poslední úprava 15. ledna 2025

I. Laplaceova rovnice.

Značení a terminologie. Laplaceův operátor (laplacián) $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, kde $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená.
• Laplaceova rovnice: $\Delta u = 0$
• Poissonova rovnice: $\Delta u = f$
• Helmholtzova rovnice: $\lambda u - \Delta u = 0$ (fakticky problém vlastních čísel Δ)
• Dirichletova úloha: $\Delta u = 0$ v Ω s danou okrajovou podmínkou $u = g$ na $\partial\Omega$.

Definice. Funkce u se nazve *harmonická* v Ω, jestliže $\Delta u(x) = 0$ pro $\forall x \in \Omega$.

Věta I.1. [Slabý princip maxima pro harmonické funkce.] Nechť $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, kde Ω je omezená množina. Nechť $\Delta u \geq 0$ v Ω. Potom u nabývá maxima na hranici. Podrobněji řečeno: $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

Poznámky.
• ekvivalentně řečeno: $u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u$, pro $\forall x \in \Omega$
• zrcadlová verze: $\ldots \Delta u \leq 0$ v $\Omega \implies$ minimum se nabývá na hranici

Důsledek. Jednoznačnost (klasického) řešení úlohy $\Delta u = f$ v Ω, $u = g$ na $\partial\Omega$, pro omezenou Ω.

Značení. Je-li $f \in L^1(M)$ a $0 < \lambda(M) < \infty$, definujeme průměrový integrál jako $⨍_M f\, d\lambda = \frac{1}{\lambda(M)} \int_M f\, d\lambda$. Nás budou zajímat především průměrové integrály přes koule a sféry, tj.

$$
\begin{aligned}
⨍_{B(x_0,r)} f\, dx &= \frac{1}{\lambda(B(x_0,r))} \int_{B(x_0,r)} f\, dx \\
⨍_{S(x_0,r)} f\, d\sigma &= \frac{1}{\sigma(S(x_0,r))} \int_{S(x_0,r)} f\, d\sigma
\end{aligned}
$$

kde

$$
\begin{aligned}
B(x_0,r) &= \{x \in \mathbb{R}^d;\ |x - x_0| < r\} \\
S(x_0,r) &= \partial B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^d;\ |x - x_0| = r\}
\end{aligned}
$$

je koule resp. sféra v $\mathbb{R}^d$ a λ resp. σ příslušná objemová (Lebesgueova) resp. plošná míra. Připomeňme, že $\lambda(B(x_0,r)) = \alpha_d r^d$, $\sigma(S(x_0,r)) = \beta_d r^{d-1}$, kde α_d resp. β_d je objem resp. povrch jednotkové koule (resp. sféry) v $\mathbb{R}^d$. Platí: $\beta_d = d\alpha_d$, $\alpha_d = \pi^{d/2}/\Gamma(1 + d/2)$.

Lemma I.1. [O sférických průměrech.] Nechť $u \in C^1(\Omega)$, nechť $B(x_0, r) \subset \Omega$ je pevná koule. Označme

$$\phi(t) = \fint_{S(x_0,r)} u \, d\sigma, \qquad t \in (0, r).$$

Potom platí:

1. $\phi'(t) = \fint_{S(x_0,t)} \nabla u \cdot n \, d\sigma$, kde n je vnější normála k příslušné sféře;
2. $\lim_{t \to 0+} \phi(t) = u(x_0)$.

Věta I.2. [Vlastnost průměru harmonické funkce.] Nechť u je harmonická v Ω. Potom pro každou kouli $B(x_0, r) \subset \Omega$ platí

$$u(x_0) = \fint_{S(x_0,r)} u \, d\sigma = \fint_{B(x_0,r)} u \, dx$$

Poznámka. Platí i opačná implikace: $u \in C^2(\Omega)$ splňuje $u(x_0) = \fint_{S(x_0,r)} u \, d\sigma$ pro každou sféru $S(x_0, r) \subset \Omega$, pak už nutně $\Delta u = 0$ všude v Ω.

Věta I.3. [Silný princip maxima pro harmonické funkce.] Nechť u je harmonická v Ω, kde Ω je souvislá. Nechť u nabývá v Ω svého maxima. Potom u je konstantní.

