Příklad

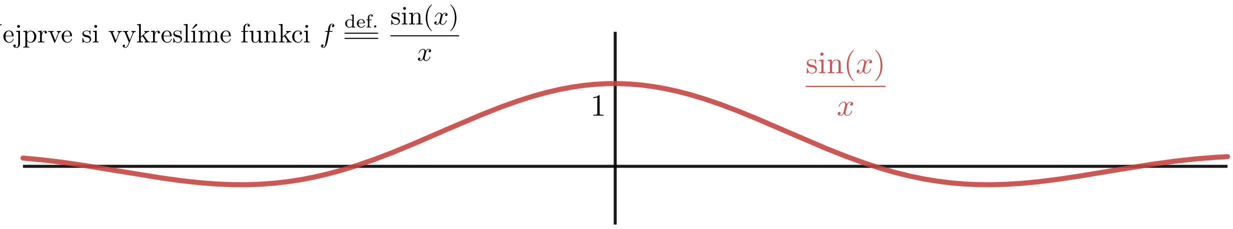
Zadání: Spočtěte

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$$

V jakém smyslu Fourierovu transformaci počítáte? Okomentujte!

✓ ***Řešení:***

Nejprve si vykreslíme funkci $f \overset{\text{def.}}{=\!=} \dfrac{\sin(x)}{x}$



Zjevně $f \in L^2(\mathbb{R})$, ale $f \notin \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)(\xi) = \lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot x}\,\mathrm{d}x$; (Residuovou větou)

f je sudá funkce, tedy máme:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)(\xi) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\sin(x)}{x}\Big(\cos(-2\pi\xi x) + \underbrace{\overset{0}{\cancel{i\sin(-2\pi\xi x)}}}_{\text{lichá}}\Big)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\sin(x)}{x}\cos(-2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\sin(x)\cos(2\pi\xi x)}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix}\text{goniometrické}\\ \text{vzorce}\end{bmatrix} = \dots$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{cis}(A+B) = \mathrm{cis}(A) + \mathrm{cis}(B) \quad\Rightarrow\quad \cos(A+B) + i\sin(A+B) = \big(\cos(A) + i\sin(A)\big)\big(\cos(B)+i\sin(B)\big) \\ \left.\begin{array}{rl} \sin(A+B) & = \boxed{\sin(A)\cos(B)} + \cancel{\cos(A)\sin(B)}\big) \\ +\big(\sin(A-B) & = \boxed{\sin(A)\cos(B)} - \cancel{\cos(A)\sin(B)}\big) \end{array}\right\} \quad\to\quad \sin(A)\cos(B) = \dfrac{1}{2}\big(\sin(A+B) + \sin(A-B)\big) \end{array}\right]$$

$$\dots = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\sin(x+(2\pi\xi x)) + \sin(x-(2\pi\xi x))}{2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\frac{\sin((1+2\pi\xi)x) + \sin((1-2\pi\xi)x)}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2i}\int_{-R}^{R}\frac{i\sin((1+2\pi\xi)x)}{x} + \frac{i\sin((1-2\pi\xi)x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2i}\,\text{p.v.}\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{e}^{ix(1+2\pi\xi)}}{x} + \frac{\mathrm{e}^{ix(1-2\pi\xi)}}{x}\,\mathrm{d}x =$$

[Zlomek se chová jako $^1/_x$ v počátku, tam fce není integrovatelná, proto měníme typ integrálu na p.v.]

Parametrisujeme si integrál pomocí α: $\quad I_\alpha := \lim\limits_{R\to\infty}\displaystyle\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{e}^{ix\,\alpha}}{x}\,\mathrm{d}x$, což nám dá následující 3 případy:

$\alpha > 0 \quad\Rightarrow\quad \xi > -\dfrac{1}{2\pi};\ \xi < \dfrac{1}{2\pi} \quad\Rightarrow\quad \xi \in \left(-\dfrac{1}{2\pi}, \dfrac{1}{2\pi}\right)$ oba 2 zlomky obíhají v horní polorovině

$\alpha < 0 \quad\Rightarrow\quad \xi < -\dfrac{1}{2\pi};\ \xi > \dfrac{1}{2\pi} \quad\Rightarrow\quad \xi \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2\pi}\right)$ 1. zlomek v horní, 2. ve spodní polorovině

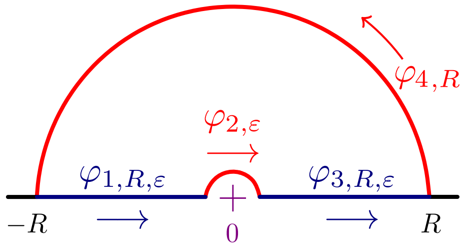
$\quad\Rightarrow\quad \xi \in \left(\dfrac{1}{2\pi}, \infty\right)$ 1. zlomek ve spodní, 2. v horní polorovině

$\alpha = 0 \quad\Rightarrow\quad \xi = -\dfrac{1}{2\pi};\ \xi = \dfrac{1}{2\pi} \quad\Rightarrow$ Jeden integrál dává ze sinu 0, druhý dává ze symetrie vždy $\dfrac{\mathrm{e}^{i2x}}{x}$

tedy oběh v horní polorovině, neb pro druhý integrál vždy $\alpha = 2$

- **Horní polorovina, $\alpha > 0$**

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$$



Žádný pól v $\mathrm{Int}(\varphi)$ $\Rightarrow$ $\int_\varphi = 0$

$$\int_\varphi = \int_{\varphi 1} + \int_{\varphi 2} + \int_{\varphi 3} + \int_{\varphi 4} = 0 \quad \text{(lajdácky zapsáno)}$$

$$\int_{\varphi 1} + \int_{\varphi 3} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{R \to \infty} I_\alpha$$

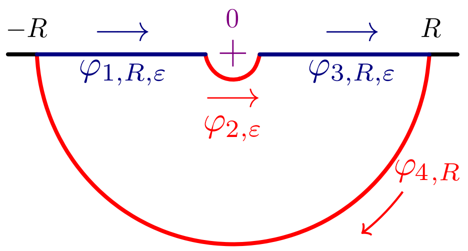
$$\int_{\varphi 2} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{\text{(LOOPN1)}} (0 - \pi) i \operatorname{Res}_0 \left(\frac{e^{ix\,\alpha}}{x} \right) = -\pi i \left(\frac{e^0}{1} \right) = -\pi i$$

$$\int_{\varphi 4} \xrightarrow{R \to \infty} 0 \qquad \text{(Jordan) pro } \alpha > 0,\ M_R \sim \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = I_\alpha + (-\pi i) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{I_\alpha = \pi i}$$

- **Spodní polorovina, $\alpha < 0$**

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$$



Žádný pól v $\mathrm{Int}(\varphi)$ $\Rightarrow$ $\int_\varphi = 0$

$$\int_\varphi = \int_{\varphi 1} + \int_{\varphi 2} + \int_{\varphi 3} + \int_{\varphi 4} = 0 \quad \text{(lajdácky zapsáno)}$$

$$\int_{\varphi 1} + \int_{\varphi 3} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{R \to \infty} I_\alpha$$

$$\int_{\varphi 2} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{\text{(LOOPN1)}} (2\pi - \pi) i \operatorname{Res}_0 \left(\frac{e^{ix\,\alpha}}{x} \right) = \pi i \frac{e^0}{1} = \pi i$$

$$\int_{\varphi 4} \xrightarrow{R \to \infty} 0 \qquad \text{(Jordan) pro } \alpha < 0,\ M_R \sim \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = I_\alpha + \pi i \quad \Longrightarrow \quad \boxed{I_\alpha = -\pi i}$$

Provedeme dosazení do parametrisovaného integrálu:

- $\xi \in \left(-\infty, -\frac{1}{2\pi} \right)$, 1. zlomek v horní, 2. ve spodní polorovině

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2i} \text{ p.v.} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix(1+2\pi\xi)}}{x} + \frac{e^{ix(1-2\pi\xi)}}{x} \, dx = \frac{1}{2i} ((\cancel{\pi i}) + (-\cancel{\pi i})) = \boxed{0}$$

- $\xi \in \left(-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi} \right)$, oba 2 zlomky obíhají v horní polorovině

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2i} \text{ p.v.} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix(1+2\pi\xi)}}{x} + \frac{e^{ix(1-2\pi\xi)}}{x} \, dx = \frac{1}{2i} ((\pi i) + (\pi i)) = \frac{\cancel{2i}\pi}{\cancel{2i}} = \boxed{\pi}$$

- $\xi \in \left(\frac{1}{2\pi}, \infty \right)$, 1. zlomek ve spodní, 2. v horní polorovině

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2i} \text{ p.v.} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix(1+2\pi\xi)}}{x} + \frac{e^{ix(1-2\pi\xi)}}{x} \, dx = \frac{1}{2i} ((-\cancel{\pi i}) + (\cancel{\pi i})) = \boxed{0}$$

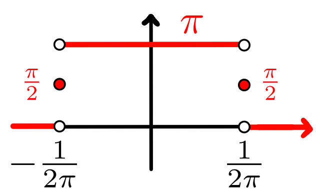
- $\xi \in \left\{ -\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi} \right\}$, 1 zlomek $= 0$, 2. v horní polorovině

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2i} \text{ p.v.} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix(1+2\pi\xi)}}{x} + \frac{e^{ix(1-2\pi\xi)}}{x} \, dx = \frac{1}{2i} (0 + (\pi i)) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

Celkem:

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)(\xi) = \begin{cases} \pi & x \in \left(-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi} \right) \\ \frac{\pi}{2} & x \in \left\{ -\frac{1}{2\pi} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2\pi} \right\} \\ 0 & x \notin \left[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi} \right] \end{cases} = \pi \chi_{\left[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right]} \text{ s.v.}}$$

Kde jsme FT počítali ve smyslu $L^2(\mathbb{R})$, ale vyšla nám i bodově.



Příklad

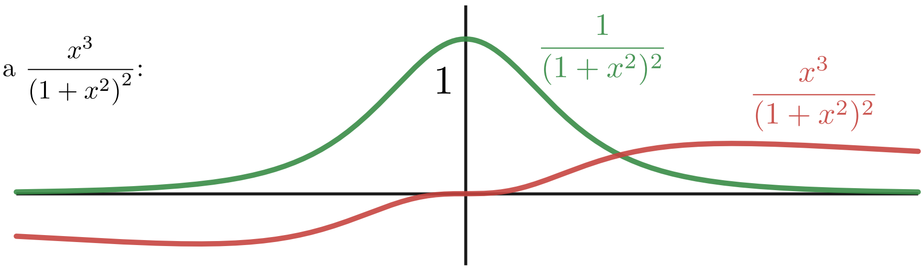
Zadání: Spočtěte $\left((x\in\mathbb{R})\mapsto \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\right)$

$$\mathcal{F}\left(\frac{x^3}{(1+x^2)^2}\right)$$

V jakém smyslu Fourierovu transformaci počítáte? Okomentujte!

✓ ***Řešení:***

Vykreslíme si funkce $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ a $\dfrac{x^3}{(1+x^2)^2}$:



Funkce $f \overset{\text{def.}}{=\!=} \dfrac{x^3}{(1+x^2)^2}$ se na okolí nekonečen chová jako $f\sim\dfrac{1}{x}$, tedy $f\notin L^1(\mathbb{R})$, ale $f\in L^2(\mathbb{R})$

Využijeme definice na $L^2(\mathbb{R})$ $\quad\Rightarrow\quad \mathcal{F}\left(\dfrac{x^3}{(1+x^2)^2}\right)(\xi)=\lim\limits_{R\to\infty}\displaystyle\int_{-R}^{R}\frac{x^3}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot x}\,\mathrm{d}x;$ (Residuovou větou)

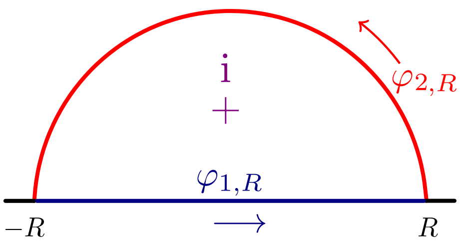
Funkci $g=\dfrac{x^3}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot x}$ si holomorfně rozšíříme na $\mathbb{C}$: $\quad g(z)=\dfrac{z^3}{(1+z^2)^2}\,\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot z}$

Funkce f je lichá, vezmeme $\xi<0\Rightarrow\alpha>0$, integrujeme v horní polorovině a pak liše dodefinujeme pro $\xi>0$.

- Vietovými vztahy nebo skrze diskriminant zjistíme kořeny jmenovatele: $\{-i,i\}$
- Zajímá nás pouze residuum v i, neb bod $-i$ jest mimo integrační konturu horní poloroviny
- Dvojnásobný kořen, $\Rightarrow$ využijeme (2. pravidla pro výpočet residuí) pro $n=2$

- **Horní polorovina, $\alpha>0$**

$$\varphi=\varphi_1\oplus\varphi_2$$



Dvojnásobný pól i v $\mathrm{Int}(\varphi)$

$$\int_\varphi=\int_{\varphi 1}+\int_{\varphi 2}=2\pi i\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}_{a_j}\,g=2\pi i\ \mathrm{Res}_i\,g\qquad\text{(lajdácky)}$$

$$\int_{\varphi 1}\xrightarrow{R\to\infty}\mathcal{F}\left(\frac{x^3}{(1+x^2)^2}\right)(\xi)$$

$$\int_{\varphi 2}\xrightarrow{R\to\infty}0\qquad\text{(Jordan) pro }\alpha>0,\ M_R\sim\frac{1}{R}$$

$$\int_\varphi=\int_{\varphi 1}+0\xrightarrow{R\to\infty}\boxed{\mathcal{F}\left(\frac{x^3}{(1+x^2)^2}\right)(\xi)=2\pi i\ \mathrm{Res}_i\,g}$$

$$2\pi i\ \mathrm{Res}_i\,g=2\pi i\ \lim_{z\to a}\frac{1}{(n-1)!}\left(g(z)(z-a)^n\right)^{(n-1)}=2\pi i\ \lim_{z\to i}\left(\frac{z^3}{(1+z^2)^2}\,\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot z}(z-i)\right)'=$$

$$=2\pi i\ \lim_{z\to i}\left(\frac{z^3}{\cancel{(z-i)^2}(z+i)^2}\,\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot z}\cancel{(z-i)^2}\right)'=2\pi i\ \lim_{z\to i}\left(\frac{z^3}{(z+i)^2}\,\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot z}\right)'=$$

$$=2\pi i\ \lim_{z\to i}\left(\frac{z^3}{(z+i)^2}\right)'\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot z}+2\pi i\ \lim_{z\to i}\left(\frac{z^3}{(z+i)^2}\right)\left(\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot z}\right)'=\dots$$

$$2\pi i \lim_{z\to i}\left(\frac{z^3}{(z+i)^2}\right)' e^{-2\pi i\xi\cdot z} = 2\pi i \lim_{z\to i}\left(\frac{3z^2(z+i)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(z+i)}z^3}{(z+i)^{\cancel{4}3}}\right) e^{-2\pi i\xi\cdot z} = 2\pi i\left(\frac{3(-1)\cancel{(2i)} - 2\cancel{(-i)}^{-1}}{(2i)^{\cancel{3}2}}\right) e^{2\pi\xi} =$$

$$= 2\pi i\frac{-3+1}{4(-1)} e^{2\pi\xi} = 2\pi i\frac{1}{2} e^{2\pi\xi} = \pi i\ e^{2\pi\xi}$$

$$2\pi i \lim_{z\to i}\left(\frac{z^3}{(z+i)^2}\right)\left(e^{-2\pi i\xi\cdot z}\right)' = 2\pi i \lim_{z\to i}\left(\frac{z^3}{(z+i)^2}\right)\left(e^{-2\pi i\xi\cdot z}\right)(-2\pi i\xi) = 2\pi i\left(\frac{-i}{(2i)^2}\right)\left(e^{2\pi\xi}\right)(-2\pi i\xi) =$$

$$= \left(\frac{2\pi(-2\pi i\xi)}{(2i)^2}\right)\left(e^{2\pi\xi}\right) = \frac{-4\pi^2 i\xi}{4(-1)} e^{2\pi\xi} = \pi^2 i\xi\, e^{2\pi\xi}$$

