## Rovnice vedení tepla.

Řešíme rovnici $\partial_t u - \Delta u = 0$ pro neznámou funkci $u = u(x,t)$, kde $t > 0$, $x \in \Omega \in \mathbb{R}^n$. Počáteční podmínka je $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$.

① $\Omega = \mathbb{R}$, $u_0(x) = \exp(-cx^2)$, $c > 0$. Návod: použijte Fourierovu transformaci přes $x$. Výsledek:

$$\frac{1}{\sqrt{4ct+1}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t+1/c}\right).$$

② $\Omega = (0,\pi)$, $u_0(x) = \pi(x-\pi)$, $x \in (0,\pi)$; okrajové podmínky $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ pro $t > 0$. Návod: počáteční podmínku rozšiřte liše na $(-\pi,0)$ a dále $2\pi$-periodicky. Hledejte řešení ve tvaru Fourierovy řady s časově proměnnými koeficienty. Výsledek:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp(-k^2 t)\sin(kx), \qquad b_k = \frac{4}{k^3}(1-(-1)^k)$$

**Ověřte**, že řešení je klasické; dokonce $u$, $\partial_x$ jsou spojité pro $t \geq 0$ a $u$ je $C^\infty$ pro $t > 0$.

③ $\Omega = (0,\pi)$, počáteční podmínka $u_0(x) = 1$ pro $x \in (0,\pi)$, okrajová podmínka $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. Řešení: $u_0$ rozšiřte liše v $x = \pi$ na $-\pi,\pi$ a dále $2\pi$-periodicky. Hledejte řešení ve tvaru Fourierovy řady s časově proměnnými koeficienty. Výsledek:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp(-k^2 t)\sin(kx), \qquad b_k = \frac{2}{k\pi}(1-(-1)^k)$$

Řešení **není** spojité pro $t \to 0+$ - nekompatibilita počáteční a okrajové podmínky.

④ $\Omega = (0,\pi)$, počáteční podmínka $u_0(x) = \exp(ax)$, okrajové podmínky $\partial_x u(0,t) = \partial_x u(\pi,t) = 0$. Řešení: $u_0$ rozšiřte sudě a dále $2\pi$-periodicky. Výsledek:

$$\frac{2}{a\pi}\big(e^{a\pi}-1\big) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(-k^2 t)\cos(kx), \qquad a_k = \frac{2a}{\pi(k^2+a^2)}\big((-1)^k e^{a\pi}-1\big)$$

Čemu se rovná $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$?

⑤ $\partial_t u - k\Delta u = 0$ ($k$ je koeficient tepelné vodivosti) $\Omega = (0,\infty)$, okrajová podmínka $u(x=0,t) = f(t)$ je daná $T$-periodická funkce (okrajovou podmínku pro $x=\infty$ nahradíme požadavkem omezenosti řešení pro $x\to\infty$).
[Hledáme řešení ve tvaru $\sum_{n\in Z} c_n(x)\exp(\frac{2\pi}{T}itn)$. Odtud $c_n''(x) - \frac{2\pi}{kT}inc_n(x) = 0$, char. polynom $\lambda^2-\omega^2=0$, kde $\omega = (1\pm i)q_n$, $\pm$ odpovídá kladnému/zápornému $n$ a $q_n = \sqrt{\frac{\pi|n|}{kT}}$. Z požadavku omezenosti řešení pro $x\to\infty$ zůstane jen řešení $c_n(x) = c_n\exp(-(1\pm i)q_n x)$. Obecné řešení má tvar:

$$\sum_{n\in Z} c_n \exp(-(1\pm i)q_n x)\exp(\frac{2\pi}{T}int)$$

kde konstanty $c_n$ dostanu z fourierova rozvoje okrajové podmínky $f(t)$.
Fyzikální interpretace: $x$ je hloubka (cm) pod povrchem země, $f(t)$ kolísající teplota povrchu, $k = 2{\cdot}10^{-3}cm^2/sec$ tepelná vodivost půdy; čas je v sekundách.
Reálná část prvního modu (členu u $c_1$) je

$$\exp(-q_1 x)\cos(\frac{2\pi}{T}t + \gamma_1 - q_1 x)$$

Vidím, že menší $T$ dává větší $q_1$, tj. rychlejší tlumení amplitudy do hloubky (člen $\exp(-q_1x)$), také větší zaostávání fáze (člen $-q_1x$ v argumentu cosinu).

⑥ $\Omega = \{(x,y);\ x^2+y^2 < a^2\}$, počáteční podmínka $u|_{t=0} = f$, okrajová podmínka $u_{r=a} = 0$, navíc předpoklad radiální symetrie, tj. vše závisí jen na $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
[V polárních souřadnicích je to rovnice $\partial_t u - \partial_{rr}u - \frac{1}{r}\partial_r u = 0$, řešení ve tvaru $c(t)R(r)$ vedou na $\exp(-\lambda_m^2 t)J_0(\lambda_m r)$, kde $J_0$ je Besselova funkce a $\lambda_m = \alpha_m/a$, kde $\alpha_m$ jsou kořeny $J_0$ (splnění okrajové podmínky!) Obecné řešení má tvar

$$\sum_{m\geq 1} c_m \exp(-\lambda_m^2 t)J_0(\lambda_m r)\,.$$

⑦ Jako předchozí příklad, ale bez předpokladu radiální symetrie, tj. $u = u(t,r,\varphi)$.
[Řešení hledám ve tvaru $c(t)R(r)\exp(in\varphi)$, vede na $n$-tou Besselovu rovnici pro $R(r)$, řešení mají tvar $\exp(-\lambda_{n,m}t)J_n(\lambda_{n,m}r)\exp(in\varphi)$, kde $J_n$ je Besselova funkce, $\{\alpha_{m,n}\}_{m\in N}$ její kořeny, $\lambda_{n,m} = \alpha_{n,m}/a$. Jako vedlejší produkt dostaneme, že $J_n(\lambda_{n,m}r)\exp(in\varphi)$ jsou vlastní funkce laplace v dané geometrii.