Věta I.4. [1] [Harnackova nerovnost.] Nechť u je harmonická, nezáporná v Ω, kde Ω je souvislá. Potom pro každou $\Omega' \subset\subset \Omega$ existuje C tak, že

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u$$

Věta I.5. [Liouvilleova věta.] Nechť u je harmonická, omezená v $\mathbb{R}^d$. Potom u je konstantní.

Poznámka. Z Gaussovy věty (pro $F = v\nabla u$) dostaneme snadno tzv. Greenovy identity

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u + v\Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma \tag{G1}$$

$$\int_\Omega v\Delta u - u\Delta v \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma \tag{G2}$$

Odsud snadno plyne nezápornost vlastních čísel operátoru $-\Delta$, s vhodnou okrajovou podmínkou (Dirichlet/Neumann).

[1] Důkaz jen pro Ω' malá koule.

Poznámky. Nyní se dočasně omezíme na situaci $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Dvojici funkcí $(x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y))$ jdoucí z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ budeme přirozeně ztotožňovat s funkcí $z \mapsto f(z)$ jdoucí z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$, kde $z = x + iy$ a $f = f_1 + if_2$. Taktéž $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ budeme ztotožňovat s $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Funkce $f(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ se nazve konformní v Ω, jestliže

1. f je vzájemně jednoznačná (tj. prostá a „na“)
2. f je holomorfní v Ω
3. $f'(z) \neq 0$ všude v Ω

Poznámky. Z poznatků komplexní analýzy plyne mimo jiné:
1 je-li f konformní v Ω, je také f_{-1} konformní v $f(\Omega)$
2 f (a potažmo f_1, f_2) jsou nekonečně diferencovatelné a platí tzv. Cauchy-Riemannovy podmínky

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

jakož i vztahy

$$f'(z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} - i\frac{\partial f_1}{\partial y}$$

3 funkce f_1, f_2 jsou harmonické v Ω (plyne snadno z C.R. podmínek a záměnnosti parciálních derivací)
4 funkce f (chápaná z $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$) je difeomorfismus a

$$Jf = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \|\nabla f_1\|^2 = \|\nabla f_2\|^2 = |f'(z)|^2$$

Věta I.6. Nechť Ω, $G \subset \mathbb{R}^2$ jsou oblasti. Nechť $f : \Omega \to G$ je konformní zobrazení a nechť pro funkce $u(x, y) : \Omega \to \mathbb{R}$, $v(\xi, \eta) : G \to \mathbb{R}$ platí, že $u = v \circ f$. Potom:

1. [2] Je-li $v \in C^1(G)$, je také $u \in C^1(\Omega)$ a označíme-li

$$-E_u = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad -E_v = \frac{\partial v}{\partial \xi} + i\frac{\partial v}{\partial \eta},$$

tak platí

$$E_u = \big(E_v \circ f\big)\overline{f'}.$$

[2] Tuto část věty jsme nedokazovali.

2. Je-li $v \in C^2(G)$, je také $u \in C^2(\Omega)$ a platí

$$\Delta u = \big(\Delta v \circ f\big)|Jf|\,.$$

3. Je-li $v \in L^1_{loc}(G)$ a $-\Delta v = \delta_a$ v $\mathcal{D}'(G)$, pak $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ a $-\Delta u = \delta_{f-1(a)}$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Poznámka. Části 2 a 3 předchozí věty platí i za předpokladu holomorfnosti $\overline{f(z)}$ místo $f(z)$.

Odvození. [Poissonovo jádro – poloprostor.] Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} \Delta u = 0 \qquad & \text{v } \Omega = \mathbb{R}^d \times (0,\infty) \\ u = h \qquad & \text{v } \Omega = \mathbb{R}^d \times \{0\} \end{aligned}$$

Fourierovou metodou lze odvodit $\widehat{u}(\xi, y) = \exp(-2\pi|\xi|y)\widehat{h}(\xi)$, tj.

$$u(x,y) = [P(\cdot, y) * h](x) = \int_{\mathbb{R}^d} P(x-s,y)h(s)\,ds$$

kde $P = P(x,y)$ je tzv. Poissonovo jádro, určené podmínkou $\widehat{P}(\xi, y) = \exp(-2\pi|\xi|y)$. Fourierovou inverzí dostaneme

$$P(x,y) = \frac{2y}{\beta_{d+1}(|x|^2+y^2)^{\frac{d+1}{2}}}$$

speciálně pro $d = 1$ (tj. polorovinu) $P(x,y) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$.

