Lineární rovnice prvního řádu

① Je dána rovnice

$$x \cdot \nabla u = \alpha$$

kde $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Najděte řešení v oblasti $\{x_n > 0\}$ s počáteční podmínkou $u = h$ na množině $\{x_n = 1\}$.

② Je dána rovnice

$$y\partial_x u + x\partial_y u = \gamma u$$

kde $u = u(x, y)$ v $\mathbb{R}^2$, $\gamma \in \mathbb{R}$.
(i) Najděte charakteristické křivky a obecný tvar řešení pro homogenní úlohu (tj. $\gamma = 0$).
(ii) Najděte řešení s počáteční podmínkou $u(x, 0) = g(x)$.

③ Totéž co v úloze 2 pro rovnici

$$y\partial_x u - x\partial_y u = \gamma u$$

④ Najděte charakteristiky rovnice

$$x\partial_x u + y\partial_y u + (x^2 + y^2)\partial_z u = 0$$

⑤ Najděte charakteristiky rovnice

$$\partial_x u + xz\partial_y u - xy\partial_z u = 0$$

⑥ Řešte rovnici

$$\partial_x u + \partial_y u = u^2$$

s počáteční podmínkou $u(x, 0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Nápověda a řešení.

1. Pišme $x = (\overline{x}, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Char. křivky $\overline{x}(t) = \overline{x}_0 e^t$, $x_n(t) = e^t$, $z(t) = h(\overline{x}_0) + \alpha t$. Řešení $u(x) = h(\overline{x}/x_n) + \alpha \ln x_n$.

2. (i) Hyperboly $x = x_0 \cosh t + y_0 \sinh t$, $y = x_0 \sinh t + y_0 \cosh t$, neboli $x^2 - y^2 = c$; řešení $u(x, y) = U(x^2 - y^2)$.

   (ii) Char. křivky $x = x_0 \cosh t$, $y = x_0 \sinh t$, $z = g(x_0)e^{\gamma t}$. Odtud $|x_0| = \sqrt{x^2 - y^2}$ a $t = \operatorname{argtgh}(y/x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+y}{x-y}$, v oblasti $|x| > |y|$.

3. (i) Char. křivky jsou kružnice $x^2 + y^2 = c$, tedy $u(x, y) = U(x^2 + y^2)$.

   (ii) Char. křivky $x = x_0 \cos t$, $y = -x_0 \sin t$, $z = g(x_0)e^{\gamma t}$. Odtud $|x_0| = \sqrt{x^2 + y^2}$ a (v oblasti $x > 0$) $t = \operatorname{arctg}(-y/x)$.

4. Char. křivky jsou $x = c_1 e^t$, $y = c_2 e^t$, $z = c_3 + (c_1^2/2 + c_2^2/2)e^{2t}$; odtud $x/y = c$ nebo $x^2 + y^2 - 2z = c$.

5. Char. křivky jsou $x^2 + y^2 = c$ nebo $\ldots$?

6. Char. křivky $x = x_0 + t$, $y = t$, $z = z_0/(1 - tz_0)$, pro $tz_0 < 1$. Odtud $u(x, y) = \frac{g(x-y)}{1-yg(x-y)}$, pro $yg(x - y) < 1$.