Pro $\xi < 0$ tedy máme: $\quad \mathcal{F}\left(\frac{x^3}{(1+x^2)^2}\right)(\xi) = 2\pi i\ \mathrm{Res}_i\, g = \pi i\ e^{2\pi\xi} + \pi^2 i\, e^{2\pi\xi} = (\pi + \pi^2\xi) i\, e^{2\pi\xi}$

Pro $\xi = 0$ máme z lichosti fce f: $\quad \mathcal{F}\left(\frac{x^3}{(1+x^2)^2}\right)(0) = 0$

Pro $\xi > 0$ liše doplníme: $\quad \mathcal{F}\left(\frac{x^3}{(1+x^2)^2}\right)(\xi) = (-1)(\pi - \pi^2\xi) i\, e^{-2\pi\xi} = (\pi^2\xi - \pi) i\, e^{-2\pi\xi}$

Celkem: $\boxed{\mathcal{F}\left(\frac{x^3}{(1+x^2)^2}\right)(\xi) = \left(\pi^2\xi - \mathrm{sgn}(\xi)\pi\right) i\, e^{-2\pi|\xi|}}$

Příklad

Zadání: Uvažujte funkci $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1+x^3}{1+x^4}$$

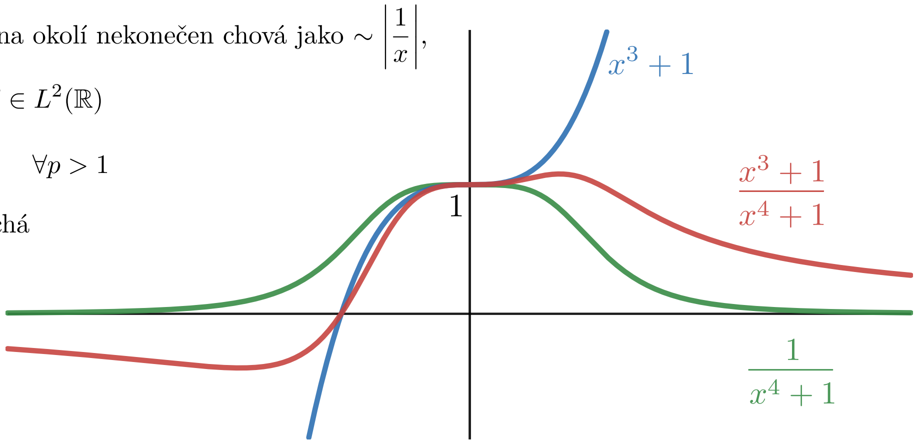
V jakých Lebesgueových prostorech tato funkce leží? Spočtěte její Fourierovu transformaci a vysvětlete, v jakém smyslu provádíte výpočet.

✓ ***Řešení:***

Vykreslíme si funkce x^3+1, $\frac{1}{x^4+1}$ a $\frac{x^3+1}{x^4+1}$:

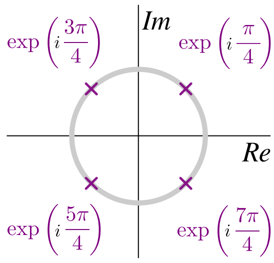
- Funkce $F(x) = \frac{x^3+1}{x^4+1}$ se na okolí nekonečen chová jako $\sim \left|\frac{1}{x}\right|$,

  tedy $F \notin L^1(\mathbb{R})$, ale $F \in L^2(\mathbb{R})$
- Přesněji $\frac{x^3+1}{x^4+1} \in L^p(\mathbb{R}), \quad \forall p > 1$
- $F(x)$ **není** ani sudá ani lichá



Využijeme definice FT na $L^2(\mathbb{R})$ $\quad\Rightarrow\quad \mathcal{F}(F(x))(\xi) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{x^3+1}{x^4+1} e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx$; (Residuovou větou)

Funkci $G(x) = \frac{x^3+1}{x^4+1}\, e^{-2\pi i\xi\cdot x}$ holomorfně rozšíříme na $\mathbb{C}$: $\quad G(z) = \frac{z^3+1}{z^4+1}\, e^{-2\pi i\xi\cdot z}$



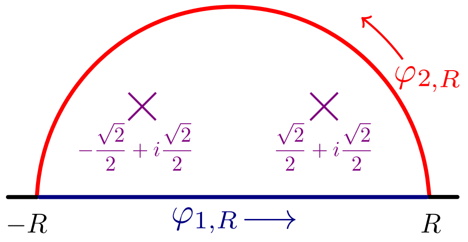
Vypočítáme kořeny jmenovatele: $\quad \sqrt[4]{z} = -1 \quad \to \quad \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{|z|}\exp\left(i\left[\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{4}\right]\right)$

Kořeny jsou: $\quad \begin{Bmatrix} a_1 = \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}, & a_2 = \exp\left(i\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}, \\ a_3 = \exp\left(i\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}, & a_4 = \exp\left(i\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2} \end{Bmatrix}$

- Pro $\xi < 0$ máme $\alpha > 0$ obíháme tedy v horní polorovině
- Pro $\xi > 0$ máme $\alpha < 0$ obíháme tedy ve spodní polorovině
- Všechny kořeny jsou jednonásobné, $\Rightarrow$ využijeme (4. pravidla pro výpočet residuí)

- **Horní polorovina, $\alpha > 0$**

$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$



2 póly v Int(φ): a_1 a a_2

$$\int_\varphi = \int_{\varphi 1} + \int_{\varphi 2} = 2\pi i \sum_{j=1}^{2} \mathrm{Res}_{a_j} G \qquad \text{(lajdácky zapsáno)}$$

$$\int_{\varphi 1} \xrightarrow{R\to\infty} \mathcal{F}\left(F(x)\right)(\xi)$$

$$\int_{\varphi 2} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \qquad \text{(Jordan) pro } \alpha > 0,\ M_R \sim \frac{1}{R}$$

$$\int_\varphi = \int_{\varphi 1} + 0 \xrightarrow{R\to\infty} \boxed{\mathcal{F}\left(F(x)\right)(\xi) = 2\pi i \sum_{j=1}^{2} \mathrm{Res}_{a_j} G}$$

$\boxed{\xi < 0}$

$$2\pi i \sum_{j=1}^{2} \mathrm{Res}_{a_j} G = 2\pi i \left[\left(\frac{z^3+1}{(z^4+1)'}\exp(-2\pi i\xi z)\right)\Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} + \left(\frac{z^3+1}{(z^4+1)'}\exp(-2\pi i\xi z)\right)\Big|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right] =$$

$$= 2\pi i \left[\left(\frac{z^3+1}{4z^3}\exp(-2\pi i\xi z)\right)\Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} + \left(\frac{z^3+1}{4z^3}\exp(-2\pi i\xi z)\right)\Big|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right] =$$

$$= 2\pi i \left[\left(\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4z^3}\right)\exp(-2\pi i\xi z)\right)\Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} + \left(\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4z^3}\right)\exp(-2\pi i\xi z)\right)\Big|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right] =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left[\left(1+\frac{1}{e^{i\frac{3\cdot\pi}{4}}}\right)\exp\left(-2\pi i\xi\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\right] + \frac{\pi i}{2}\left[\left(1+\frac{1}{e^{i\frac{3\cdot 3\pi}{4}}}\right)\exp\left(-2\pi i\xi\, e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left[\left(1+e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)\exp\left(-2\pi i\xi\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\right] + \frac{\pi i}{2}\left[\left(1+e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\exp\left(-2\pi i\xi\, e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left[\left(1+e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)\exp\left(-2\pi i\xi\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)\right)\right] + \frac{\pi i}{2}\left[\left(1+e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)\exp\left(-2\pi i\xi\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left[\left(1+e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)\ e^{\sqrt2\pi\xi}\, e^{-i\sqrt2\pi\xi}\right] + \frac{\pi i}{2}\left[\left(1+e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)\ e^{\sqrt2\pi\xi}\, e^{i\sqrt2\pi\xi}\right] =$$

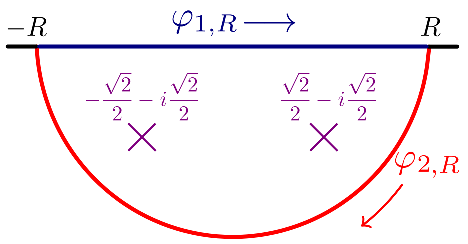
$$= \frac{\pi i}{2}\, e^{\sqrt2\pi\xi}\left[1+\left(-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}\right)\right] e^{-i\sqrt2\pi\xi} + \frac{\pi i}{2}\, e^{\sqrt2\pi\xi}\left[1+\left(\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}\right)\right] e^{i\sqrt2\pi\xi} =$$

$$= \frac{\pi i}{4}\, e^{\sqrt2\pi\xi}\left[2-\sqrt2-i\sqrt2\right]\left(\cos(\sqrt2\pi\xi)-i\sin(\sqrt2\pi\xi)\right) + \frac{\pi i}{4}\, e^{\sqrt2\pi\xi}\left[2+\sqrt2-i\sqrt2\right]\left(\cos(\sqrt2\pi\xi)+i\sin(\sqrt2\pi\xi)\right) =$$

$$= \frac{\pi i}{4}\, e^{\sqrt2\pi\xi}\left[\left(4-2i\sqrt2\right)\cos(\sqrt2\pi\xi)+\left(2\sqrt2\right) i\sin(\sqrt2\pi\xi)\right] = \boxed{\pi i\, e^{\sqrt2\pi\xi}\left[\left(1-i\frac{\sqrt2}{2}\right)\cos(\sqrt2\pi\xi)+i\frac{\sqrt2}{2}\sin(\sqrt2\pi\xi)\right]}$$

- **Spodní polorovina, $\alpha < 0$**

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$$



2 póly v $\mathrm{Int}(\varphi)$: a_3 a a_4

$$\int_\varphi = \int_{\varphi 1} + \int_{\varphi 2} = -2\pi i \sum_{j=3}^{4} \mathrm{Res}_{a_j} G \qquad \text{(lajdácky zapsáno)}$$

$$\int_{\varphi 1} \xrightarrow{R\to\infty} \mathcal{F}\left(F(x)\right)(\xi)$$

$$\int_{\varphi 2} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \qquad \text{(Jordan) pro } \alpha > 0,\ M_R \sim \frac{1}{R}$$

$$\int_\varphi = \int_{\varphi 1} + 0 \xrightarrow{R\to\infty} \boxed{\mathcal{F}\left(F(x)\right)(\xi) = -2\pi i \sum_{j=3}^{4} \mathrm{Res}_{a_j} G}$$

$\boxed{\boldsymbol{\xi > 0}}$

$$-2\pi i \sum_{j=3}^{4} \mathrm{Res}_{a_j} G = -2\pi i \left[\left(\frac{z^3+1}{(z^4+1)'} \exp\left(-2\pi i \xi z\right) \right) \Big|_{z = \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}}} + \left(\frac{z^3+1}{(z^4+1)'} \exp\left(-2\pi i \xi z\right) \right) \Big|_{z = \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{4}}} \right] =$$

$$= -2\pi i \left[\left(\frac{z^3+1}{4z^3} \exp\left(-2\pi i \xi z\right) \right) \Big|_{z = \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}}} + \left(\frac{z^3+1}{4z^3} \exp\left(-2\pi i \xi z\right) \right) \Big|_{z = \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{4}}} \right] =$$

$$= -2\pi i \left[\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4z^3} \right) \exp\left(-2\pi i \xi z\right) \right) \Big|_{z = \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}}} + \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4z^3} \right) \exp\left(-2\pi i \xi z\right) \right) \Big|_{z = \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{4}}} \right] =$$

$$= -\frac{\pi i}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^{i\frac{3\cdot 5\pi}{4}}} \right) \exp\left(-2\pi i \xi\, \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}}\right) \right] - \frac{\pi i}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^{i\frac{3\cdot 7\pi}{4}}} \right) \exp\left(-2\pi i \xi\, \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{4}}\right) \right] =$$

$$= -\frac{\pi i}{2} \left[\left(1 + \mathrm{e}^{-i\frac{7\pi}{4}} \right) \exp\left(-2\pi i \xi\, \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}}\right) \right] - \frac{\pi i}{2} \left[\left(1 + \mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{4}} \right) \exp\left(-2\pi i \xi\, \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{4}}\right) \right] =$$

$$= -\frac{\pi i}{2} \left[\left(1 + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \right) \exp\left(-2\pi i \xi \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)\right) \right] - \frac{\pi i}{2} \left[\left(1 + \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} \right) \exp\left(-2\pi i \xi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)\right) \right] =$$

$$= -\frac{\pi i}{2} \left[\left(1 + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \right) \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\pi\xi}\, \mathrm{e}^{i\sqrt{2}\pi\xi} \right] - \frac{\pi i}{2} \left[\left(1 + \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} \right) \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\pi\xi}\, \mathrm{e}^{-i\sqrt{2}\pi\xi} \right] =$$

$$= -\frac{\pi i}{2}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\pi\xi} \left[1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \mathrm{e}^{i\sqrt{2}\pi\xi} - \frac{\pi i}{2}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\pi\xi} \left[1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \mathrm{e}^{-i\sqrt{2}\pi\xi} =$$

$$= -\frac{\pi i}{4}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\pi\xi} \left[2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} \right] \left(\cos(\sqrt{2}\pi\xi) + i\sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right) - \frac{\pi i}{4}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\pi\xi} \left[2 - \sqrt{2} + i\sqrt{2} \right] \left(\cos(\sqrt{2}\pi\xi) - i\sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right) =$$

$$= -\frac{\pi i}{4}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\pi\xi} \left[\left(4 + 2i\sqrt{2} \right) \cos(\sqrt{2}\pi\xi) + \left(2\sqrt{2} \right) i \sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right]$$

$$= \boxed{-\pi i\, \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\pi\xi} \left[\left(1 + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos(\sqrt{2}\pi\xi) + i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right]}$$

Celkem tedy máme:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathcal{F}\left(F(x)\right)(\xi) = \pi i\, \mathrm{e}^{\sqrt{2}\pi\xi} \left[\left(1 - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos(\sqrt{2}\pi\xi) + i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right] && \text{pro } \xi < 0 \\ &\mathcal{F}\left(F(x)\right)(\xi) = -\pi i\, \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\pi\xi} \left[\left(1 + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos(\sqrt{2}\pi\xi) + i\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right] && \text{pro } \xi > 0 \\ &\mathcal{F}\left(F(x)\right)(\xi) = \mathrm{NaN} \quad \text{integrál diverguje} && \text{pro } \xi = 0 \end{aligned}}$$

Příklad

Zadání: Uvažujte funkci $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{|x|^2}{1 + |x|^4}.$$

V jakých Lebesgueových prostorech tato funkce leží? Spočtěte její Fourierovu transformaci a vysvětlete, v jakém smyslu provádíte výpočet.

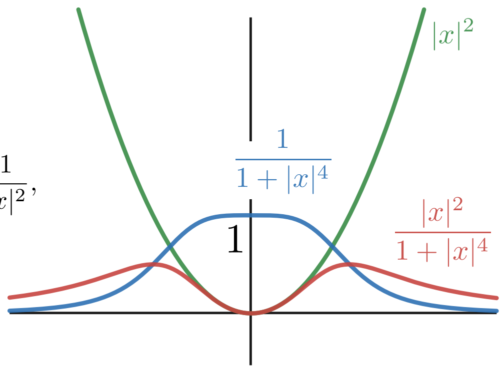
Poznámka: Připomeňme, že pro $f(r) = F(x)$ a pro tři prostorové dimenze platí, že $\mathcal{F}(T_F) = T_h$, kde

$$h(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(r) \frac{2r}{|\xi|} \sin(2\pi r|\xi|)\, \mathrm{d}r$$

(pokud limita existuje). Odůvodněte, že daná limita opravdu existuje!