Opakování. Funkce

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln|x|, & d = 2 \\ \frac{1}{\beta_d(d-2)}|x|^{2-d}, & d \geq 3 \end{cases}$$

je fundamentálním řešením Laplaceovy rovnice; přesněji řečeno $-\Delta\Phi = \delta_0$ v $\mathbb{R}^d$ ve smyslu distribucí. Další vlastnosti:
1 $\Phi(x)$ a $\nabla\Phi(x) = \frac{-x}{\beta_d|x|^d}$ jsou L^1_{loc} v $\mathbb{R}^d$
2 $\Phi(x)$ je nekonečně hladká, radiální a harmonická pro $x \neq 0$
3 naopak: $\Psi(x)$ někonečně hladká, radiální a harmonická mimo počátek $\Longrightarrow$ $\Psi(x) = a\Phi(x) + b$ pro vhodné konstanty

Věta I.7. [O třech potenciálech.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je rozumná oblast, nechť $u(x)$ je C^2 na nějakém okolí $\overline{\Omega}$. Potom pro každé $x \in \Omega$ platí

$$u(x) = \int_\Omega -\Delta u(y)\Phi(y-x)\,dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(y)\Phi(y-x) - u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial n}(y-x)\,d\sigma(y)$$

kde Φ je fundamentální řešení Laplaceovy rovnice, definované výše.

Věta I.8. [O Greenově funkci.] Nechť $u(x)$ je řešení úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{v } \Omega \\ u &= h \qquad \text{na } \partial\Omega \end{aligned} \tag{LP}$$

které je C^2 na nějakém okolí $\overline{\Omega}$, kde Ω je rozumná oblast. Nechť pro každé $x \in \Omega$ pevné existuje „korektor" $\phi^x = \phi^x(y)$, tj. řešení úlohy

$$\begin{aligned} \Delta\phi^x(y) &= 0, \qquad y \in \Omega \\ \phi^x(y) &= \Phi(y-x), \qquad y \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{KO}$$

které je C^2 na nějakém okolí $\overline{\Omega}$, kde Φ je fundamentální řešení Laplaceovy rovnice. Potom lze psát

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_\Omega f(y)G(x,y)\,dy - \int_{\partial\Omega} h(y)\frac{\partial G}{\partial n}(x,y)\,d\sigma(y) \qquad \forall x \in \Omega \\ \text{kde} \quad & G(x,y) = \Phi(y-x) - \phi^x(y) \end{aligned}$$

je takzvaná Greenova funkce úlohy (LP).

Poznámka. Normálové derivace v předchozích větách chápeme vždy podle proměnné y, tj. jako $\nabla_y \cdot n(y)$.

Odvození. [Greenova funkce – poloprostor.] Máme $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d;\ x_d > 0\}$, tj. $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d;\ x_d = 0\}$. Vnější normála $n = (0,\dots,0,-1)$.
Korektor: $\phi^x(y) = \Phi(y-\tilde{x})$, kde $\tilde{x} = (x_1,\dots,x_{d-1},-x_d)$. Po úpravě máme $-\frac{\partial G}{\partial n}(x,y) = \frac{2x_d}{\beta_d|y-x|^d}$, pokud $y \in \partial\Omega$, což je ve shodě s tvarem Poissonova jádra, odvozeného výše.

Odvození. [Greenova funkce – koule.] Máme $\Omega = B(0,1)$, tj. $\partial\Omega = S(0,1)$. Korektor bereme jako $\phi^x(y) = \Phi(|x|(y-\tilde{x}))$, kde $\tilde{x} = x/|x|^2$ je tzv. sférická inverze. Po úpravě máme $-\frac{\partial G}{\partial n}(x,y) = \frac{1-|x|^2}{\beta_d|x-y|^d}$, $y \in S(0,1)$, což je tzv. Poissonovo jádro pro kouli.
Pro obecný poloměr $r > 0$ máme $P(x,y) = \frac{r^2-|x|^2}{\beta_d r|x-y|^d}$, $y \in S(0,r)$.

