Lemma II.2 [O fundamentálním řešení jisté ODR.] Nechť y je řešení rovnice

$$\underbrace{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots a_n y}_{\mathcal{K}[y]} = 0, \tag{O}$$

s počáteční podmínkou

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = 0, \qquad y^{(n-1)}(0) = 1.$$

Potom funkce

$$x(t) := y(t)Y(t)$$

je fundamentální řešení rovnice (O).

Dk. užiji Lemma 25.3: $f(t)$ po částech C^1

τ_j … body nespojitosti

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} f(t)}_{\text{derivace v } \mathcal{D}'} = \underbrace{f'(t)}_{\text{bodová derivace}} + \sum_j \sigma_j \cdot \delta_{\tau_j}(t), \qquad \sigma_j = \underbrace{\{f(\tau_j+) - f(\tau_j-)\}}_{\text{skok v bodě } \tau_j}$$

vidíme: pro $t \neq 0$ je $x(t) \in C^\infty$ a platí zde:

$$x'(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ y'(t), & t>0 \end{cases} = y'(t)Y(t)$$

obecněji pak $x^{(k)}(t) = y^{(k)} Y(t)$ pro $t \neq 0, k \geq 1$

skok v $t=0$? $\quad x(0+) - x(0-) = y(0+) - 0 = y(0) = 0$

obecněji $x^{(k)}(0+) - x^{(k)}(0-) = y^{(k)}(0+) - 0 = y^{(k)}(0)$

kde $y^{(r)}(0) = \begin{cases} 0, & r = 0, \dots, n-2 \\ 1, & r = n-1 \end{cases}$

Lemma 25.3 $\Longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^{r} x(t) &= y^{(r)}(t)\, Y(t), \quad r = 0, \dots, n-1 \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} x(t) &= y^{(n)}(t)\, Y(t) + \delta_0(t) \end{aligned}}$$

a tedy: (v $\mathcal{D}'$)

$$\mathcal{K}[x(t)] = \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} x(t)}_{y^{(n)}(t)Y(t) + \delta_0(t)} + \sum_{j=1}^{n} a_j \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-j} x(t)}_{y^{(n-j)}(t)Y(t)}$$

$$= \delta_0(t) + \underbrace{\sum_{j=0}^{n} a_j\, y^{(n-j)}(t)\, Y(t)}_{\begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ \mathcal{K}[y(t)] = 0, & \text{pro } t > 0 \end{cases}} = \delta_0(t)$$

Věta II.4 [Vlastnosti tepelného jádra.] Funkce $G(x,t)$ definovaná výše má následující vlastnosti:

1. $G(x,t) = 0$ pro $t < 0$, $G(x,t) > 0$ a $\int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)\,dx = 1$ pro $t > 0$
2. pro $t > 0$ je $G(x,t)$ nekonečně hladká a splňuje zde (RVT)
3. $\partial_t G - \Delta G = \delta_{(0,0)}(x,t)$ ve smyslu distribucí v $\mathbb{R}^{d+1}$
4. $G(x,t) \to \delta_0(x)$ pro $t \to 0+$ ve smyslu distribucí v $\mathbb{R}^d$

Dk. ad 3: (vyřešíme formálně Fourierem)

TRIK: $\delta_{(0,0)}(x,t) = \delta_0(x)\cdot\delta_0(t)$

„dk": $\langle \delta_0(x)\,\delta_0(t), \varphi(x,t)\rangle = \int_{R^{d+1}} \varphi(x,t)\delta_0(x)\delta_0(t)\,dx\,dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\underbrace{\int_{R^d} \varphi(x,t)\,\delta_0(x)\,dx}_{\varphi(0,t)} \Big) \delta_0(t)\,dt = \varphi(0,0) = \langle \delta_{(0,0)}, \varphi \rangle$$

bez sevy přes:

$$\partial_t G(x,t) - \Delta G(x,t) = \delta_0(x)\cdot\delta_0(t) \quad \Big/ \ \mathcal{F}_{x\to\xi}$$

$$\partial_t \widehat{G}(\xi,t) + 4\pi^2|\xi|^2 \widehat{G}(\xi,t) = \delta_0(t) \quad (t \text{ pevné})$$

dle L. II. 2 .... $\widehat{G}(\xi,t) = \exp(-4\pi^2|\xi|^2 t)\,Y(t)$

aplikuji $\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}$ + vzorce: $e^{-\pi|\xi|^2} \longrightarrow e^{-\pi|x|^2}$

$$\hat{f}(c\xi) \longrightarrow c^{-d} f(c^{-1}x)$$

$$c = (4\pi t)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{G(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) Y(t)}$$

ad2: $G(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,t))$ ... zřejmé

$(\partial_t - \Delta) G = 0$ ..... d.cv. (přímý výpočet)

ad1: $\int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)\,dx = \hat{G}(0,t) = 1, \quad t > 0$

z definice F. tr.

