Fundamentální řešení.

① Nalezněte fundamentální řešení rovnice difuze s tlumením a konvekcí, tj. řešení $u = u(x,t)$ rovnice

$$\partial_t u + au + b\partial_x u - c^2 \frac{d}{dx} u = \delta_0(t)\delta_0(x)\,,$$

kde a, b jsou reálné konstanty a $c > 0$.

② Nalezněte $u = u(x)$ řešení rovnice

$$u + 2u' + u'' = \delta_0(x)$$

Nápomoc: $[\widehat{e^{-x}Y(x)}](\xi) = 1/(1 + 2\pi i\xi)$.

③ Nalezněte $u = u(x,t)$ řešení rovnice

$$\partial_{tt} u + \partial_{tx} u = \delta_0(t)\delta_0(x)$$

Nápomoc: $\widehat{\operatorname{sgn}(x)}(\xi) = 1/i\pi\xi$.

④ Nalezněte fundamentální řešení Schrödingerovy rovnice, tj. $u = u(x,t)$ splňující

$$\partial_t u - i\Delta u = \delta_0(t)\delta_0(x)$$

Nápomoc: $[\widehat{\exp(ix^2)}](\xi) = \sqrt{\pi}\exp(i\pi/4)\exp(-i\pi^2\xi^2)$.

⑤ Nalezněte $u = u(t)$ řešení rovnice

$$u^{(n)} = \delta_0(t)$$

kde $n \geq 1$. Vyjádřete s jeho pomocí n-tou primitivní funkci k dané $f(t)$.

⑥ $u''(t) - a^2 u(t) = \delta_0(t)$, $a > 0$.

⑦ $u''(t) + 2\gamma u'(t) + \sigma u(t) = \delta_0(t)$, γ, $\sigma > 0$ a navíc $\gamma^2 < \sigma$.

1. $\partial_t\widehat{u}(t,\xi)+K(\xi)\widehat{u}(t,\xi)=\delta_0(t)$, kde $K(\xi)=a+2\pi i\xi b+4\pi^2c^2\xi^2$, tedy

$$u(x,t)=\frac{e^{-at}}{\sqrt{4\pi tc^2}}\exp\left(-\frac{(x-bt)^2}{4tc^2}\right)Y(t)$$

2. $\widehat{u}(\xi)=\big(1+2\pi i\xi\big)^{-2}$; odtud pak $u(x)=xe^{-x}Y(x)$.

3. $\widehat{u}(\xi,t)=y(t)Y(t)$, kde $y(t)$ řeší

$$y''+2\pi i\xi y'=0 \tag{1}$$
$$y(0)=0,\ y'(0)=1 \tag{2}$$

   Odtud $y(t)=a+b\exp(-2\pi i\xi t)$, kde $a=-b=1/2\pi i\xi$, a konečně $u(x,t)=Y(x)Y(t-x)Y(t)$.

4. $K(x,t)=(4\pi t)^{-1/2}\exp(-i\pi/4)\exp\left(\frac{i\pi x^2}{4t}\right)$.

5. $u(t)=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}Y(t)$; $\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t f(s)(t-s)^{n-1}\,ds$.

6. $u(t)=a^{-1}\sinh(at)Y(t)$

7. F.S. $\{e^{-\gamma t}\cos(\omega t),e^{-\gamma t}\sin(\omega t)\}$, $\omega=\sqrt{\sigma-\gamma^2}>0$;
   $u(t)=\omega^{-1}e^{-\gamma t}\sin(\omega t)Y(t)$