II. Rovnice vedení tepla.

Rovnicí vedení tepla (RVT) rozumíme

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f(x,t) \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,T] \\ u(x,0) &= u_0(x) \qquad x \in \Omega \\ u(x,t) &= g(x,t) \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T] \end{aligned}$$

kde $u_0(x)$ je počáteční podmínka, $g(x,t)$ je Dirichletova okrajová podmínka. Také budeme uvažovat Neumannovu okrajovou podmínku

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = h(x,t) \qquad x \in \overline{\Omega}$$

Případ $\Omega = \mathbb{R}^d$ (takto bez okrajové podmínky) se nazývá Cauchyho úloha.

Značení. Definujeme parabolický válec $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$ a parabolickou hranici $\Gamma_T = \overline{\Omega} \times 0 \cup \partial\Omega \times (0,T]$. Platí $\Gamma_T = \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T$.
Řešení budeme uvažovat klasické, tj. $u \in C(\overline{\Omega_T}) \cap C^1_t(\Omega_T) \cap C^2_x(\Omega_T)$, dle potřeby i lepší.

Věta II.1 [Princip maxima pro RVT.] Nechť Ω je omezená, nechť u je klasické řešení $\partial_t u - \Delta u \le 0$. Potom $\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u$.

Věta II.2 [Princip maxima pro RVT - Cauchyho úloha.] Nechť u je klasické řešení $\partial_t u - \Delta u \le 0$ v $\mathbb{R}^d \times (0,T]$, nechť u je shora omezené. Potom $\sup_{\mathbb{R}^d \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^d \times \{0\}} u$.

Poznámka. Předpoklad omezenosti shora nelze vynechat; lze jej ale oslabit např. na odhad typu $u(x,t) \le c \exp(a|x|^2)$.
Platí zrcadlové verze uvedených vět (tj. předpoklad $\partial_t u - \Delta u \ge 0$, závěry pro minima resp. infima).

Důsledky. RVT má nejvýše jedno klasické řešení v následujících případech:

- Ω omezená s Dirichletovou okrajovou podmínkou
- Cauchyho úloha s požadavkem omezenosti řešení

Věta II.3. [Energetická rovnost pro (RVT).] Nechť u je klasické řešení (RVT) v Ω_T s nulovou pravou stranou a nulovou okrajovou (Dirichletovou nebo Neumannovou) podmínkou. Nechť Ω je omezená množina. Potom pro každé $\tau \in [0,T]$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,\tau)dx + \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla u|^2(x,t)dxdt = \frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2(x)dx.$$

Poznámka. Fakticky věta vyžaduje, aby Ω byla „rozumná", navíc u je hladké až do hranice (abychom mohli užít Gaussovu větu). Platí i pro Ω neomezenou, předpokládáme-li konvergenci uvedených integrálů.

Důsledek. Jednoznačnost řešení (RVT) za uvedených podmínek.

Lemma II.1. [Log-konvexita energie pro (RVT).] Nechť Ω je omezená; nechť u je klasické řešení (RVT) v Ω_T s nulovou pravou stranou a okrajovou

(Dirichletovou nebo Neumannovou) podmínkou. Nechť $e(t) = \int_\Omega u^2(x,t)\,dx$ je kladná na nějakém $I \subset [0,T]$. Potom $\ell(t) = \log e(t)$ je na I konvexní.

Důsledek. Zpětná jednoznačnost pro (RVT): je-li (za uvedených podmínek) $e(T) = 0$, je už nutně $e(t) = 0$ pro všechna $t \in [0,T)$.

Definice. Fundamentální řešení (RVT) nebo též tepelné jádro je definováno jako

$$G(x,t) = (4\pi t)^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) Y(t)$$

kde $Y(t)$ je Heavisideova funkce.

Lemma II.2 [O fundamentálním řešení jisté ODR.] Nechť y je řešení rovnice

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots a_n y = 0, \tag{O}$$

s počáteční podmínkou

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = 0, \qquad y^{(n-1)}(0) = 1.$$

Potom funkce

$$x(t) := y(t)Y(t)$$

je fundamentální řešení rovnice (O).