✓ ***Řešení:***

Vykreslíme si v 1D funkce $|x|^2$, $\dfrac{1}{1+|x|^4}$ a $\dfrac{|x|^2}{1+|x|^4}$:



- Funkce $F(x) = \dfrac{|x|^2}{1+|x|^4}$ se na okolí nekonečen chová jako $\sim \dfrac{1}{|x|^2}$,

  ve 3D je hraniční pokles $\dfrac{1}{|x|^3}$ a my máme $\sim \dfrac{1}{|x|^2}$

- Tedy $\boxed{\dfrac{|x|^2}{1+|x|^4} \in L^p(\mathbb{R}^3), \quad \forall p > \frac{3}{2}}$

  protože $\left(\dfrac{1}{|x|^2}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} = \dfrac{1}{|x|^{3+\varepsilon}} < \dfrac{1}{|x|^3}$ na okolí nekonečen. $\frac{3}{2} > 1 \quad \Rightarrow \quad F \notin L^1(\mathbb{R}^3)$, ale $F \in L^2(\mathbb{R}^3)$

Proto
$$\mathcal{F}(F(x))(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{B_r} F(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i \langle x,\xi\rangle}\, \mathrm{d}x$$

To, že existuje $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_0^R f(r) \frac{2r}{|\xi|} \sin(2\pi r|\xi|)\, \mathrm{d}r$, plyne z toho, že daný integrál $\displaystyle\left(\int_0^\infty \frac{P(r)}{Q(r)} \sin(r)\, \mathrm{d}r\right)$ existuje v Newtonově smyslu pro st. $P \leq$ st. $Q - 1$.

Poznámka: Případně lze argumentovat důkazem *Věty o Fourierově transformaci radiálně symetrické distribuce (druhá věta)*

Počítejme tedy ve smyslu výše uvedené limity:

$$h(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(r) \frac{2r}{|\xi|} \sin(2\pi r|\xi|)\, \mathrm{d}r = \lim_{R\to\infty} \frac{2}{|\xi|} \int_0^R \frac{r^3}{1+r^4} \sin(2\pi r|\xi|)\, \mathrm{d}r = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{|\xi|} \int_{-R}^R \frac{r^3}{1+r^4} \sin(2\pi r|\xi|)\, \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{1}{|\xi|} \lim_{R\to\infty} \mathrm{Im} \underbrace{\int_{-R}^R \frac{r^3}{1+r^4} \mathrm{e}^{2\pi i r|\xi|}\, \mathrm{d}r}_{J} = \text{(Residuovou větou)}$$

Poznámka: Poslední integrál existuje jako *Newtonův*, případně jako *zobecněný Lebesgueův*

Pro $\boxed{\xi = 0} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(T_F)(\xi) = 0 \quad$ (integrujeme nulové siny, $\sin(0) = 0$)

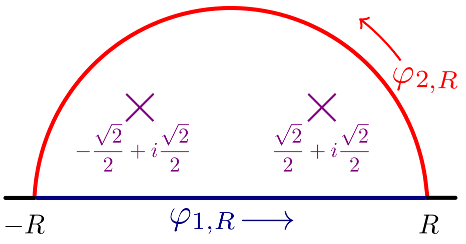
Pro $\boxed{\xi \neq 0}$ máme díky absolutní hodnotě $|\xi|$ automaticky splněno, že vždy $\alpha > 0$

Vypočítáme kořeny jmenovatele: $\quad \sqrt[4]{z} = -1 \quad \to \quad \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{|z|}\exp\left(i\left[\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{4}\right]\right)$

Kořeny jsou: $\left\{ \begin{array}{ll} a_1 = \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, & a_2 = \exp\left(i\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a_3 = \exp\left(i\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, & a_4 = \exp\left(i\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\}$ ... viz. (Předchozí příklad)

- **Horní polorovina, $\alpha > 0$**

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$$



2 póly v $\mathrm{Int}(\varphi)$: a_1 a a_2

$$\int_\varphi = \int_{\varphi 1} + \int_{\varphi 2} = 2\pi i \sum_{j=1}^{2} \mathrm{Res}_{a_j} f(r) \qquad \text{(lajdácky zapsáno)}$$

$$\int_{\varphi 1} \xrightarrow{R\to\infty} J$$

$$\int_{\varphi 2} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \qquad \text{(Jordan) pro } \alpha > 0,\ M_R \sim \frac{1}{R}$$

$$\int_\varphi = \int_{\varphi 1} + 0 \xrightarrow{R\to\infty} \boxed{J = 2\pi i \sum_{j=1}^{2} \mathrm{Res}_{a_j} G}$$

$$2\pi i \sum_{j=1}^{2} \mathrm{Res}_{a_j} f(r) = 2\pi i \left[\left(\frac{r^3}{(r^4+1)'} \exp\left(2\pi i|\xi|r\right) \right)\Bigg|_{r=e^{i\frac{\pi}{4}}} + \left(\frac{r^3}{(r^4+1)'} \exp\left(2\pi i|\xi|r\right) \right)\Bigg|_{r=e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right] =$$

$$= 2\pi i \left[\left(\frac{\cancel{r^3}}{4\cancel{r^3}} \exp\left(2\pi i|\xi|r\right) \right)\Bigg|_{r=e^{i\frac{\pi}{4}}} + \left(\frac{\cancel{r^3}}{4\cancel{r^3}} \exp\left(2\pi i|\xi|r\right) \right)\Bigg|_{r=e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right] =$$

$$= \frac{\pi i}{2} \exp\left(\cancel{2}\pi i|\xi| \left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \right) \right) + \frac{\pi i}{2} \exp\left(\cancel{2}\pi i|\xi| \left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \right) \right) =$$

$$= \frac{\pi i}{2} \exp\left(-\sqrt{2}\pi|\xi| + i\sqrt{2}\pi|\xi| \right) + \frac{\pi i}{2} \exp\left(-\sqrt{2}\pi|\xi| - i\sqrt{2}\pi|\xi| \right) =$$

$$= \frac{\pi i}{2} \exp\left(-\sqrt{2}\pi|\xi| \right) \left[\exp\left(i\sqrt{2}\pi|\xi| \right) + \exp\left(-i\sqrt{2}\pi|\xi| \right) \right] =$$

$$= \frac{\pi i}{2} \exp\left(-\sqrt{2}\pi|\xi| \right) \left[\cos\left(\sqrt{2}\pi|\xi| \right) + \cancel{i\sin\left(\sqrt{2}\pi|\xi| \right)} + \cos\left(\sqrt{2}\pi|\xi| \right) - \cancel{i\sin\left(\sqrt{2}\pi|\xi| \right)} \right] =$$

$$= \pi i \exp\left(-\sqrt{2}\pi|\xi| \right) \cos\left(\sqrt{2}\pi|\xi| \right) = J$$

$$\mathcal{F}\left(T_F\right) = T_h = \frac{1}{|\xi|} \mathrm{Im}\, J = \mathrm{Im}\, i \frac{\pi}{|\xi|} \exp\left(-\sqrt{2}\pi|\xi| \right) \cos\left(\sqrt{2}\pi|\xi| \right) = \boxed{\frac{\pi}{|\xi|}\, e^{-\sqrt{2}\pi|\xi|} \cos\left(\sqrt{2}\pi|\xi| \right)}$$

Celkem tedy máme:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{F}\left(T_F\right)(\xi) = 0 & \text{pro } \xi = 0 \\ \mathcal{F}\left(T_F\right)(\xi) = \frac{\pi}{|\xi|}\, e^{-\sqrt{2}\pi|\xi|} \cos\left(\sqrt{2}\pi|\xi| \right) & \text{pro } \xi \neq 0 \end{array}}$$

... vidíme, že $\mathcal{F}\left(T_F\right)(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^3)$
a dokonce $\mathcal{F}\left(T_F\right)(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^3)$

4 Theorie distribucí

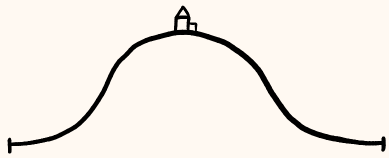
Definice 5 (Nosič funkce)**.**

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$

Nosič funkce je množina $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega,\ f(x) \neq 0\}}^{\text{uzávěr}}$.

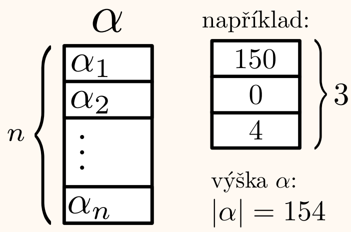
→ automaticky je to uzavřená množina

→ pokud je $\operatorname{supp} f$ navíc omezený, je i kompaktní (kpt.)



Definice 6 (Multiindex)**.**

- Multiindex: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\quad \alpha_j \in \mathbb{N}_0$
- Výška (stupeň) multiindexu = jeho celkový řád: $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$
- Pro $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\quad D^\alpha f(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ \ldots \ \partial^{\alpha_n} x_n}$
- Pro $x \in \mathbb{R}^n : x^\alpha = (x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n})$



Definice 7 (Základní vlastnosti distribucí)**.**

- $\boxed{\mathcal{D}(\Omega)}$ … prostor funkcí $C^\infty(\Omega)$ s kpt. nosičem v Ω otevřená+souvislá (**prostor testovacích fcí**)

$$D(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega);\ \operatorname{supp} f \text{ je kompaktní podmnožina } \Omega\}$$

Například: $\quad \Omega = \mathbb{R},\ f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{na } (-1,1) \\ 0 & \text{jinde} \end{array} \right\}$, kde $\operatorname{supp} f = [-1,1]$

- **Konvergence** v $\mathcal{D}(\Omega)$:

  Posloupnost $\{\varphi_m\}$ konverguje k fci φ v $\mathcal{D}(\Omega)$: $\quad \varphi_m \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\longrightarrow} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_m - \varphi \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\longrightarrow} 0$, pokud:

  1) $\exists K \subset \Omega$ kompakt, že: $\operatorname{supp}(\varphi_m - \varphi) \subset K \qquad \forall m \in \mathbb{N}$
  2) $D^\alpha \varphi_m \rightrightarrows D^\alpha \varphi \quad \Leftrightarrow \quad D^\alpha(\varphi_m - \varphi) \rightrightarrows 0 \qquad$ pro každý multiindex α

- $\boxed{\mathcal{D}'(\Omega)}$ … množina všech spojitých lineárních funkcionálů nad $\mathcal{D}(\Omega)$, (**prostor distribucí**)

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R},\ T \text{ je spojité lineární zobrazení}\}$$

- **Spojitost funkcionálu** v $\mathcal{D}(\Omega)$: $\quad \varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\longrightarrow} \varphi \quad \Rightarrow \quad \langle T, \varphi_k \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$
- **Rovnost distribucí**: $\quad T_1 = T_2$ v $\mathcal{D}'(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Poznámka 1: Platí, že $\mathcal{D}'(\Omega)$ je duální prostor k $\mathcal{D}(\Omega)$ (tzv. algebraický duál)

Poznámka 2: Ekvivalentní značení: $\langle T, \varphi \rangle \equiv T(\varphi)$

Definice 8 (Základní distribuce).

- **Regulární distribuce** T_f: (tj. dané „obyčejnou funkcí” f)

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) = \{f \in \Omega \to \mathbb{R}, \forall \text{ kpt. } K \subset \Omega : f \in L^1(K)\}$$

$$\boxed{\text{Pro } \ f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \ \text{ def. } \ T_f \in \mathcal{D}'(\Omega) \ := \langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f \cdot \varphi \,\mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)} \qquad \text{(dualita)}$$

Kde $T_f \to$ nazýváme *regulární distribuce s hustotou* f, f je *generující funkce distribuce* T_f

Poznámka: $T_f = T_g \quad \Leftrightarrow \quad f = g$ skoro všude v Ω

- **Diracova distribuce** δ_x: Pro $x \in \mathbb{R}^n$ def. $\langle \delta_x, \varphi\rangle = \varphi(x) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Poznámka 1: δ_x není regulární distribuce, neodpovídá žádné (generující) funkci

Poznámka 2: Často značíme $\delta \equiv \delta_0$

- **Distribuce ve smyslu hlavní hodnoty** $T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}}$:

$$\text{Pro } x \in \mathbb{R} \quad \text{def.} \quad T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \ := \left\langle T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}}, \varphi \right\rangle = \mathrm{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Vzorečky: Základní operace s distribucemi

Posunutí τ_b o $b \in \mathbb{R}^n$, (kde $\Omega = \mathbb{R}^n$):

- $\langle \tau_b T, \varphi\rangle = \langle T, \tau_{-b}\,\varphi\rangle \quad \equiv \quad [\tau_{-b}\,\varphi](x) = \varphi(x-b)$

Škálování S_λ koeficientem $\lambda > 0$, (kde $\Omega = \mathbb{R}^n$):

- $\left\langle S_\lambda T, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \dfrac{1}{\lambda^n} S_{\frac{1}{\lambda}}\,\varphi \right\rangle \quad \equiv \quad \left[S_{\frac{1}{\lambda}}\,\varphi\right](x) = \varphi\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$

Součin distribuce s hladkou funkcí:

- $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $a \in C^\infty(\Omega)$, pak $aT \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad \longrightarrow \quad aT(\varphi) = T(a\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

  Příklad: $x\delta_0 : \quad \langle x\delta_0, \varphi\rangle = \langle \delta_0, x\varphi\rangle = x\varphi(x)\big|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x\delta_0 \equiv 0}}$

Derivace distribuce:

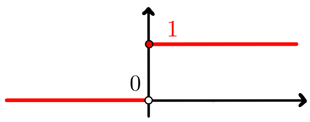
- $T \in \mathcal{D}'(\Omega), \alpha$ multiindex dimense $N, \left(\Omega \subset \mathbb{R}^N\right)$: $\quad \langle D^\alpha T, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

  Zobrazení $T \mapsto D^\alpha T$ jest spojité vzhledem k $\rightharpoonup^*$

  Příklad: Derivace *Diracovy distribuce*: $\quad \langle D^\alpha \delta, \varphi\rangle = \left\langle \delta, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \right\rangle = (-1)\,[D^\alpha \varphi](0)$

  $\to$ speciálně pro $d = 1$, (tedy $\Omega = \mathbb{R}$) : $\quad \left\langle \delta^{(n)}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$

  Příklad: $Y(x) = \chi_{[0,\infty)} = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in [0,\infty) \\ 0 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$



  $Y \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \ldots \exists$ regulární distribuce T_Y

$$\langle T_Y', \varphi\rangle = \langle T_Y, -\varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} Y\varphi' \,\mathrm{d}x = -\int \varphi' \,\mathrm{d}x = -[\varphi]_0^\infty = -(0 - \varphi(0)) = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

Příklad

Zadání: Zjednodušte zápis distribuce $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$: $\quad x^k D^n \delta, \quad$ kde $\delta \equiv \delta_0; \quad k, n \in \mathbb{N}$

✓ ***Řešení:***

$$\langle x^k D^n \delta,\, \varphi \rangle = \langle D^n \delta,\, x^k \varphi \rangle = \langle \delta,\, (-1)^n D^n x^k \varphi \rangle =$$

$$= (-1)^n \left\langle \delta,\, \sum_{j=0}^{n} D^j x^k D^{(n-j)} \varphi \binom{n}{j} \right\rangle =$$

$$= \text{zůstane jen jeden člen } j = k, \text{ protože } \begin{cases} j < k & \ldots \text{po derivování zůstanou členy } x^{k-n} \\ & \quad \text{kde dosadíme 0, kvůli Diracovi} \\ j > k & \ldots \text{derivací se dostaneme na 0} \end{cases}$$

$$= \left[(-1)^k \binom{n}{k} k!\, D^{n-k} \varphi \right] (0) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\begin{array}{ll} x^k D^n \delta = (-1)^k \binom{n}{k} k!\, \delta^{(n-k)} & \text{pro } k \le n \\ 0 & \text{pro } k > n \end{array}}$$

Definice 9 (Hvězdička slabá konvergence)**.**

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Pak $T_k \rightharpoonup^* T$ (T_k konverguje slabě* k T) v $\mathcal{D}'(\Omega)$, pokud

$$T_k(\varphi) = \langle T_k,\, \varphi \rangle \xrightarrow[k \to \infty]{} \langle T,\, \varphi \rangle = T(\varphi) \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Analogicky zavádíme (slabý*) součet řady distribucí $\sum_{k=1}^{\infty} T_k =: T$ podmínkou:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \langle T_k,\, \varphi \rangle = \langle T,\, \varphi \rangle \qquad \text{pro každou } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Věta 12. *Charakterizace slabé* konvergence distribucí*

Pokud $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \exists \lim_{k \to \infty} T_k(\varphi)$ vlastní, pak $T(\varphi) := \lim_{k \to \infty} T_k(\varphi)$ splňuje $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a $T_k \rightharpoonup^* T$

Poznámka: Pojem slabá* limita pak odkazuje pouze na výsledek „limitění” alias T

Lemma 4 (Postačující podmínky pro koncentraci)**.** *(Koncentrace)*

Nechť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C(\mathbb{R})$ posloupnost splňující pro $(\forall M > 0)(\exists C > 0)$:

$$-M \le a < b \le M \quad \Rightarrow \quad \left| \int_a^b f_k(x)\, \mathrm{d}x \right| \le C \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Nechť navíc pro $\forall (a, b) \subset \mathbb{R}$ omezený platí: $\quad \lim_{k \to \infty} \int_a^b f_k(x)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \in (a, b) \\ 0 & \text{pro } 0 \notin [a, b] \end{cases}$

Pak $T_k \rightharpoonup^* \delta_0$

Příklad

Zadání: Ukažte, že posloupnosti $h_m(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin(mx)}{x}$ konvergují v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ k δ_0 distribuci.

