Vlnová rovnice.

① Najděte řešení Cauchyho úlohy v $\mathbb{R}$

$$\partial_{tt}u - \partial_{xx}u = f(x,t)$$

s nulovými počátečními podmínkami a pravou stranou $f(x,t)$ rovnou (i) 1 , (ii) x^2 , (iii) $\exp(x-t)$.

② Najděte řešení Cauchyho úlohy v $\mathbb{R}$

$$\partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 1$$

s počátečními podmínkami $u(x,0) = 0$, $\partial_t u(x,0) = 1$. Dokážete nalézt řešení i pro $t < 0$?

③ Řešte rovnici $\partial_{tt}u - \partial_{xx}u = f(x,t)$ v intervalu $x \in (0,1)$, s okrajovou podmínkou $u(0,t) = u(1,t) = 0$ pro $t \geq 0$ a pravou stranou resp. počáteční podmínkou:
(i) $f(x,t) = e^x$ nebo $\sin(\pi x)$
(ii) $u(x,0) = x(1-x)$
(iii) $\partial_t u(x,0) = 1$

④ Řešte úlohy jako v bodě ③ výše, ale pro obecnější rovnici

$$\partial_{tt}u + a\partial_t u + bu - c^2\partial_{xx}u = 0$$

⑤ Nechť počáteční podmínky $u_0(x)$ a $u_1(x)$ jsou liché resp. sudé funkce. Ukažte, že řešení (VR) má analogickou vlastnost (vůči proměnné x pro pevné $t > 0$).
Užijte k nalezení řešení (VR) na polopřímce $x > 0$ s okrajovou podmínkou (i) $u(0,t) = 0$ resp. (ii) $\partial_x u(x,0) = 0$.

⑥ Ukažte, že radiálně symetrické řešení (VR) v dimenzi $d = 3$ má tvar

$$u(\rho,t) = \frac{1}{\rho}\big(F(\rho - ct) + G(\rho + ct)\big)$$

kde $|x| = \rho$.

⑦ Řešte $\partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = 0$ na intervalu $x > 0$, s okrajovou podmínkou $u(0,t) = 0$ pro $\forall t \geq 0$ a počátečními podmínkami $u(x,0) = 0$, $\partial_t u(x,0) = \delta_b(x)$, kde $b > 0$ je pevné.

Nápověda a řešení.

1. $u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\,dyds$, tedy $u(x,t) =$ (i) $t^2/2$, (ii) $t^2x^2/2 + t^4/12$, (iii) $e^x(e^t/4 - e^{-t}/4 - te^{-t}/2)$

2. $u(x,t) = t + t^2/2$.

3. Rozvoj do funkcí $w_k(x) = \sin(k\pi x)$, $\lambda_k = k^2\pi^2$, $k \geq 1$. Fourierovy koeficienty: $v(x) = \sum_k v_k \sin(k\pi x) \iff v_k = 2\int_0^1 v(x)\sin(k\pi x)\,dx$; konkrétně:

$$v(x) = 1 \implies v_k = \frac{2}{k\pi}\big(1-(-1)^k\big)$$
$$v(x) = e^x \implies v_k = \frac{2k\pi}{\pi^2k^2+1}\big(1-(-1)^k e\big)$$
$$v(x) = x(1-x) \implies v_k = \frac{4}{\pi^3k^3}\big(1-(-1)^k\big)$$

4. Rovnice pro $u_k(t)$ bude $u_k'' + au_k' + (b + c^2\lambda_k^2)u_k = 0$.

5. Počáteční podmínky rozšiřte (i) liše resp. (ii) sudě na celé $\mathbb{R}$ a řešte příslušnou Cauchyho úlohu.

6. Za daných předpokladů $\Delta u = \partial_{\rho\rho}u + \frac{2}{\rho}\partial_\rho u$. Odsud plyne, že $v(\rho,t) = \rho u(\rho,t)$ splní 1d vlnovou rovnici, a užijí se d'Alembertovy vzorce.

7. Počáteční podmínku rozšíříme liše (úloha 5) na $u_0(x) = \delta_{-b}(x) - \delta_b(x)$ a tedy

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\chi_{(-ct,ct)} * (\delta_b - \delta_{-b}) = \frac{1}{2c}\big(\chi_{(b-ct,b+ct)}(x) - \chi_{(-b-ct,-b+ct)}(x)\big)$$

uvážime-li, že $h * \delta_b(x) = h(x-b)$.