Příklady. ① $u(t) = \exp(-at)Y(t)$ je f.ř. rovnice $x' + ax = 0$.
② $u(t) = Y(t)\sin(bt)/b$ je f.ř. rovnice $x'' + b^2 x = 0$.

Věta II.4 [Vlastnosti tepelného jádra.] Funkce $G(x,t)$ definovaná výše má následující vlastnosti:

1. $G(x,t) = 0$ pro $t < 0$, $G(x,t) > 0$ a $\int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)\,dx = 1$ pro $t > 0$
2. pro $t > 0$ je $G(x,t)$ nekonečně hladká a splňuje zde (RVT)
3. $\partial_t G - \Delta G = \delta_{(0,0)}(x,t)$ ve smyslu distribucí v $\mathbb{R}^{d+1}$
4. $G(x,t) \to \delta_0(x)$ pro $t \to 0+$ ve smyslu distribucí v $\mathbb{R}^d$

Věta II.5 [Řešení Cauchyho úlohy pro (RVT).] Nechť $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^d)$, $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d \times [0,T])$. Potom

1. Funkce $u(x,t) = G(\cdot,t) * u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t)u_0(y)\,dy$ je klasické řešení (RVT) v $\mathbb{R}^d \times [0,T]$ s počáteční podmínkou $u_0(x)$ a nulovou pravou stranou.

2. Funkce $u(x,t) = G * f(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t-s) f(y,s)\, dyds$ je klasické řešení (RVT) v $\mathbb{R}^d \times [0,T]$ s nulovou počáteční podmínkou a pravou stranou $f(x,t)$.

Poznámky. Další vlastnosti RVT:

- škálování: je-li $\lambda \neq 0$, pak funkce $u(x,t)$ řeší RVT $\iff$ funkce $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ řeší RVT
- vlastnost průměru: pro $r > 0$ definujme „tepelnou kouli"

$$E(0,0;r) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1};\ G(x,t) > r^{-d}\}$$

  Potom
$$u(x,t) = \frac{1}{4r^d} \int_{E(0,0;r)} u(x-y,t-s) \frac{|y|^2}{s^2}\, dyds$$
  kdykoliv $(x,t) + E(0,0;r) \subset \Omega_T$. Důsledek: silný princip maxima pro RVT.

- Harnackova nerovnost

III. Vlnová rovnice.

Vlnovou rovnicí (VR) rozumíme

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u - \Delta u &= f(x,t) \qquad && (x,t) \in \Omega \times (0,T] \\ u(x,0) &= u_0(x) && x \in \Omega \\ \partial_t(x,0) &= u_1(x) && x \in \Omega \\ u(x,t) &= g(x,t) && (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T] \end{aligned}$$

kde $u_0(x)$ je počáteční podmínka, $g(x,t)$ je Dirichletova okrajová podmínka. Také budeme uvažovat Neumannovu okrajovou podmínku

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = h(x,t) \qquad x \in \overline{\Omega}$$

Případ $\Omega = \mathbb{R}^d$ (tedy bez okrajové podmínky) se nazývá Cauchyho úloha.

Věta III.1. [Energetická rovnost pro (VR).] Nechť Ω je omezená; nechť u je klasické řešení (VR), kde $f = 0$ a $g = 0$ respektive $h = 0$. Potom pro každé $\tau \in (0,T]$

$$\int_\Omega \Big\{ (\partial_t u)^2(x,\tau) + |\nabla u|^2(x,\tau) \Big\} dx = \int_\Omega \Big\{ u_1^2(x) + |\nabla u_0|^2(x) \Big\} dx.$$

Poznámka. Věta navíc vyžaduje, aby Ω byla „rozumná" v tom smyslu, že pro ni platí Gaussova věta. Věta platí i pro Ω neomezenou, je ale třeba navíc předpokládat konečnost uvedených integrálů.

Důsledek. Jednoznačnost (dopředná i zpětná) klasického řešení VR.