✓ ***Řešení:*** Pro $\forall f_m$ dodefinujeme spojitě v $0 \left(= \frac{m}{\pi}\right)$ ... tedy pak $f_m \in C(\mathbb{R})$

$$\int_a^b \frac{1}{\pi}\frac{\sin(mx)}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} y &= mx & a \to ma \\ \mathrm{d}y &= m\,\mathrm{d}x & b \to mb \end{bmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_{ma}^{mb}\frac{\sin(y)}{y}\,\mathrm{d}y$$

$$0 \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{ma}^{mb}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y}_{=\pi \text{ z (Residuové věty)}} = 1$$

$$\underbrace{0 \notin (a,b)}_{\substack{\text{BÚNO}\\ a,b>0}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{ma}^{mb}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y\right) = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\underbrace{\left(\int_0^{bm} - \int_0^{am}\right)}_{=\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2} \text{ z (Residuové věty)}} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \blacksquare$$

Příklad

Zadání: Nalezněte slabou* limitu posloupnosti temperovaných distribucí pro $k \to \infty$

$$T_k := T_{\frac{-2k^3x}{\pi(k^2x^2+1)^2}}$$

Spočtěte: $\left\langle \lim\limits_{k\to\infty} T_k, \varphi \right\rangle$ pro $\varphi(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$.

Návod: Všimněte si, že: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{k}{\pi(k^2x^2+1)} = \frac{-2k^3x}{\pi(k^2x^2+1)^2}$
a využijte vhodnou větu na toto téma. Uvědomte si, že věta platí i pro temperované distribuce. Pečlivě ověřte splnění jejich předpokladů.

✓ ***Řešení:***

Z návodu v zadání zjevně plyne derivační vztah i pro distribuci: $D\,T_{\frac{k}{\pi(k^2x^2+1)}} = T_{\frac{-2k^3x}{\pi(k^2x^2+1)^2}}$

Distributivní derivace je spojitá vzhledem ke slabé* konvergenci, chceme tedy zjistit, co dává

$$\lim_{k\to\infty} T_{\frac{k}{\pi(k^2x^2+1)}} \quad \text{v } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ (popř. } \mathscr{S}'(\mathbb{R}))$$

Protože: $$0 \le \int_I \underbrace{\frac{k}{\pi}}_{k\in\mathbb{N}}\underbrace{\frac{1}{k^2x^2+1}}_{>0}\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}}\frac{k}{\pi}\frac{1}{k^2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} kx = y \\ k\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{bmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{1}{\pi}\overbrace{\Big[\operatorname{arctg} y\Big]_{-\infty}^{\infty}}^{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi} = 1$$

A též: $$\int_a^b \frac{k}{\pi}\frac{1}{k^2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} kx = y & a \to ka \\ k\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y & b \to kb \end{bmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \begin{cases} 0 & \overbrace{-\infty \le a < b < 0 \;\cup\; 0 < a < b \le \infty}^{\text{v limitě horní = spodní mez}} \\ 1 & a < 0 < b \qquad \text{v limitě } \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ \frac{1}{2} & \underbrace{-\infty \le a < b = 0 \;\cup\; 0 = a < b \le \infty}_{\text{v limitě } \frac{1}{\pi}\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \text{ nebo } \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)} \end{cases}$$

Ověřili jsme předpoklady (Lemmatu o koncentraci) $\Rightarrow \quad T_k \rightharpoonup^* \delta_0$

Tedy $\lim\limits_{k\to\infty}\left\langle T_{\frac{k}{\pi(k^2x^2+1)}},\, \varphi\right\rangle = \text{koncentrační lemma} = \langle\delta,\, \varphi\rangle = \varphi(0)$

Proto $\lim\limits_{k\to\infty}\left\langle T_{\frac{-2k^3x}{\pi(k^2x^2+1)^2}},\, \varphi\right\rangle = \langle D\delta,\, \varphi\rangle = -\langle\delta,\, D\varphi\rangle = -\varphi'(0)$

Proto pro $\varphi(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ je $\langle D\delta,\, \varphi\rangle = -\varphi'(0) = -\left(x\,\mathrm{e}^{-x^2}\right)'\Big|_{x=0} = -1$

4.1 Homogenní distribuce

Homogenní distribuce - příslušné reálné funkce x^λ jsou homogenní ve smyslu $(tx)^\lambda = t^\lambda x^\lambda$

Pro $\lambda \in \mathbb{C}$ zavádíme:

$$x_+^\lambda := \begin{cases} x^\lambda & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \le 0 \end{cases} \qquad x_-^\lambda := (-x)_+^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \ge 0 \\ |x|^\lambda & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Pokud $\operatorname{Re}\lambda > -1 \quad \Rightarrow$ existuje regulární distribuce $T_{x_+^\lambda}$, protože $x_+^\lambda \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

Pokud $\operatorname{Re}\lambda \le -1 \quad \Rightarrow$???

Definice 10 (Parametrické systémy distribucí)**.**

Nechť $k \in \mathbb{N}$.

Pak na $G_k := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > -k-1, \ -\lambda \notin \mathbb{N}\}$ definujeme parametrické systémy distribucí:

$$\left\{H_{x_+^\lambda}\right\}_{\lambda \in G_k} \quad \text{a} \quad \left\{H_{x_-^\lambda}\right\}_{\lambda \in G_k} \qquad \text{pomocí předpisu}$$

$$H_{x_+^\lambda} = \frac{D^k T_{x_+^{\lambda+k}}}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+k)} \quad \text{a} \quad \left\langle H_{x_-^\lambda}, \varphi \right\rangle = \left\langle H_{x_+^\lambda}, \varphi(-x) \right\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Vzorečky: Pravidla pro práci s homogenními distribucemi

- $xH_{x_+^\lambda} = H_{x_+^{\lambda+1}}$ a $-xH_{x_-^\lambda} = H_{x_-^{\lambda+1}}$
- $H_{x_+^0} = T_{x_+^0} = T_H$, kde H jest Heavisideova funkce
- $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-n, n \in \mathbb{N}_0\}: \quad DH_{x_+^\lambda} = \lambda H_{x_+^{\lambda-1}}$ a $DH_{x_-^\lambda} = \lambda H_{x_-^{\lambda-1}}$
- $\forall k \in \mathbb{N}$ mají systémy $\{H_{x_+^\lambda}\}$ a $\{H_{x_-^\lambda}\}$ v bodě $-k$ isolovanou singularitu

$$\operatorname{Res}_{-k} H_{x_+^\lambda} = (-1)^{k-1}\frac{D^{k-1}\delta_0}{(k-1)!} \qquad \text{a} \qquad \operatorname{Res}_{-k} H_{x_-^\lambda} = \frac{D^{k-1}\delta_0}{(k-1)!},$$

kde definujeme: $\left\langle \operatorname{Res}_{-k} H_{x_+^\lambda}, \varphi \right\rangle = \operatorname{Res}_{-k}\left\langle H_{x_+^\lambda}, \varphi \right\rangle$ a $\left\langle \operatorname{Res}_{-k} H_{x_-^\lambda}, \varphi \right\rangle = \operatorname{Res}_{-k}\left\langle H_{x_-^\lambda}, \varphi \right\rangle$

$T_{x_+^\lambda}$ lze ale rozšířit i jinak:

$$\left\langle T_{x_+^\lambda}, \varphi \right\rangle = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^\lambda \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^1 x^\lambda \left(\varphi(x) - \varphi(0)\right)\mathrm{d}x}_{\substack{\text{dobře definováno pro:} \\ \operatorname{Re}\lambda > -2,\ \lambda \neq -1}} + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1} + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \dots = \int_0^1 x^\lambda \cdot \left(\varphi(x) - \varphi(0) - \varphi'(0)x - \dots - \frac{\varphi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}x^{m-1}\right) + \sum_{k=1}^m \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)} + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

$\hookrightarrow$ a toto funguje pro $\operatorname{Re}\lambda > -m-1$, $\lambda \neq -k$, $k \in \mathbb{N}$

Označení	Definice	Vztahy
$H_{x_+^\lambda}$	$T_{x_+^\lambda}$ $\quad \lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,\lambda > -1$ $\frac{D^k T_{x_+^{\lambda+k}}}{(\lambda+1)\dots(\lambda+k)}$ $\quad \mathrm{Re}\,\lambda > -k,\ k \in \mathbb{N},\ -\lambda \notin \mathbb{N}$	$\mathrm{Res}_{-k}\, H_{x_+^\lambda} = (-1)^{k-1} \frac{D^{k-1}\delta_0}{(k-1)!}$ $DH_{x_+^\lambda} = \lambda H_{x_+^{\lambda-1}}$ $xH_{x_+^\lambda} = H_{x_+^{\lambda+1}}$ $H_{x_+^0} = T_H$
$H_{x_-^\lambda}$	$T_{(-x)_+^\lambda}$ $\quad \lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,\lambda > -1$ $\langle H_{x_-^\lambda}, \varphi \rangle = \langle H_{x_+^\lambda}, \varphi(-x) \rangle$ $\quad -\lambda \notin \mathbb{N}$	$\mathrm{Res}_{-k}\, H_{x_-^\lambda} = \frac{D^{k-1}\delta_0}{(k-1)!}$ $DH_{x_-^\lambda} = -\lambda H_{x_-^{\lambda-1}}$ $-xH_{x_-^\lambda} = H_{x_-^{\lambda+1}}$
$H_{\chi_+^\lambda}$	$\frac{H_{x_+^\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}$ $\quad \lambda \in \mathbb{C}$	$DH_{\chi_+^\lambda} = H_{\chi_+^{\lambda-1}}$ $H_{\chi_+^{-k}} = D^{k-1}\delta_0 \quad k \in \mathbb{N}$
$H_{\chi_-^\lambda}$	$\frac{H_{x_-^\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}$ $\quad \lambda \in \mathbb{C}$	$DH_{\chi_-^\lambda} = -H_{\chi_-^{\lambda-1}}$ $H_{\chi_-^{-k}} = (-1)^{k-1} D^{k-1}\delta_0 \quad k \in \mathbb{N}$
$H_{\lvert x\rvert^\lambda}$	$H_{x_+^\lambda} + H_{x_-^\lambda}$ $\quad \lambda \in \mathbb{C},\ -\lambda \notin \mathbb{N}$	
$H_{\lvert x\rvert^\lambda \operatorname{sign} x}$	$H_{x_+^\lambda} - H_{x_-^\lambda}$ $\quad \lambda \in \mathbb{C},\ -\lambda \notin \mathbb{N}$	
$H_{x^{-2n}}$	$\lim_{\lambda\to-2n} H_{\lvert x\rvert^\lambda}$ $\quad n \in \mathbb{N}$	$H_{x^{-2}} = T_{\mathrm{f.p.}\frac{1}{x^2}}$
$H_{x^{-2n+1}}$	$\lim_{\lambda\to-2n+1} H_{\lvert x\rvert^\lambda \operatorname{sign} x}$ $\quad n \in \mathbb{N}$	$H_{x^{-1}} = T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}}$
$H_{(x+\mathrm{i}0)^\lambda}$	$\lim_{y\to 0_+} T_{(x+\mathrm{i}y)^\lambda}$ $\quad \mathrm{Re}\,\lambda > -1$ $H_{x_+^\lambda} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\pi} H_{x_-^\lambda}$ $\quad \lambda \in \mathbb{C},\ -\lambda \notin \mathbb{N}$	
$H_{(x-\mathrm{i}0)^\lambda}$	$\lim_{y\to 0_-} T_{(x+\mathrm{i}y)^\lambda}$ $\quad \mathrm{Re}\,\lambda > -1$ $H_{x_+^\lambda} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\pi} H_{x_-^\lambda}$ $\quad \lambda \in \mathbb{C},\ -\lambda \notin \mathbb{N}$	
$H_{(x+\mathrm{i}0)^{-k}}$	$\lim_{\lambda\to-k} H_{(x+\mathrm{i}0)^\lambda}$ $\quad k \in \mathbb{N}$	$H_{(x+\mathrm{i}0)^{-k}} = H_{x^{-k}} - \frac{\mathrm{i}\pi(-1)^{k-1}}{(k-1)!} D^{k-1}\delta_0$ $H_{x^{-k}} = \frac{1}{2}(H_{(x+\mathrm{i}0)^{-k}} + H_{(x-\mathrm{i}0)^{-k}})$
$H_{(x-\mathrm{i}0)^{-k}}$	$\lim_{\lambda\to-k} H_{(x-\mathrm{i}0)^\lambda}$ $\quad k \in \mathbb{N}$	$H_{(x-\mathrm{i}0)^{-k}} = H_{x^{-k}} + \frac{\mathrm{i}\pi(-1)^{k-1}}{(k-1)!} D^{k-1}\delta_0$ $H_{(x+\mathrm{i}0)^{-k}} - H_{(x-\mathrm{i}0)^{-k}} = \frac{-2\mathrm{i}\pi(-1)^{k-1}}{(k-1)!} D^{k-1}\delta_0$

Příklad

Zadání:

(i) Ukažte, že distribuce (limita je ve smyslu slabé* konvergence na $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)

$$H_{x^{-2}} := \lim_{\lambda\to-2} H_{|x|^\lambda} \qquad \text{je dobře definovaná.}$$

(ii) Ukažte, že

$$H_{x^{-2}} = H_{\text{f.p. } \frac{1}{x^2}},$$

kde

$$\left\langle H_{\text{f.p. } \frac{1}{x^2}},\, \varphi \right\rangle = \text{ p.v. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

✓ ***Řešení:***

Z předchozí tabulky se dočteme: $\qquad H_{|x|^\lambda} = H_{x_+^\lambda} + H_{x_-^\lambda} \qquad \lambda\in\mathbb{C}, -\lambda\notin\mathbb{N}$

Zajímají nás homogenní distribuce na okolí -2, ale nechceme zahrnout vedlejší celá čísla.

