Příklady. ① Úloha

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \delta_{(0,a)} \qquad \text{v } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde $\Omega = \{(x,y);\ y > 0\}$. *Řešení:* Víme, že $U = -\frac{1}{4\pi}\ln(x^2+y^2)$ řeší rovnici s Diracem v počátku. Tedy klademe

$$u = -\frac{1}{4\pi}\big\{ \ln(x^2+(y-a)^2) - \ln(x^2+(y+a)^2)\big\}$$

– řeší rovnici s Diracem v $(0,a)$ a $(0,-a)$; tedy $u=0$ pro $y=0$ díky symetrii.
② Úloha

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \delta_{(0,0)} \qquad \text{v } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde $\Omega = \{(x,y);\ |y| < b\}$. *Řešení:* Funkce $f(z) = i\exp(\pi z/2b)$ zobrazuje Ω konformně na $G = \{(\xi,\eta);\ \eta > 0\}$; navíc $f(0) = i$. Pomocí Věty 28.12, část 3 je řešením $v\circ f$, kde v řeší Příklad 1 ($a=1$). Zapsáno podrobně:

$$v(\xi,\eta) = -\frac{1}{4\pi}\big\{ \ln(\xi^2+(\eta-1)^2) - \ln(\xi^2+(\eta+1)^2)\big\},$$

složeno s funkcí f jakožto zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \xi &= -\exp\left(\frac{\pi x}{2b}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2b}\right) \\ \eta &= \exp\left(\frac{\pi x}{2b}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right) \end{aligned}$$

③ Úloha

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \qquad \text{v } \Omega, \\ u &= g \qquad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde $\Omega = \{(x,y);\ y > 0\}$. *Řešení:* Najdeme nejprve fundamentální řešení, tj. funkcí U splňující

$$\begin{aligned} -\Delta U &= 0 \qquad \text{v } \Omega, \\ U(x,0+) &= \delta_0(x). \end{aligned}$$

Lze spočítat, že $U(x,y) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$. Tedy řešení s obecnou okrajovou podmínkou má tvar

$$u = U *_x g = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{y g(s)}{(x-s)^2+y^2} ds.$$

④ Úloha

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \qquad \text{v } \Omega, \\ u &= h \qquad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde $\Omega = \{(x, y);\ x^2 + y^2 > 1\}$, a $h = 1$ pro $y > 0$, $h = -1$ pro $y < 0$. *Řešení:* Převedeme opět na předchozí případ – konformní zobrazení (například) $f(z) = i\frac{z-1}{z+1}$ zobrazuje Ω na horní polorovinu $G = \{(\xi, \eta);\ \eta > 0\}$. Okrajová podmínka h na hranici Ω se přenese na funkci $g = -\operatorname{sgn}\xi$ na hranici G. Tedy v má tvar (viz Příklad 3)

$$v = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{sgn}(s)\eta}{(\xi - s)^2 + \eta^2} ds = -\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\eta}$$

Řešení původní úlohy u získáme složením s funkcí f, již takto píšeme jako

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{(x-1)\ y - (x+1)\ y}{y^2 + (x+1)^2} \\ \eta &= \frac{y^2 + (x-1)\ (x+1)}{y^2 + (x+1)^2} \end{aligned}$$

⑤ Úloha

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \qquad \text{v } \Omega, \\ u &= h \qquad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde oblastí je první kvadrant $\Omega = \{x > 0,\ y > 0\}$ a okrajová podmínka $h = 1$ na "rohu" $\partial\Omega \cap \{x < 1, y < 1\}$ a $h = 0$ jinde. *Řešení:* pomocí $f(z) = z^2$ konformně převedeme opět na horní polorovinu $G = \{\eta > 0\}$ s okrajovou podmínkou $g(\xi) = 1$ pro $\xi \in (-1, 1)$ a nula jinde. Tedy pomocí příslušného Poissonova jádra

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\eta\, ds}{(\xi - s)^2 + \eta^2} = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi+1}{\eta}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi-1}{\eta}\right)\right)$$

což je opět třeba složit s funkcí $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tj.

$$\xi = x^2 - y^2, \qquad \eta = 2xy$$

⑥ Úloha $-\Delta u = \delta_{(1,1)}$ v oblasti $\Omega = \{r > 0,\ 0 < \theta < \pi/3\}$, s nulou na hranici Ω.
Nápomoc: viz úlohy 5 a 1 výše.