Věta III.2. [Princip šíření vlny.] Nechť u je klasické řešení (VR); nechť $B(x_0, R) \subset \Omega$ a nechť $f = 0$ na $P(x_0, R)$, kde značíme

$$P(x_0, R) = \big\{(x, t);\ |x - x_0| < R - t\big\}.$$

Potom pro každé $\tau \in (0, R]$

$$\int\limits_{B(x_0,R-\tau)} \Big\{(\partial_t u)^2(x, \tau) + |\nabla u|^2(x, \tau)\Big\}dx \leq \int\limits_{B(x_0,R)} \Big\{u_1^2(x) + |\nabla u_0|^2(x)\Big\}dx.$$

Důsledek. Nechť u, $\tilde{u}$ jsou klasická řešení (VR). Jestliže jejich počáteční podmínky se shodují v $B(x_0, R) \subset \Omega$ a pravé strany se shodují v $P(x_0, R)$, pak u, $\tilde{u}$ se shodují v $\overline{P(x_0, R)}$.

Důsledek. Cauchyova úloha pro (VR) má nejvýše jedno klasické řešení.

Výpočet. [d'Alembert.] V případě Cauchyho úlohy na přímce lze (obecné) řešení (RV) psát jako $u(x, t) = F(x + t) + G(x - t)$, kde F, G, jsou vhodné funkce.

Poznámka. Srovnání vlastností (RVT) a (VR):

- (RVT): řešení je pro $t > 0$ nekonečně hladké, signál se šíří nekonečnou rychlostí, v rovnici nelze obecně obrátit čas
- (VR): řešení má stejnou hladkost jako počáteční podmínka, signál se šíří konečnou rychlostí, obrácení času vede na tutéž rovnici

Věta III.3. [Fundamentální řešení (VR).] Fundamentálním řešením (VR) s rychlostí šíření vlny $c > 0$ jsou distribuce

$$H(x, t) = \frac{1}{2c} Y(ct - |x|)Y(t), \qquad d = 1,$$

$$H(x, t) = \frac{Y(ct - |x|)Y(t)}{2\pi c\sqrt{c^2t^2 - |x|^2}}, \qquad d = 2,$$

$$H(x, t) = \frac{\nu_{ct}(x)}{4\pi c^2 t} Y(t), \qquad d = 3,$$

kde Y je Heavisideova funkce a ν_r je plošná míra na sféře o poloměru r, tj. distribuce v $\mathbb{R}^3$, definovaná vztahem

$$\langle \nu_r, \varphi \rangle = \int_{|x|=r} \varphi(x)\, d\sigma(x)$$

Poznámky k výpočtům. V předchozí větě se odvozuje, že Fourierova transformace fundamentálního řešení splňuje (nezávisle na dimenzi):

$$\widehat{H}(\xi, t) = \frac{\sin(2\pi|\xi|ct)}{2\pi|\xi|c}$$

K výpočtu příslušné inverze se užijí vzorce:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathrm{rect}}(\xi) &= \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\,, \qquad d = 1 \\ \widehat{\nu_r}(\xi) &= \frac{2r}{|\xi|}\sin(2\pi|\xi|r)\,, \qquad d = 3 \end{aligned}$$

kde rect je čtvercová funkce (=charakteristická funkce intervalu $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$) a ν_r je výše zmíněná sférická míra. Případ $d = 2$ lze získat z $d = 3$ tzv. metodou sestupu.

Věta III.4. [Řešení Cauchyho úlohy pro (VR).] Nechť $u_0(x)$, $u_1(x)$ a $f(x,t)$ jsou třídy C^2. Potom existuje klasické řešení (VR) s rychlostí šíření vlny $c > 0$ a lze je vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} u(x,t) &= H(\cdot,t) * u_1(x) + \partial_t H(\cdot,t) * u_0(x) + H * f(x,t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^d} H(x-y,t)u_0(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^d} H(x-y,t)u_1(y)\,dy \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} H(x-y,t-s)f(y,s)\,dyds \end{aligned}$$

Komentář. Konkrétní rozvedení výše uvedené formule:

$d = 1$

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{2}\big(u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y)\,dy \\ + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)\,dyds \end{aligned}$$

$d = 2$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{|x-y|<ct}\frac{u_0(y)\,dy}{\sqrt{c^2t^2-|x-y|^2}}\right) + \frac{1}{2\pi c}\int_{|x-y|<ct}\frac{u_1(y)\,dy}{\sqrt{c^2t^2-|x-y|^2}} + \frac{1}{2\pi c}\int_0^t\int_{|x-y|<c(t-s)}\frac{f(y,s)\,dyds}{\sqrt{c^2(t-s)^2-|x-y|^2}}$$