Pro $\lambda\in(-3,\,-1)\setminus\{-2\}$ máme:

$$\left\langle H_{|x|^\lambda},\,\varphi\right\rangle = \left\langle \frac{D^2 H_{|x|^{\lambda+2}}}{(\lambda+2)(\lambda+1)},\,\varphi\right\rangle = \left|\begin{array}{c}\text{linearita}\\ +\text{ distributivní derivace}\end{array}\right| = \frac{1}{(\lambda+2)(\lambda+1)}\,(-1)^2\left\langle H_{|x|^{\lambda+2}},\,D^2\varphi\right\rangle =$$

$$= \left|\begin{array}{c}(\textit{dualita})\\ |x|^{-2}\in L^1(\mathbb{R})\end{array}\right| \; \left|\begin{array}{c}|x|^{-2} \text{ má okolo 0 problém}\\ \text{Přecházíme k p.v. kvůli pozdějšímu per partes, zatím ještě problém není}\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{(\lambda+2)(\lambda+1)} \text{ p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\lambda+2}\varphi''\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\varepsilon\to0+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{1}{(\lambda+2)(\lambda+1)}\,|x|^{\lambda+2}\varphi''\,\mathrm{d}x \;= [\text{P.P}]\ldots$$

$\pm$	**Der**	**Int**
$+$	$\lvert x\rvert^{\lambda+2}$	$\varphi''(x)$
$-$	$(\lambda+2)\,\lvert x\rvert^{\lambda+1}\operatorname{sgn}(x)$	$\varphi'(x)$
$+$	$(\lambda+2)\,(\lambda+1)\,\lvert x\rvert^{\lambda}\,\cancelto{1}{\operatorname{sgn}^2(x)}$	$\varphi(x) \quad\to\quad \varphi(x)-\varphi(0) \quad \ldots\text{trik}$

$$\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{1}{(\lambda+2)(\lambda+1)}\Big[|x|^{\lambda+2}\varphi'\Big]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \frac{1}{(\lambda+2)(\lambda+1)}\Big[|x|^{\lambda+2}\varphi'\Big]_{\varepsilon}^{\infty}$$

$$-\left[\frac{\cancel{(\lambda+2)}|x|^{\lambda+1}\operatorname{sgn}(x)\varphi}{\cancel{(\lambda+2)}(\lambda+1)}\right]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \left[\frac{\cancel{(\lambda+2)}|x|^{\lambda+1}\operatorname{sgn}(x)\varphi}{\cancel{(\lambda+2)}(\lambda+1)}\right]_{\varepsilon}^{\infty} + \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\cancelto{1}{\frac{(\lambda+2)\,(\lambda+1)}{(\lambda+2)(\lambda+1)}}\;|x|^{\lambda}\varphi\,\mathrm{d}x \;= \ldots$$

$$\frac{1}{(\lambda+2)(\lambda+1)}\Big[|x|^{\lambda+2}\varphi'\Big]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \frac{1}{(\lambda+2)(\lambda+1)}\Big[|x|^{\lambda+2}\varphi'\Big]_{\varepsilon}^{\infty} = \frac{1}{(\lambda+2)(\lambda+1)}\Big[|\varepsilon|^{\lambda+2}\varphi'(-\varepsilon) - 0 + 0 - |\varepsilon|^{\lambda+2}\varphi'(\varepsilon)\Big] =$$

$$= \frac{1}{(\lambda+2)(\lambda+1)}\left[|\varepsilon|^{\lambda+3}\,\frac{\varphi'(-\varepsilon)-\varphi'(\varepsilon)}{|\varepsilon|}\right] = K\left[|\varepsilon|^{\lambda+3}\,(-2)\frac{\varphi'(\varepsilon)-\varphi'(-\varepsilon)}{2|\varepsilon|}\right] =$$

$$= \left|\begin{array}{c}\text{z definice derivace}\\ \text{pro } \varepsilon\to0+\end{array}\right| = K\Big[|\varepsilon|^{\lambda+3}\,\underbrace{(-2)\varphi''(0)}_{\text{omezená}}\Big] \quad \xrightarrow[\lambda>-3]{\varepsilon\to0^+} \quad 0$$

$$-\left[\frac{1}{(\lambda+1)}|x|^{\lambda+1}\underbrace{\mathrm{sgn}(x)}_{-1}\varphi\right]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \left[\frac{1}{(\lambda+1)}|x|^{\lambda+1}\underbrace{\mathrm{sgn}(x)}_{1}\varphi\right]_{\varepsilon}^{\infty} = \left|\begin{array}{c}\text{trik z per partes}\\ \int\varphi' = \varphi(x)-\varphi(0)\\ \varphi(0)\text{ integrační konstanta}\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{(\lambda+1)}\left(\left[(-x)^{\lambda+1}\Big(\varphi(x)-\varphi(0)\Big)\right]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \left[x^{\lambda+1}\Big(\varphi(x)-\varphi(0)\Big)\right]_{\varepsilon}^{\infty}\right) =$$

$$= \tilde{K}\left(\left[\varepsilon^{\lambda+2}\frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} - 0 - 0 + \varepsilon^{\lambda+2}\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}\right]\right) = \dots$$

A jelikož platí: $$\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} = \left|\begin{array}{c}\text{substituce}\\ \varepsilon = -\varepsilon\end{array}\right| = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{-\varepsilon} = -\varphi'(0)$$

Máme: $$\tilde{K}\left(\left[\varepsilon^{\lambda+2}\frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} + \varepsilon^{\lambda+2}\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}\right]\right) \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} \tilde{K}\left(\cancel{\varepsilon^{\lambda+2}(-\varphi'(0))} + \cancel{\varepsilon^{\lambda+2}\varphi'(0)}\right) = 0$$

Celkem tedy: $$\left\langle H_{|x|^\lambda},\, \varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)|x|^\lambda\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right)\,\mathrm{d}x$$

Nyní lze provést limitu $\lim\limits_{\lambda\to -2}$, neboť je stejnoměrná vůči $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}$ a tudíž lze obě limity prohodit.

Potřebuji rozdělit limity tak, abych se odrazil od nuly, proto vztah rozepíšeme do 4 integrálů:

$$\lim_{\lambda\to -2}\left\langle H_{|x|^\lambda},\, \varphi\right\rangle = \lim_{\lambda\to -2}\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{1} + \int_{1}^{\infty}\right)|x|^\lambda\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right)\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \lim_{\lambda\to -2}\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{1}^{\varepsilon}\right)|x|^\lambda\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right)\,\mathrm{d}x\right) + \lim_{\lambda\to -2}\left(\left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_{1}^{\infty}\right)|x|^\lambda\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right)\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \lim_{\lambda\to -2}\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{1}^{\varepsilon}\right)|x|^\lambda\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right)\,\mathrm{d}x\right) + \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_{1}^{\infty}\right)|x|^{-2}\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\lambda\to -2}\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{1}^{\varepsilon}\right)|x|^\lambda\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right)\,\mathrm{d}x\right) + \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_{1}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \dots$$

K prohození limit pro integrály s mezemi obsahujícími ε potřebujeme využít Taylorův rozvoj $\varphi(x)$ v 0

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(\xi),\quad \xi\in(0,x)\quad \dots\ \text{poslední člen} \;=\; \text{Lagrangeův tvar zbytku}$$

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(\xi),\quad \xi\in(0,x)$$

$$\lim_{\lambda\to -2}\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{1}^{\varepsilon}\right)|x|^\lambda\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right)\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{\lambda\to -2}\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{1}^{\varepsilon}\right)|x|^\lambda\left(\overbrace{\cancel{x\varphi'(0)}}^{=0} + \frac{x^2}{2}\varphi''(\xi)\right)\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$\left|\begin{array}{c}x\varphi'(0)\ \dots\ \text{lichá fce}\\ \int\text{ přes symetrické meze}\end{array}\right| = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{1}^{\varepsilon}\right)|x|^{-2}\left(\frac{x^2}{2}\varphi''(\xi)\right)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{1}^{\varepsilon}\right)\frac{\varphi'(0)}{x} + \frac{1}{2}\varphi''(\xi)\,\mathrm{d}x =$$

Opět jsme do integrálu přičetli člen $x\varphi'(0) = 0$, čímž se jeho hodnota nezměnila. Nyní ale již máme prohozené limity. Čehož jsme chtěli dosáhnout. Všimneme si, že:

$$\frac{\varphi'(0)}{x} + \frac{1}{2}\varphi''(\xi) = \frac{1}{x^2}\left(x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(\xi)\right) = \left|\begin{array}{c}\text{Taylor}\\ \text{viz výše}\end{array}\right| = \frac{1}{x^2}\Big(\varphi(x)-\varphi(0)\Big)$$

A konečně dostáváme:

$$\boxed{\left\langle H_{\text{f.p. }\frac{1}{x^2}},\, \varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x}$$

4.2 Temperované distribuce

Temperované distribuce

- Tvoří podmnožinu distribucí
- Musí dávat smysl jejich dualita s testovacími funkcemi nejen v $\mathcal{D}$ (jako u standardních distribucí), ale i ve Schwartzově prostoru $\mathscr{S}$, což je větší třída funkcí.

Definice 11 (Prostor temperovaných distribucí $\mathscr{S}'$)**.**

Připomenutí vlastností **Schwartzova prostoru**:

$$\boxed{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \ \|f\|_{\alpha,\beta} = \left\|x^\alpha D^\beta f\right\|_{L^\infty} < \infty; \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \text{ (multiindexy)} \right\}$$

$$\textbf{Konvergence} \text{ na } \mathscr{S}: \qquad f_m \xrightarrow{\mathscr{S}} f \quad \Leftrightarrow \quad \|f_m - f\|_{\alpha,\beta} \to 0; \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$$

Prostor temperovaných distribucí:

$\boxed{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)}$ ... množina spojitých lineárních funkcionálů nad $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, kde spojitost je:

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{S}} 0 \quad \Rightarrow \quad \langle T, \varphi_k \rangle \to 0 \qquad \text{a} \qquad T_k \rightharpoonup^* T \text{ v } \mathscr{S}' \quad \Leftrightarrow \quad \langle T_k, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

Temperované distribuce mají větší prostor testovacích funkcí:

$$\mathscr{S}(\Omega): \qquad \mathcal{D}(\Omega) \subsetneq \mathscr{S}(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$$
$$\mathscr{S}'(\Omega) \subsetneq \mathcal{D}(\Omega)$$

Definice 12 (Temperované distribuce)**.**

Temperované distribuce jsou speciální případ distribucí: $\mathcal{D} \subset \mathscr{S} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{S}' \subset \mathcal{D}'$

(Například pro $f = \mathrm{e}^{2x^2}$: $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ale $T_f \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R})$)

Platí: $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ a $|f(x)| \le C\,(1 + |x|^2)^n \quad \Rightarrow \quad T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ (nejvýš polynomiální růst v ∞)

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pro $p \in [1, \infty] \quad \Rightarrow \quad T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

Definice 13 (Pomalu rostoucí funkce)**.** *(Pomalu)*

Pomalu rostoucí funkce Θ_M:

$$\Theta_M := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \ (\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n)\,(\exists m_\alpha \in \mathbb{N}_0)\,(\exists c_\alpha > 0) : \ \|\mathcal{D}^\alpha f(x)\| \le c_\alpha \left(1 + |x|^2\right)^{m_\alpha} \right\}$$

Jest-li $a \in \Theta_M$, pak $\varphi \mapsto a\varphi$ spojitě zobrazuje $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ do $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

Definujeme:

$$T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n \qquad D^\alpha T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n): \qquad \langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$a \in \Theta_M \qquad aT \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n): \qquad \langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{regulární},\ b \in \mathbb{R}^n \qquad \langle T(\mathbb{A}y + b), \varphi(y) \rangle := \left\langle T(x), \frac{1}{|\det \mathbb{A}|} \cdot \varphi\left(\mathbb{A}^{-1}(x - b)\right) \right\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

Poznámka: Narozdíl od klasických distribucí, regulární temperované distribuce můžeme vytvořit **POUZE pro pomalu rostoucí funkce!**

Vzorečky: Laplaceův operátor pro radiální funkce

Nechť f je ***radiální funkce*** na $\mathbb{R}^n$, tj. $f(x) = R(r)$, kde $r = |x|, n \geq 2$

Nechť fce $R(r), R'(r), R''(r)$ existují a jsou spojité na $\mathbb{R}_+$, jsou (Pomalu rostoucí funkce) a $\Delta f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$

Dále nechť existuje limita: $$\lim_{r\to 0^+} r^{n-1}R'(r) = A \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$$

Potom: $$\Delta T_f = T_{\Delta f} + A\kappa_n\delta_0$$

kde: $\Delta T_f \ldots$ „distributivní Laplace”, $T_{\Delta f} \ldots$ regulární distribuce pro funkci Δf,

$\kappa_n \ldots$ povrch jedmotkové koule v $\mathbb{R}_n$, tedy $\kappa_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

Příklad

Zadání: Určete distribuci $\Delta T_u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ pro:

$$u(x) = |x|^\lambda, \qquad \lambda \geq 2-n,\ n \geq 2$$

✓ ***Řešení:***

Máme-li radiální funkci . . .
$$\left.\begin{aligned} R(r) &= r^\lambda \\ R'(r) &= r^{\lambda-1} \\ R''(r) &= \lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2} \end{aligned}\right\} \text{Funkce spojité na } \mathbb{R}_+ \text{ a pomalu rostoucí}$$

$$\Delta f(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)^{\frac{\lambda}{2}} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\lambda}{2}\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-1}\cdot 2x_j\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^n \left[\lambda\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-2}2x_jx_j + \left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-1}\right] =$$

$$= \lambda(\lambda-2)|x|^{\lambda-4}|x|^2 + \lambda n|x|^{\lambda-2}$$

$$\Delta f(x) = \lambda\,|x|^{\lambda-2}\,(\lambda-2+n) = \lambda(\lambda-2+n)\,r^{\lambda-2}$$

$$\lim_{r\to 0^+} r^{n-1}\,R'(r) = \lim_{r\to 0^+} r^{n-1}\lambda r^{\lambda-1} = \lim_{r\to 0^+} \lambda r^{\lambda+n-2} = \begin{cases} 0 & (\lambda > 2-n) \\ 2-n & (\lambda = 2-n) \\ \infty & (\lambda < 2-n) \end{cases}$$

Závěr: $$\boxed{\Delta T_{|x|^2} = \begin{cases} T_{\Delta f} = \lambda(\lambda+n-2)T_{|x|^{\lambda-2}} & \text{pro } \lambda > 2-n \\ T_{\Delta f} = 0 + (2-n)\kappa_n\delta_0 & \text{pro } \lambda = 2-n \end{cases}}$$

Příklad

Zadání: Zjednodušte zápis distribuce $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$:

$$T = |x|^2 \Delta\delta_0, \qquad \text{kde } \Delta \dots \text{ Laplaceův operátor, } \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

✓ ***Řešení:***

$$\left\langle |x|^2 \Delta\delta_0,\ \varphi \right\rangle = \left\langle \Delta\delta_0,\ |x|^2\varphi \right\rangle = \left| \begin{array}{c} (-1)^2 = 1 \\ + \text{ derivace distribuce} \\ + \text{ linearita} \end{array} \right| = \left\langle \delta_0,\ \Delta(|x^2|\varphi) \right\rangle = \dots$$

$$\Delta(|x|^2\varphi): \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j^2\varphi) = 2\delta_{ij}x_j\varphi + x_j^2\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(2\delta_{ij}\varphi + x_j^2\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = 2\delta_{ij}\delta_{ij}\varphi + 2\delta_{ij}x_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + 2\delta_{ij}x_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + x_j^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}$$

$$\delta_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(x_j^2\varphi)\right) = 2\delta_{ij}\varphi(0) \quad \Rightarrow \quad \delta_0\left(\Delta|x|^2\varphi\right) = 2n\varphi(0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2n\delta_0}$$

Definice 14 (Skládání distribucí s difeomorfismy)**.**

Difeomorfismus = „difeo-"→diferencovatelné zobrazení, „morfismus"→vzájemně jednoznačné zobrazení

Mějme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je C^∞ difeomorfismus zobrazující Ω na $\tilde{\Omega}$. Nechť dále $T \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$

$\Rightarrow$ Pak $(T \circ h) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je definováno jako $\langle T \circ h, \varphi \rangle = \left\langle T, \dfrac{1}{|J_h(h^{-1}(y))|} \cdot \varphi(h^{-1}(y)) \right\rangle$

Fourierovy řady vs. distribuce

Nechť $f \in L^1((0,1))$, její Fourierovy koeficienty: $\displaystyle c_k := \int_0^1 f(x)\, \mathrm{e}^{2\pi ikx}\, \mathrm{d}x\,, \quad k \in \mathbb{Z}$

její Fourierova řada jest: $\displaystyle f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \mathrm{e}^{2\pi ikx}$

Pro $f \in L^1$ ale **neplatí** rovnost mezi f a její FŘ! Můžeme ale integrovat! $\displaystyle F(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k}{2\pi ik}\, \mathrm{e}^{2\pi ikx} + c_0x + d_0$

(Můžeme integrovat tak dlouho, dokud řada vpravo nebude konvergovat stejnoměrně, což je případ, kdy c_k roste jako polynom v k.)

Dále: $$\langle T_F, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} F\varphi = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{\substack{k=-m \\ k\neq 0}}^{m} \frac{c_k}{2\pi ik}\, \mathrm{e}^{2\pi ikx} + c_0x + d_0 \right) \varphi\, \mathrm{d}x, \quad \left[\begin{array}{c} \text{kde můžeme prohodit lim a } \int, \\ \text{řada totiž konverguje stejnoměrně.} \end{array} \right]$$

$$\langle DT_F, \varphi \rangle = -\langle T_F, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} F\varphi' = \int_{\mathbb{R}} F'\varphi = \int_{\mathbb{R}} f\varphi = \langle T_f, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$\|$$

$$\langle DT_F, \varphi \rangle = -\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{\substack{k=-m \\ k\neq 0}}^{m} \frac{c_k}{2\pi ik}\, \mathrm{e}^{2\pi ikx} + c_0x + d_0 \right) \varphi'\, \mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=-m}^{m} c_k\, \mathrm{e}^{2\pi ikx} \right) \varphi\, \mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

A odtud $T_f = \lim\limits_{m\to\infty} T_{\sum_{k=-m}^{m} c_k\, \mathrm{e}^{2\pi ikx}}$

4.3 Fourierova transformace distribucí

Definice 15 (Fourierova transformace distribucí). *(FTD)*

Pro $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ definujeme její $\mathcal{F}(T) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ a inversní $\mathcal{F}^{-1}(T) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ předpisy:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \langle \mathcal{F}(T),\, \varphi \rangle := \langle T,\, \mathcal{F}(\varphi) \rangle & \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \\ \left\langle \mathcal{F}^{-1}(T),\, \varphi \right\rangle := \left\langle T,\, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \right\rangle & \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \end{array}}$$

$$\text{Platí:} \qquad \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(T)\right) = T \qquad \text{a} \qquad \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}(T)\right) = T \qquad \forall T \in S'(\mathbb{R}^n)$$

Vzorečky: Vlastnosti Fourierovy transformace distribucí (Vlastnosti FTD)

- **Linearita:** $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}$ jsou lineární zobrazení
- **Spojitost:** $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}$ jsou spojitá zobrazení z $S'(\mathbb{R}^n)$ na $S'(\mathbb{R}^n)$ (vzájemný isomorfismus)
- **Transformace testovací funkce:**

  $\mathcal{F}(\varphi)$ je „klasická” Fourierova transformace (na funkcích):

$$\text{FT:} \quad \hat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i \langle x,\, \xi \rangle}\, \mathrm{d}x \qquad \text{kde: } \langle x,\, \xi \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$$

$$\text{Zpětná FT:} \quad \check{\varphi}(x) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi i \langle x,\, \xi \rangle}\, \mathrm{d}\xi \qquad \text{kde: } \langle x,\, \xi \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$$

- **Vlastnosti inversní transformace:**
$$\left[\mathcal{F}^{-1}(f)\right](\xi) = \left[\mathcal{F}(f)\right](-\xi)$$
$$\overline{\left[\mathcal{F}^{-1}(f)\right](\xi)} = \left[\mathcal{F}(\bar{f})\right](\xi)$$
- **Posunutí v parametru:**
$$\left[F(f(x-b))\right](\xi) = e^{-2\pi i \langle b,\, \xi \rangle} \left[F(f)\right](-\xi), \qquad b \in \mathbb{R}^n$$
$$\left[F(f)\right](\xi - \alpha) = \left[F\left(e^{2\pi i \langle x,\, \alpha \rangle} f(x)\right)\right](\xi), \qquad \alpha \in \mathbb{R}^n$$
- **Škálování:** $[\mathcal{F}(\varepsilon f)](\xi) = |\varepsilon|^{-n} [F(f)] \left(\xi \varepsilon^{-1}\right), \quad \varepsilon > 0$
- Fourierova transformace (včetně inversní) zachovává paritu funkce (sudost/lichost)
- Fourierova transformace (včetně inversní) zachovává radiální symetričnost funkce
- **Transformace derivace v multiindexu:**
$$\mathcal{F}\left(D^\alpha T\right) = (2\pi i \xi)^\alpha \left[\mathcal{F}\left(T\right)\right](\xi) \qquad \forall T \in S'(\mathbb{R}^n); \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n; \qquad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$$
$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{\alpha_n}$$
$$\mathcal{F}^{-1}\left(D^\alpha f\right)(x) = (-2\pi i \xi)^\alpha \left[\mathcal{F}^{-1}(f)\right](x) \qquad \forall T \in S'(\mathbb{R}^n); \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n$$
- **Multiindexová derivace transformace:**
$$D^\alpha [\mathcal{F}(f)](\xi) = [\mathcal{F}(-2\pi i x)^\alpha f(x)](\xi) \qquad \forall T \in S'(\mathbb{R}^n); \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n; \qquad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$$
$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{\alpha_n}$$
$$D^\alpha \left[\mathcal{F}^{-1}(f)\right](x) = \left[\mathcal{F}^{-1}\left(2\pi_i \xi\right)^\alpha f(\xi)\right](x) \qquad \forall T \in S'(\mathbb{R}^n); \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n$$
- **Funkce T_1:** $\mathcal{F}(\delta) = T_1 \equiv 1$ a $\mathcal{F}(T_1) = \delta$

4.3.1 Konvoluce distribucí a její Fourierova transformace

Definice 16 (Konvergence k 1 - k definici konvoluce distribucí). *(24.3.11)*

Nechť $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$. Píšeme, že $\eta_k \to 1$ v $\mathbb{R}^{2N}$, jestliže:

(i) pro každý kompakt $K \subset \mathbb{R}^{2N}$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\eta_k \equiv 1 \quad \text{na } K \text{ pro všechna } k \geq k_0$$

(ii) pro každé $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{2N}$ je $\{D^\alpha \eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ stejně stejnoměrně omezená.

Definice 17 (Konvoluce distribucí). *(24.3.13)*

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ a distribuce $T \otimes G$ připouští prodloužení (spojité vůči slabé* konvergenci distribucí)
$$\langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x+y)\rangle := \lim_{k\to\infty} \langle T(x) \otimes G(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right),$$
kde $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$ splňuje $\eta_k \to 1$ v $\mathbb{R}^{2N}$ a navíc je naše limita nezávislá na volbě posloup. $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Pak distribuci $T * G$ (konvoluce distribucí T a G) definujeme předpisem:
$$\langle T * G, \varphi\rangle := \langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x+y)\rangle \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Věta 13. *O vlastnostech konvoluce distribucí* *(24.3.17)*

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ *a* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$.

(i) Jestliže existuje $T * G$, pak existuje i $G * T$ a platí $T * G = G * T$ (tedy konvoluce je **komutativní**).

(ii) Jestliže existuje $T * G$, pak existují i $D^\alpha T * G$ a $T * D^\alpha G$ a platí
$$D^\alpha(T * G) = D^\alpha T * G = T * D^\alpha G.$$

(iii) Konvoluce distribucí však NENÍ **asociativní**, např. platí:
$$(T_1 * D\delta_0) * T_H = T_0 * T_H = T_0 \qquad \text{ale} \qquad T_1\left(D\delta_0 * T_H\right) = T_1 * \delta_0 = T_1$$

Příklad (24.3.16)

Dokažte, že pokud $T \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$, pak $T * \delta_0 = \delta_0 * T = T$.

✓ ***Řešení:***

Skutečně, na jednu stranu máme:
$$\begin{aligned}\langle T * \delta_0, \varphi\rangle &= \lim_{k\to\infty} \langle T(x) \otimes \delta_0(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\rangle = \\ &= \lim_{k\to\infty} \langle T(x), \langle \delta_0(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\rangle\rangle = [\eta_k(x,0)\varphi(x) = \varphi(x) \text{ pro každé } k \in \mathbb{N} \text{ dost velké}] = \\ &= \lim_{k\to\infty} \langle T(x), \eta_k(x,0)\varphi(x)\rangle = \langle T(x), \varphi(x)\rangle\end{aligned}$$

Druhou rovnost nám pak dává komutativita tenzorového součinu.

Věta 14. *O existenci konvoluce distribucí (kdy má smysl mluvit o konvoluci)* *(24.3.20)*

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$.

(i) Jestliže distribuce G má kompaktní nosič, pak existuje $T * G$ a navíc platí

$$\langle T * G, \varphi\rangle = \langle T(x) \otimes G(y), \eta(y)\varphi(x+y)\rangle \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right),$$

kde $\eta \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ je libovolná funkce splňující $\eta \equiv 1$ na nějakém okolí $\operatorname{supp} G$.

(ii) Jestliže distribuce G má kompaktní nosič a navíc $T = T_f$ je regulární distribuce reprezentovaná funkcí $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$, pak $T_f * G$ je regulární distribuce reprezentovaná funkcí

$$x \mapsto \langle \widetilde{G}(y), f(x-y)\rangle,$$

kde $\widetilde{G}$ je prodloužení distribuce G na prvek $\left(C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)\right)'$.

(iii) Nechť $N = 1$ a $\operatorname{supp} T$ spolu se $\operatorname{supp} G$ jsou zleva omezené. Pak $T * G$ existuje a platí

$$\langle T * G, \varphi\rangle = \langle T(x) \otimes G(y), \xi(x)\eta(y)\varphi(x+y)\rangle \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

kde ξ, η jsou libovolné $C^\infty(\mathbb{R})$-funkce splňující $\xi \equiv 1$ na nějakém okolí nosiče T a $\eta \equiv 1$ na nějakém okoli $\operatorname{supp} G$, a též $\xi \equiv 0$ a $\eta \equiv 0$ na nějakém intervalu tvaru $(-\infty, -K), K > 0$.

Věta 15. *O konvoluci temperovaných distribucí (rozšíření definice pro tempery)* *(24.3.21)*

(i) Nechť $T \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ *a* $G \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ má kompaktní nosič. Pak $T * G \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ a

$$\langle T * G, \varphi\rangle = \langle T(x) \otimes G(y), \eta(y)\varphi(x+y)\rangle \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathscr{S}\left(\mathbb{R}^N\right),$$

kde $\eta \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ je libovolná funkce splňujicí $\eta \equiv 1$ na nějakém okolí $\operatorname{supp} G$.

(ii) Pro zafixované $G \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ s kompaktním nosičem je operace $T \mapsto T * G$ spojité zobrazení $\mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ do $\mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Pro zafixované $T \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ je operace $G \mapsto T * G$ spojité zobrazení distribucí z $\mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ s nosiči obsaženými ve společné kompaktní množině do $\mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^N\right)$.

(iii) Nechť $T \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ a $\eta \in \mathscr{S}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Pak existuje $T * G_\eta$ a jedná se o regulární temperovanou distribuci reprezentovanou funkci $h \in \Theta_M$.

Navíc platí $\quad \langle T * G_\eta, \varphi\rangle = \langle T, \eta(-x) * \varphi\rangle \quad$ pro všechna $\varphi \in \mathscr{S}\left(\mathbb{R}^N\right)$,

kde $\eta(-x) * \varphi := \int_{\mathbb{R}^N} \eta(y-x)\varphi(y)\mathrm{d}y$, a existuje $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že pro všechna $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ platí (C závisí na α)

$$D^\alpha\left(T * G_\eta\right) = T_{D^\alpha h} \quad a \quad |D^\alpha h(x)| \leq C\|T\|_{\mathscr{S}^{-m}(\mathbb{R}^N)}\left(1+|x|^2\right)^m \|\eta\|_{\mathscr{S}^{m+|\alpha|}(\mathbb{R}^N)}.$$

Věta 16. *O reprezentaci Fourierovy transformace distribuce* *(24.3.24)*

(i) Nechť $T \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ má kompaktní nosič. Pak $\mathcal{F}(T)$ je regulární distribuce reprezentovaná funkcí $h \in \Theta_M$ a lze psát

$$h(\xi) = \left\langle T(x), \eta(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \right\rangle \qquad \text{pro } \xi \in \mathbb{R}^N,$$

kde $\eta \in \mathscr{S}\left(\mathbb{R}^N\right)$ je libovolná funkce, která se rovná jedné na nějakém okolí supp T. Dále pro každé $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ platí

$$D^\alpha \mathcal{F}(T) = T_{D^\alpha h}$$

a existují $c_\alpha \geq 0$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ taková, že

$$|D^\alpha h(\xi)| \leq c_\alpha \|T\|_{\mathscr{S}^{-m}(\mathbb{R}^N)} \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} \qquad \text{pro všechna } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

(ii) Nechť T je taková distribuce, že pro jisté $\sigma > 0$ je $\mathrm{e}^{\sigma|x|^2} T \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^N\right)$. Pak $\mathcal{F}(T)$ je regulární distribuce reprezentovaná funkcí $g \in \Theta_M$ a lze psát

$$g(\xi) = \left\langle \mathrm{e}^{\sigma|x|^2} T(x),\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \mathrm{e}^{-\sigma|x|^2} \right\rangle \qquad \text{pro } \xi \in \mathbb{R}^N$$

Fourierova transformace konvoluce funguje dobře pro následující případy:

1) 1 distribuce má kompaktní nosič
2) 1 distribuce je regulární distribuce odpovídající funkci z S (umíme dobře charakterisovat)
3) 2 regulární distribuce integrovatelných funkcí

Věta 17. *1. Věta o Fourierově obrazu konvoluce distribucí* *(24.3.25)*

Nechť $T, G \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ a G má kompaktní nosič. Pak

$$\mathcal{F}(T * G) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(G),$$

kde pravou stranu čteme jako $g\mathcal{F}(T)$, přičemž $g \in \Theta_M$ je funkce reprezentující $\mathcal{F}(G)$.

Věta 18. *2. Věta o Fourierově obrazu konvoluce distribucí* *(24.3.26)*

(i) Nechť $T \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ a $\eta \in \mathscr{S}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Pak

$$\mathcal{F}\left(T * G_\eta\right) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}\left(G_\eta\right),$$

kde pravou stranu čteme jako $g\mathcal{F}(T)$, přičemž $g \in \mathscr{S}\left(\mathbb{R}^N\right)$ je funkce reprezentující $\mathcal{F}\left(G_\eta\right)$.

(ii) Nechť $T_f, G_g \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ jsou regulární distribuce, přičemž distribuce T_f je reprezentovaná funkcí $f \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$, distribuce G_g je reprezentovaná funkcí $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$; $p, q \in [1,2]$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{3}{2}$. Pak

$$\mathcal{F}\left(T_f * G_g\right) = \mathcal{F}\left(T_f\right)\mathcal{F}\left(G_g\right),$$

kde pravou stranu chápeme jako regulární distribuci T_h reprezentovanou součinem reprezentujících funkcí distribucí $\mathcal{F}\left(T_f\right)$ a $\mathcal{F}\left(G_g\right)$. Navíc $h \in L^{r'}\left(\mathbb{R}^N\right)$, kde $r \in [1,2]$ a je dáno vztahem $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$.

Definice 18 (Besselovy funkce). *(24.7.4)*

Nechť $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-2,\dots\}$. Pak Besselovu funkci prvního druhu řádu s definujeme předpisem

$$J_s(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1+s)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

Pro $s \in \{-1,-2,\dots\}$ dále definujeme

$$J_s(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_{k=-s}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1+s)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

Význam Besselových funkcí:

Besselovy funkce řeší Besselovu rovnici řádu s

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - s^2\right)y = 0,$$

hledáme-li řešení ve tvaru $x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (pro každé $s \in \mathbb{R}$ vyjdou jako řešení J_s a J_{-s}, tato řešení jsou pro $s \in \mathbb{Z}$ lineárně závislá).

Věta 19. *O Fourierově transformaci radiálně symetrické funkce* *(24.7.8)*

Nechť $F \in L^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^N\right)$ je radiálně symetrická funkce, T_F je temperovaná distribuce a funkce $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ je definovaná předpisem

$$F(x) = f(|x|) \qquad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}^N.$$

Jestliže existují $C > 0$ a $K > 0$ taková, že

$$h_R(\xi) := \int_0^R 2\pi f(r) r \left(\frac{r}{|\xi|}\right)^{\frac{N}{2}-1} J_{\frac{N}{2}-1}(2\pi r|\xi|)\,\mathrm{d}r$$

splňuje

$$|h_R(\xi)| \le C\left(|\xi|^K + |\xi|^{\frac{1}{K}-N}\right) \qquad \text{pro všechna } \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \text{ a } R > 0$$

a pro všechna $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ existuje

$$h(\xi) := \lim_{R\to\infty} h_R(\xi),$$

pak $\mathcal{F}(T_F)$ je regulární temperovaná distribuce reprezentovaná funkcí h.