$d = 3$

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int_{|x-y|=ct}u_0(y)\,dy\right) + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|x-y|=ct}u_1(y)\,dy + \frac{1}{4\pi c^2}\int_0^t\frac{1}{t-s}\int_{|x-y|=c(t-s)}f(y,s)\,dyds$$

IV. Rovnice prvního řádu. [3]

Definice. Kvazilineární rovnicí prvního řádu rozumíme

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = f(x,u) \tag{1}$$

pro neznámou funkci $u = u(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Předpokládáme $a_j(x,u)$, $f(x,u)$ spojité a $\sum_j |a_j(x,u)| > 0$ pro $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}$.

Terminologie.
• homogenní rovnice, pokud $f(x,u) = 0$
• lineární rovnice, pokud $a_j = a_j(x)$, $f = f(x)$, tj. nezávisí na u
• obecná rovnice prvního řádu: $F(x,u,\nabla u) = 0$ – nebudeme uvažovat

Poznámky. Řešením (klasickým) rovnice (1) v Ω rozumíme funkci $u(x)$: $\Omega \to \mathbb{R}$ třídy C^1, splňující $\sum_{j=1}^n a_j(x,u(x))\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = f(x,u(x))$ pro každé $x \in \Omega$. Geometrická interpretace: vektor $(a_1(x,u),\dots,a_n(x,u),f(x,u))$ je tečný ke grafu u

Definice. Charakteristickou křivkou (charakteristikou) rovnice (1) rozumíme řešení $(x(t),z(t))$ soustavy

$$\begin{aligned} x_j' &= a_j(x,z) \qquad j = 1,\dots,n \\ z' &= f(x,z) \end{aligned} \tag{2}$$

[3] Tato kapitola nebude požadována u zkoušky.

Postačí nám lokální řešení, pro $t \in (-\delta, \delta)$, s počátečními podmínkami $x(0) = x_0 \in \Omega$, $z(0) = z_0 \in \mathbb{R}$. (Jeho existence je zaručena z Peanovy věty.)

Lemma IV.1. Funkce $u(x) \in C^1(\Omega)$ je řešením rovnice (1) v Ω, právě když její graf je sjednocením charakteristických křivek.

Komentář. Posledně uvedená vlastnost znamená: libovolným bodem (x_0, z_0) grafu funkce u prochází charakteristika, která leží celá na grafu funkce u. Podrobněji řečeno: pokud $z_0 = u(x_0)$, kde $x_0 \in \Omega$, pak existuje $(x(t), z(t))$ řešení (2), definované v intervalu $(-\delta, \delta)$ takové, že $x(0) = x_0$ a $z(0) = z_0$, a toto řešení splňuje $z(t) = u(x(t))$ pro všechna $t \in (-\delta, \delta)$.

Definice. Počáteční podmínku k rovnici (1) zadáváme ve tvaru

$$u(x) = g(x), \qquad x \in \Gamma\,, \tag{3}$$

kde $\Gamma \subset \Omega$ je nadplocha (tj. hladká plocha dimenze $n-1$) a $g(x) : \Gamma \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce.
Řekneme, že podmínka (3) je necharakteristická v bodě (x_0, z_0) grafu g, jestliže

$$(a_1(x_0, z_0), \ldots, a_n(x_0, z_0)) \cdot n(x_0) \neq 0$$

kde $z_0 = g(x_0)$ a $n(x_0)$ je normálový vektor ke Γ v bodě x_0. Řečeno jinak: vektor $(a_1(x_0, z_0), \ldots, a_n(x_0, z_0))$ není tečný ke Γ.

Věta IV.1.[4] [Lokální existence řešení rovnice 1. řádu.] Je dána rovnice (1) s počáteční podmínkou (3). Nechť $x_0 \in \Omega$ a $z_0 = g(x_0)$ splňují:

1. funkce $a_j(x, u)$, $f(x, u)$ jsou třídy C^1 na jistém okolí
2. podmínka (3) je necharakteristická v bodě (x_0, z_0) bodu (x_0, z_0)

Potom existuje $u(x) \in C^1$ na jistém okolí bodu x_0, která je klasickým řešením (1), (3).

[4] Bez důkazu.