Distribuce	Fourierova transformace
$f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$	$T_{\mathcal{F}(f)}$, $\mathcal{F}(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(x,\xi)}\,\mathrm{d}x$ $T_{\mathcal{F}(f)}$, $\mathcal{F}(f) = \lim_{R\to\infty} \int_{B_R(0)} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(x,\xi)}\,\mathrm{d}x$
$\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ $T_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$	$\mathcal{F}(\delta) = T_1$ $\mathcal{F}(T_1) = \delta$
$T_{x^n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad n \in \mathbb{N}$	$\mathcal{F}(T_{x^n}) = \frac{1}{(-2\pi \mathrm{i})^n} D^n \delta$
$D^n \delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad n \in \mathbb{N}$	$\mathcal{F}(D^n \delta) = (2\pi \mathrm{i})^n T_{\xi^n}$
$T_{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} bx}} \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \quad b \in \mathbb{C}$	$\mathcal{F}(T_{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} bx}}) = \delta_b$
$T_{\sin(2\pi bx)} \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \quad b \in \mathbb{C}$ $T_{\cos(2\pi bx)} \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \quad b \in \mathbb{C}$ $T_{\sinh(2\pi bx)} \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \quad b \in \mathbb{C}$ $T_{\cosh(2\pi bx)} \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \quad b \in \mathbb{C}$	$\mathcal{F}(T_{\sin(2\pi bx)}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\delta_b - \delta_{-b})$ $\mathcal{F}(T_{\cos(2\pi bx)}) = \frac{1}{2}(\delta_b + \delta_{-b})$ $\mathcal{F}(T_{\sinh(2\pi bx)}) = \frac{1}{2}(\delta_{-\mathrm{i}b} - \delta_{\mathrm{i}b})$ $\mathcal{F}(T_{\cosh(2\pi bx)}) = \frac{1}{2}(\delta_{\mathrm{i}b} + \delta_{-\mathrm{i}b})$
$H_{x_+^\lambda} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad \lambda \in \mathbb{C}$	$\mathcal{F}\left(\frac{H_{x_+^\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}\right) = \mathcal{F}(H_{\chi_+^\lambda}) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda+1)\frac{\pi}{2}}}{(2\pi)^{\lambda+1}} H_{(\xi-\mathrm{i}0)^{-\lambda-1}}$
$T_{x_+^n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad n \in \mathbb{N}$	$\mathcal{F}(T_{x_+^n}) = \frac{n!}{(2\pi \mathrm{i})^{n+1}} H_{\xi^{-n-1}} + \frac{1}{2(-2\pi \mathrm{i})^n} D^n \delta$
$T_H \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$	$\mathcal{F}(T_H) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{\xi}} + \frac{1}{2}\delta$
$H_{x_-^\lambda} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad \lambda \in \mathbb{C}$	$\mathcal{F}\left(\frac{H_{x_-^\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}\right) = \mathcal{F}(H_{\chi_-^\lambda}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda+1)\frac{\pi}{2}}}{(2\pi)^{\lambda+1}} H_{(\xi+\mathrm{i}0)^{-\lambda-1}}$
$H_{\|x\|^\lambda} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad \lambda \in \mathbb{C}, -\lambda \notin \mathbb{Z}$	$\mathcal{F}(H_{\|x\|^\lambda}) = \frac{-2\Gamma(\lambda+1)}{(2\pi)^{\lambda+1}} \sin(\lambda\frac{\pi}{2}) H_{\|\xi\|^{-\lambda-1}}$
$T_{\|x\|} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$	$\mathcal{F}(T_{\|x\|}) = \frac{-1}{2\pi^2} H_{\|\xi\|^{-2}} = \frac{-1}{2\pi^2} T_{\mathrm{f.p.}\frac{1}{\xi^2}}$
$H_{\|x\|^\lambda \operatorname{sign} x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \notin \mathbb{Z}$	$\mathcal{F}(H_{\|x\|^\lambda \operatorname{sign} x}) = \frac{-2\mathrm{i}\Gamma(\lambda+1)}{(2\pi)^{\lambda+1}} \cos(\lambda\frac{\pi}{2}) H_{\|\xi\|^{-\lambda-1} \operatorname{sign} \xi}$
$T_{\operatorname{sign} x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$,	$\mathcal{F}(T_{\operatorname{sign} x}) = \frac{1}{\mathrm{i}\pi} T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}}$
$H_{x^{-2n}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad n \in \mathbb{N}$	$\mathcal{F}(H_{x^{-2n}}) = \frac{(-1)^n \pi (2\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!} T_{\|\xi\|^{2n-1}}$
$H_{x^{-2}} = T_{\mathrm{f.p.}\frac{1}{x^2}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$	$\mathcal{F}(H_{x^{-2}}) = -2\pi^2 T_{\|\xi\|}$
$H_{x^{-2n+1}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad n \in \mathbb{N}$	$\mathcal{F}(H_{x^{-2n+1}}) = \frac{(-1)^n \mathrm{i}\pi (2\pi)^{2n-2}}{(2n-2)!} T_{\|\xi\|^{2n-2} \operatorname{sign} \xi}$
$H_{x^{-1}} = T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$	$\mathcal{F}(H_{x^{-1}}) = -\mathrm{i}\pi T_{\operatorname{sign} \xi}$
$H_{(x+\mathrm{i}0)^\lambda} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \notin \mathbb{Z}$	$\mathcal{F}(H_{(x+\mathrm{i}0)^\lambda}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\frac{\pi}{2}}}{(2\pi)^\lambda \Gamma(-\lambda)} H_{\xi_+^{-\lambda-1}}$
$H_{(x-\mathrm{i}0)^\lambda} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \notin \mathbb{Z}$	$\mathcal{F}(H_{(x-\mathrm{i}0)^\lambda}) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\frac{\pi}{2}}}{(2\pi)^\lambda \Gamma(-\lambda)} H_{\xi_-^{-\lambda-1}}$
$H_{(x+\mathrm{i}0)^{-k}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad k \in \mathbb{N}$, $k = 2n$ nebo $k = 2n-1$	$\mathcal{F}(H_{(x+\mathrm{i}0)^{-2n}}) = \frac{(-1)^n (2\pi)^{2n}}{(2n-1)!} T_{\xi_+^{2n-1}}$ $\mathcal{F}(H_{(x+\mathrm{i}0)^{-2n+1}}) = \frac{(-1)^n \mathrm{i} (2\pi)^{2n-1}}{(2n-2)!} T_{\xi_-^{2n-2}}$
$H_{(x-\mathrm{i}0)^{-k}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad k \in \mathbb{N}$, $k = 2n$ nebo $k = 2n-1$	$\mathcal{F}(H_{(x-\mathrm{i}0)^{-2n}}) = \frac{(-1)^n (2\pi)^{2n}}{(2n-1)!} T_{\xi_-^{2n-1}}$ $\mathcal{F}(H_{(x-\mathrm{i}0)^{-2n+1}}) = -\frac{(-1)^n \mathrm{i} (2\pi)^{2n-1}}{(2n-2)!} T_{\xi_-^{2n-2}}$
$H_{\|x\|^\lambda} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \quad \lambda \in \mathbb{C}$	$\mathcal{F}\left(\frac{H_{\|x\|^\lambda}}{\Gamma(\frac{\lambda+N}{2})}\right) = \frac{1}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})\pi^{\lambda+\frac{N}{2}}} H_{\|\xi\|^{-\lambda-N}}$

Příklad

Zadání:

(i) Nechť

$$F_n := n\left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_0\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Ukažte, že se jedná o posloupnost temperovaných distribucí a že $F_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$

b) Nalezněte $F \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ takovou, že $F_n \rightharpoonup^* F$ v $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$

c) Přímým výpočtem ověřte, že skutečně platí:

$$\mathcal{F}(F_n) \rightharpoonup^* \mathcal{F}(F)$$

(ii) Nechť

$$G_n := n^4\left(\delta_{\frac{1}{n}} + \delta_{-\frac{1}{n}} - 4\delta_{\frac{1}{2n}} - 4\delta_{-\frac{1}{2n}} + 6\delta_0\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

d) Ukažte, že posloupnost $G_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a určete, k jaké distribuci tato posloupnost slabě hvězdička konverguje.

✓ ***Řešení:***

a) $F_n := n\left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_0\right)$: $\quad \delta_{\frac{1}{n}}, \delta_0$ jsou temperované distribuce (distribuce s kompaktním nosičem),

$F_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, neboť je to lineární kombinace dvou distribucí $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

---

b) Aplikujeme testovací funkci φ na T_n

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \langle F_n, \varphi\rangle = n\left\langle \delta_{\frac{1}{n}} - \delta_0, \varphi\right\rangle = n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi(0)\right) = \left| \begin{array}{c}\text{Taylorův polynom v bodě 0:} \\ T^k_{0,f}(x) = f(0) + \sum_{j=1}^k \frac{f^{(j)}(0)}{j!}(x-0)^j\end{array}\right|$$

$$= n\left(\cancel{\varphi(0)} + \varphi'(0)\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\varphi''(0)}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^3\right) - \cancel{\varphi(0)}\right)$$

$$= \varphi'(0) + \varphi''(0)\frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) = \varphi'(0) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \boxed{\varphi'(0) = -\langle\delta_0', \varphi\rangle}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup^*} -\delta_0' = -D\delta_0}$$

---

c) $\mathcal{F}(F_n) \rightharpoonup^* \mathcal{F}(F)$

$\boxed{\text{LS:}}$ $\quad \mathcal{F}(F_n) = n\left(\mathcal{F}\left(\delta_{\frac{1}{n}}\right) - \mathcal{F}(\delta_0)\right) = n\mathcal{F}\left(\delta_{\frac{1}{n}}\right) - nT_1 = \dots$

$$\left\langle \mathcal{F}\left(\delta_{\frac{1}{n}}\right), \varphi\right\rangle = \left|\begin{array}{c}\text{Z (definice) FT} \\ \text{distribucí}\end{array}\right| = \left\langle \delta_{\frac{1}{n}}, \mathcal{F}(\varphi)\right\rangle = \left|\begin{array}{c}\text{(Vlastnosti)} \\ \text{FT distribucí}\end{array}\right| = \left\langle \delta_{\frac{1}{n}}, \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\langle x,\,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x\right\rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i x}{n}}\,\mathrm{d}x = \left[\int_{\mathbb{R}} \varphi f = \langle T_f, \varphi\rangle\right] = \left\langle T_{\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i x}{n}}}, \varphi\right\rangle$$

$$\lim_{n\to\infty}\langle \mathcal{F}(F_n), \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} n\left(\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i x}{n}} - 1\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i x}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}}_{\substack{\text{je odhadnuto} \\ \text{konst}\cdot x}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\begin{array}{c}\text{Lebesgueova věta} \\ \text{o majorisované} \\ \text{konvergenci}\end{array}\right| = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} -2\pi i x \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i x}{n}} - 1}{-2\pi i x\frac{1}{n}}}_{\to 1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} (-2\pi i x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle T_{-2\pi i x}, \varphi\rangle$$

$\boxed{\text{PS:}}$ $\quad \mathcal{F}(F) = \mathcal{F}(-D\delta_0) = \langle \mathcal{F}(-D\delta_0)\,,\, \varphi \rangle = \text{(FTD)} = \langle -D\delta_0,\, \mathcal{F}(\varphi)\rangle = (-1)^1 \langle \delta_0,\, -D\mathcal{F}(\varphi)\rangle =$

$$= D\left(\mathcal{F}(\varphi)(0)\right) = \text{(Vlastnosti FTD)} = \left[\mathcal{F}(-2\pi i x)^1 \varphi(x)\right](\xi)\Big|_{\xi=0} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (-2\pi i x)\,\varphi(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i \langle x,\,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x\,\Bigg|_{\xi=0} = \int_{\mathbb{R}} (-2\pi i x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \;= \langle T_{-2\pi i x},\, \varphi\rangle$$

$$\boxed{\text{LS:}} = \boxed{\text{PS:}} \qquad \blacksquare$$

---

d) $G_n := n^4\left(\delta_{\frac{1}{n}} + \delta_{-\frac{1}{n}} - 4\delta_{\frac{1}{2n}} - 4\delta_{-\frac{1}{2n}} + 6\delta_0\right)$, $\quad G_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, neboť je lineární kombinací pěti $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \langle G_n,\; \varphi\rangle = n^4\left\langle \delta_{\frac{1}{n}} + \delta_{-\frac{1}{n}} - 4\delta_{\frac{1}{2n}} - 4\delta_{-\frac{1}{2n}} + 6\delta_0,\, \varphi\right\rangle =$

$$= n^4\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \varphi\left(-\frac{1}{n}\right) - 4\varphi\left(\frac{1}{2n}\right) - 4\varphi\left(-\frac{1}{2n}\right) + 6\varphi(0)\right) = \left|\text{Taylorův rozvoj}\right|$$

$$= n^4\Bigg[\cancel{\varphi(0)} + \cancel{\varphi'(0)\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{\varphi''(0)}{2}\frac{1}{n^2}} + \cancel{\frac{\varphi^{(3)}(0)}{6}\frac{1}{n^3}} + \frac{\varphi^{(4)}(0)}{24}\frac{1}{n^4} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^5\right)$$

$$+ \cancel{\varphi(0)} - \cancel{\varphi'(0)\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{\varphi''(0)}{2}\frac{1}{n^2}} - \cancel{\frac{\varphi^{(3)}(0)}{6}\frac{1}{n^3}} + \frac{\varphi^{(4)}(0)}{24}\frac{1}{n^4} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^5\right)$$

$$- \cancel{4\varphi(0)} - \cancel{4\varphi'(0)\frac{1}{2n}} - \cancel{4\frac{\varphi''(0)}{2}\frac{1}{4n^2}} - \cancel{4\frac{\varphi^{(3)}(0)}{6}\frac{1}{8n^3}} - 4\frac{\varphi^{(4)}(0)}{24}\frac{1}{16n^4} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^5\right)$$

$$- \cancel{4\varphi(0)} + \cancel{4\varphi'(0)\frac{1}{2n}} - \cancel{4\frac{\varphi''(0)}{2}\frac{1}{4n^2}} + \cancel{4\frac{\varphi^{(3)}(0)}{6}\frac{1}{8n^3}} - 4\frac{\varphi^{(4)}(0)}{24}\frac{1}{16n^4} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^5\right)$$

$$+ \cancel{6\varphi(0)}\Bigg] = \frac{\varphi^{(4)}(0)}{12} - \frac{\varphi^{(4)}(0)}{12}\frac{1}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \boxed{\frac{\varphi^{(4)}(0)}{16} = \frac{1}{16}\left\langle D^4\delta_0, \varphi\right\rangle}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup^*} \frac{1}{16}D^4\delta_0}$$

4.3.2 Konvoluční rovnice

Příklad

Zadání: Zjednodušte zápis distribuce

$$G = \mathrm{e}^{-(x+1)^2}\left(T_{|x|} * \delta_0'''\right) + \left(\delta_b'' * T_{|x|}\right)$$

tak, aby byl výsledek zapsán pomocí lineárních kombinací Diracovy distribuce a její derivace s nosičem ve vhodných bodech.

✓ ***Řešení:***

- $T_{|x|} * D^3\delta_0 =$ [(2. vlastnost konvoluce distribucí)] $= DT_{|x|} * D^2\delta_0 = T_{\mathrm{sgn}(x)} * D^2\delta_0 = DT_{\mathrm{sgn}(x)} * D\delta_0 =$

  $= 2\delta_0 * D\delta_0 = 2\left(\delta_0 * D\delta_0\right) = [\text{konvoluce s Diracem}] = 2\,D\delta_0 = 2\delta_0'$

  A proto:

$$\left\langle \mathrm{e}^{-(x+1)^2} T_{|x|} * D^3\delta_0,\ \ \varphi \right\rangle = \left\langle T_{|x|} * D^3\delta_0,\ \ \mathrm{e}^{-(x+1)^2}\varphi \right\rangle = \left\langle 2\delta_0',\ \ \mathrm{e}^{-(x+1)^2}\varphi \right\rangle = 2(-1)^1\left\langle \delta_0,\ \ D\left(\mathrm{e}^{-(x+1)^2}\varphi\right)\right\rangle =$$

$$= -2\left\langle \delta_0,\ \ \left(\mathrm{e}^{-(x+1)^2}\right)'\varphi + \varphi'\mathrm{e}^{-(x+1)^2}\right\rangle = -2\left\langle \delta_0,\ \ \mathrm{e}^{-(x+1)^2}\left(-2(x+1)\right)\varphi + \varphi'\mathrm{e}^{-(x+1)^2}\right\rangle =$$

$$= -2\left(\mathrm{e}^{-1}(-2)\varphi(0) + \varphi'(0)\,\mathrm{e}^{-1}\right) = 2\,\mathrm{e}^{-1}\left(2\varphi(0) - \varphi'(0)\right) = \boxed{2\,\mathrm{e}^{-1}\left(2\left\langle\delta_0,\ \varphi\right\rangle + \left\langle\delta_0',\ \varphi\right\rangle\right)}$$

- $D^2\delta_b * T_{|x|} = D\delta_b * DT_{|x|} = D\delta_b * T_{\mathrm{sgn}(x)} = \delta_b * DT_{\mathrm{sgn}(x)} = \delta_b * 2\delta_0 = 2\delta_b$

  A proto:

$$\left\langle \mathrm{e}^{-(x+1)^2} D^2\delta_b * T_{|x|},\ \ \varphi \right\rangle = \left\langle D^2\delta_b * T_{|x|},\ \ \mathrm{e}^{-(x+1)^2}\varphi \right\rangle = \left\langle 2\delta_b,\ \ \mathrm{e}^{-(x+1)^2}\varphi \right\rangle = \left\langle \delta_b,\ \ 2\mathrm{e}^{-(x+1)^2}\varphi \right\rangle$$

$$= 2\,\mathrm{e}^{-(b+1)^2}\varphi(b) = \boxed{2\,\mathrm{e}^{-(b+1)^2}\left\langle\delta_b,\ \varphi\right\rangle}$$

Celkem tedy máme:

$$G = 2\,\mathrm{e}^{-1}\left(2\delta_0 + \delta_0'\right) + 2\,\mathrm{e}^{-(b+1)^2}\delta_b$$

Příklad

Zadání: Nalezněte $y \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ řešení konvoluční rovnice:

$$y * \mathrm{e}^{-\alpha|x|} = \mathrm{e}^{-\beta|x|} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$$

Proveďte kontrolu, že jsou všechny konvoluce dobře definovány.

✓ ***Řešení:***

Pro $\alpha = \beta$: $Y = \delta$, protože konvoluce δ distribuce s další distribucí dává zpátky původní distribuci

Viz například příklad (24.3.16)

Pro $\alpha \neq \beta$: Máme $\mathcal{F}\left(T_{\mathrm{e}^{-\alpha|x|}}\right) = T_{\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\right)}$, tedy

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|x|}\, \mathrm{e}^{-2\pi i x\xi}\, \mathrm{d}x = 2\mathrm{Re} \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+2\pi i\xi)x}\, \mathrm{d}x$$

Aplikujeme Fourierovu transformaci na celou rovnici

$$\mathcal{F}\left(y * \mathrm{e}^{-\alpha|x|}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-\beta|x|}\right)(\xi)$$

$$\hat{y}(\xi) \cdot \mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-\beta|x|}\right)(\xi)$$

Nyní vypočítáme transformaci $\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\right)(\xi)$, z níž dostaneme vztah i pro $\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-\beta|x|}\right)(\xi)$

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|x|}\, \mathrm{e}^{-2\pi i x\xi}\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|x|-2\pi i x\xi}\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\alpha x-2\pi i x\xi}\, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x-2\pi i x\xi}\, \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{\mathrm{e}^{x(\alpha-2\pi i\xi)}}{\alpha - 2\pi i\xi}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{\mathrm{e}^{-x(\alpha+2\pi i\xi)}}{-(\alpha+2\pi i\xi)}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{\alpha-2\pi i\xi} - 0 + 0 - \frac{1}{-(\alpha+2\pi i\xi)}$$

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\right)(\xi) = \frac{1}{\alpha-2\pi i\xi} + \frac{1}{\alpha+2\pi i\xi} = \frac{\alpha + \cancel{2\pi i\xi} + \alpha - \cancel{2\pi i\xi}}{(\alpha+2\pi i\xi)(\alpha-2\pi i\xi)} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2\xi^2}; \quad \mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-\beta|x|}\right)(\xi) = \frac{2\beta}{\beta^2+4\pi^2\xi^2}$$

Nyní dosadíme nalezené transformace do konvoluční rovnice:

$$\hat{y}(\xi) \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2\xi^2} = \frac{2\beta}{\beta^2+4\pi^2\xi^2}$$

$$\hat{y}(\xi) = \frac{2\beta}{\beta^2+4\pi^2\xi^2} \cdot \frac{\alpha^2+4\pi^2\xi^2}{2\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\alpha^2+4\pi^2\xi^2}{\beta^2+4\pi^2\xi^2}$$

Výsledek si upravíme pro snazší výpočet zpětné Fourierovy transformace

$$\hat{y}(\xi) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2-\beta^2+\beta^2+4\pi^2\xi^2}{\beta^2+4\pi^2\xi^2}\right) = \frac{\beta}{\alpha}\left(1 + \frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2+4\pi^2\xi^2}\right) = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}\,\frac{2\beta}{\beta^2+4\pi^2\xi^2}$$

Nyní aplikujeme zpětnou Fourierovu transformaci

$$y = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}\,\frac{2\beta}{\beta^2+4\pi^2\xi^2}\right) = \frac{\beta}{\alpha}\underbrace{\mathcal{F}^{-1}(T_1)(x)}_{\delta_0} + \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}\,\mathcal{F}^{-1}\underbrace{\left(\frac{2\beta}{\beta^2+4\pi^2\xi^2}\right)}_{\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-\beta|x|}\right)}(x)$$

$$\boxed{y = \frac{\beta}{\alpha}\delta_0 + \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}\,\mathrm{e}^{-\beta|x|}}$$

Zkouška:

Pokusíme se dosadit nalezené řešení y do levé strany rovnice a uvidíme, zda nám vyjde pravá strana.

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\delta_0 \; + \; \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}\,\mathrm{e}^{-\beta|x|}\right) * \,\mathrm{e}^{-\alpha|x|} = \frac{\beta}{\alpha}\delta_0 * \mathrm{e}^{-\alpha|x|} + \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}\,\mathrm{e}^{-\beta|x|} * \mathrm{e}^{-\alpha|x|} = \dots$$

Ověření, že jsou použité konvoluce dobře definované:

$$\left[\begin{array}{lll} \text{kde } \delta * \mathrm{e}^{-\alpha|x|} \text{ existuje,} & f_1 = \delta_0, & f_2 = \mathrm{e}^{-\alpha|x|} \in L^1 \text{a platí } T_{f_1} * \delta = T_{f_1} \\ \text{kde } \mathrm{e}^{-\beta|x|} * \mathrm{e}^{-\alpha|x|} \text{ existuje,} & f_1 = \mathrm{e}^{-\beta|x|} \in L^1, & f_2 = \mathrm{e}^{-\alpha|x|} \in L^1 \text{a tedy platí } T_{f_1} * T_{f_2} = T_{(f_1\,*\,f_2)} \end{array}\right]$$

$$\dots = \frac{\beta}{\alpha}\,\mathrm{e}^{-\alpha|x|} + \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}\,\mathrm{e}^{-\beta|x|} * \mathrm{e}^{-\alpha|x|} = \dots$$

Konvoluci vystupující v posledním výrazu si nejprve spočítáme zvlášť:

Rozpis z definice konvoluce: $\quad \mathrm{e}^{-\beta|x|} * \mathrm{e}^{-\alpha|x|} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta|x-y|}\,\mathrm{e}^{-\alpha|y|}\,\mathrm{d}y$

$$\left[\begin{array}{l} \boxed{x>0} \quad \to \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\beta(x-y)}\,\mathrm{e}^{\alpha(y)}\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-\beta(x-y)}\,\mathrm{e}^{-\alpha(y)}\,\mathrm{d}y + \int_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{\beta(x-y)}\,\mathrm{e}^{-\alpha(y)}\,\mathrm{d}y = \\ \qquad = \mathrm{e}^{-\beta x}\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{y(\alpha+\beta)}\,\mathrm{d}y + \mathrm{e}^{-\beta x}\int_{0}^{x} \mathrm{e}^{y(\beta-\alpha)}\,\mathrm{d}y + \mathrm{e}^{\beta x}\int_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{-y(\alpha+\beta)}\,\mathrm{d}y = \\ \qquad = \mathrm{e}^{-\beta x}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{y(\alpha+\beta)}}{\alpha+\beta}\right]_{-\infty}^{0} + \mathrm{e}^{-\beta x}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{y(\beta-\alpha)}}{\beta-\alpha}\right]_{0}^{x} + \mathrm{e}^{\beta x}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{-y(\alpha+\beta)}}{-(\alpha+\beta)}\right]_{x}^{\infty} = \\ \qquad = \mathrm{e}^{-\beta x}\left(\dfrac{1}{\alpha+\beta} - 0\right) + \mathrm{e}^{-\beta x}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x(\beta-\alpha)}}{\beta-\alpha} - \dfrac{1}{\beta-\alpha}\right) + \mathrm{e}^{\beta x}\left(0 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x(\alpha+\beta)}}{-(\alpha+\beta)}\right) = \\ \qquad = \mathrm{e}^{-\beta x}\dfrac{1}{\alpha+\beta} + \mathrm{e}^{-\beta x}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x(\beta-\alpha)}}{\beta-\alpha} - \dfrac{1}{\beta-\alpha}\right) + \mathrm{e}^{\beta x}\dfrac{\mathrm{e}^{-x(\alpha+\beta)}}{\alpha+\beta} \end{array}\right]$$

A dosadíme zpátky do rovnice:

$$\dots = \frac{\beta}{\alpha}\,\mathrm{e}^{-\alpha|x|} + \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\beta x}}{\alpha+\beta} - \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\alpha-\beta} + \frac{\mathrm{e}^{-\beta x}}{\alpha-\beta} + \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\alpha+\beta}\right) =$$

$$= \frac{\beta}{\alpha}\,\mathrm{e}^{-\alpha|x|} + \frac{1}{2\alpha}\Big((\alpha-\cancel{\beta})\,\mathrm{e}^{-\beta x} - (\cancel{\alpha}+\beta)\,\mathrm{e}^{-\alpha x} + (\alpha+\cancel{\beta})\,\mathrm{e}^{-\beta x} + (\cancel{\alpha}-\beta)\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\Big) =$$

$$= \cancel{\frac{\beta}{\alpha}\,\mathrm{e}^{-\alpha|x|}} + \frac{1}{2\alpha}\Big(2\alpha\,\mathrm{e}^{-\beta x} - \cancel{2\beta\,\mathrm{e}^{-\alpha x}}\Big) = \boxed{\mathrm{e}^{-\beta x}}$$

Příklad

Zadání: Nalezněte řešení konvoluční rovnice pro $\alpha > 0$:

$$y * \left(H(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\right) = x_+^2 + x_+^3$$

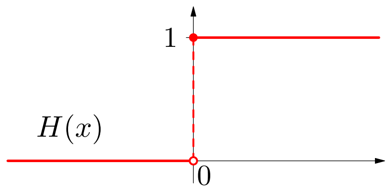
kde $H(x)$ jest Heavisideova funkce. Počítejte nejprve formálně, po nalezení řešení ověřte, že daná konvoluce má dobrý smysl.

✓ ***Řešení:***

$\boxed{\text{LS:}}$ $\mathcal{F}\left(y * \left(H(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\right)\right) = \mathcal{F}(y)\,\mathcal{F}\left(H(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\right)$

Protože $H(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha x} \in L^1(\mathbb{R})$ máme předpis pro Fourierovu transformaci:

$$\mathcal{F}\left(H(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot x}\,\mathrm{d}x$$



Heavisideova funkce nám efektivně pouze změní meze, protože nám vynuluje všechny záporné příspěvky

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot x}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot x}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{(-\alpha-2\pi i\xi)x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{(-\alpha-2\pi i\xi)x}}{-\alpha-2\pi i\xi}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha+2\pi i\xi}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(y)\cdot\frac{1}{\alpha+2\pi i\xi} &= \mathcal{F}\left(x_+^2 + x_+^3\right)\\
\mathcal{F}(y) &= (\alpha+2\pi i\xi)\,\mathcal{F}\left(x_+^2 + x_+^3\right)\\
\mathcal{F}(y) &= (\alpha T_1 + 2\pi i\xi T_1)\,\mathcal{F}\left(x_+^2 + x_+^3\right)\\
\mathcal{F}(y) &= \left(\mathcal{F}(\alpha\delta_0) + \mathcal{F}(D\delta_0)\right)\mathcal{F}\left(x_+^2 + x_+^3\right)
\end{aligned}$$

Aplikujeme inversní Fourierovu transformaci $\mathcal{F}^{-1}$

$$\begin{aligned}
y &= (\alpha\delta_0 + D\delta_0) * \left(x_+^2 + x_+^3\right)\\
y &= \alpha\delta_0 * \left(x_+^2 + x_+^3\right) + D\delta_0 * \left(x_+^2 + x_+^3\right)\\
y &= \alpha\left(x_+^2 + x_+^3\right) + DT_{x_+^2 + x_+^3}
\end{aligned}$$

Protože x_+^2 i x_+^3 jsou C^1 na celém $\mathbb{R}$, derivace zprava v 0 je nulová, spojitě se napojují na 0, včetně prvních derivací, můžeme zderivovat:

$$\boxed{y = \alpha\left(x_+^2 + x_+^3\right) + 2x_+ + 3x_+^2}$$

Konvoluce v zadání má smysl, neboť obě funkce mají zleva omezený nosič

$\Rightarrow$ výsledek je lokálně integrovatelná funkce (polynomiální růst v nekonečnu).

Příklad

Zadání: Nalezněte řešení konvoluční rovnice (tedy nalezněte temperovanou distribuci G)

$$T_H * G = \delta$$

Řešte nejprve formálně, za předpokladu, že konvoluce existuje a platí příslušné věty o Fourierově transformaci, po získání výsledku vysvětlete, že postup šlo využít; speciálně vysvětlete, že konvoluce má smysl a že její Fourierova transformace má očekávaný tvar, který má smysl v temperovaných distribucích.

✓ ***Řešení:***

Za předpokladu, že existuje Fourierova transformace všech distribucí, aplikujeme Fourierovu transformaci na rovnici:

$$\mathcal{F}(T_H)\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(\delta)$$

Využijeme tabulky FT distribucí: $\mathcal{F}(\delta) = T_1, \quad \mathcal{F}(T_H) = \frac{1}{2\pi i} T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{\xi}} + \frac{1}{2}\delta$

$$\left(\frac{1}{2\pi i} T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{\xi}} + \frac{1}{2}\delta\right) \mathcal{F}(G) = T_1$$

Tedy $\mathcal{F}(G)$ musí splňovat

a) z $T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{\xi}}$ dostanu T_1, potřebuji se zbavit výrazu $\dfrac{1}{2\pi i\xi}$

b) z δ_0 dostanu T_0, alias příspěvek se mi vynuluje

Taková funkce se zvolí: $\mathcal{F}(G) = 2\pi i\xi \quad \Rightarrow \quad$ proto z tabulky $\boxed{G = D\delta}$

Argumentace:

- Konvoluce má smysl, protože G má kompaktní nosič.

  A navíc $D^n\delta * G = D^n G$ pro $\forall G \in \mathcal{D}'$

- Násobeni F.T. má také smysl, protože $2\pi i\xi$ je pomalu rostoucí funkce ($2\pi i\xi \in \Theta_M$)

$$\langle \delta_0,\, 2\pi i\xi \rangle = 2\pi i\xi\big|_0 = 0$$

$$\left\langle \xi T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{\xi}},\quad \varphi \right\rangle = \mathrm{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\xi}\varphi(\xi)\,\xi\,\mathrm{d}\xi \; = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \; = T_1$$

4.4 Poznámky a početní tríčky

Vzoreček: Eulerova reflexní formule

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad \Rightarrow \quad \Gamma(1+\lambda)\Gamma(-\lambda) = \frac{\pi}{\sin(\pi + \pi\lambda)} = -\frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)} \quad \Rightarrow \quad \sin(\pi\lambda) = -\frac{\pi}{\Gamma(1+\lambda)\Gamma(-\lambda)}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\left(H_{(x+0i)^\lambda}\right) = H_{\xi_+^{-\lambda-1}} \cdot \mathrm{e}^{i\lambda\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{2\pi}{\Gamma(-\lambda)(2\pi)^{\lambda+1}} = H_{\xi_+^{-\lambda-1}} \cdot \mathrm{e}^{i\lambda\frac{\pi}{2}} \cdot (2\pi)^{-\lambda} \cdot \frac{1}{\Gamma(-\lambda)}$$