ad4. i) pomocí F. tr.: zřejmě platí

$$\hat{G}(\xi, 0+) = \lim_{t \to 0+} \exp(-4\pi^2|\xi|t) = 1$$

a tedy : $G(x, 0+) = \mathcal{F}^{-1}(1) = \delta_0(x)$
(spojitost $\mathcal{F}^{-1}$)

ii) pomocí Lemmatu 24.3: $u(x) \in C_b(\mathbb{R}^d)$

$$g(x) \in L^1(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} g = 1$$

$$\Rightarrow \quad u * g_\varepsilon(x) \to u(x) \quad \text{pro } \varepsilon \to 0+$$

$x \in \mathbb{R}^d$ pevné

kde $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} g(\varepsilon^{-1} x)$

volme: $g(x) = e^{-\pi |x|^2}$ (gaussián), $\varepsilon = (4\pi t)^{1/2}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g_\varepsilon(x) = G(x,t)}$$

tedy dle L. 24.3.

$$u * g_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(y)\, G(x-y,t)\, dy \to u(x), \quad t \to 0$$

speciálně:

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(y) \underbrace{G(-y,t)}_{G(y,t)} dy \to u(0), \quad t \to \infty$$

... což je hledaný závěr, chápeme-li $u(y)$ jako testovací funkci ...

Věta II.5 [Řešení Cauchyho úlohy pro (RVT).] Nechť $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^d)$, $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d \times [0,T])$. Potom

1. Funkce $u(x,t) = G(\cdot,t) * u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t)u_0(y)\,dy$ je klasické řešení (RVT) v $\mathbb{R}^d \times [0,T]$ s počáteční podmínkou $u_0(x)$ a nulovou pravou stranou.
2. Funkce $u(x,t) = G * f(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t-s)f(y,s)\,dyds$ je klasické řešení (RVT) v $\mathbb{R}^d \times [0,T]$ s nulovou počáteční podmínkou a pravou stranou $f(x,t)$.

Dk. ad 1 (i) $t>0 \Rightarrow u \in C^\infty$ a splňuje (RVT)

hladkost: $D_t^\alpha D_x^\beta u(x,t) \overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} D_t^\alpha D_x^\beta G(x-y,t)\,u_0(y)\,dy$

ad $(*)$ … $\exists\, g(y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ … majoranta nezávislá na $|x|<R$, $\delta<t<\Delta$

($R, \Delta>\delta>0$ libovolné, pevné)

pozorují: $D_t^\alpha D_x^\beta G(x-y,t) = p(x,t^{-1/2}) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)$

polynom

a platí: $|p(x,t^{-1/2})| \leq C$ nebo $|x|<R$, $t^{-1/2} < \delta^{-1/2}$

$|x-y| \geq |y|-|x| \geq |y|-R$, $\frac{1}{4t} \geq \frac{1}{4\Delta}$

$\Rightarrow$ $|x-y|^2 \geq (|y|-R)^2$, pokud $|y| \geq R$

$\frac{1}{4t} > \frac{1}{4\Delta}$, neboť $t<\Delta$

konečně $|u_0(y)| \leq M$ (omezenost fce u_0)

CELKEM: $\left|D_t^\alpha D_x^\beta G(x-y,t)\,u_0(y)\right| \leq C M g(y)$

kde $$\boxed{g(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leq R \\ \exp\left(-\frac{(|y|-R)^2}{4\Delta}\right), & |y| \geq R \end{cases}}$$

Snadno se ověří, že $g(y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

vlastní rovnice:

$$(\partial_t - \Delta_x)\,u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{(\partial_t - \Delta_x)\,G(x-y,t)}_{\substack{\parallel \\ 0}}\,u_0(y)\,dy$$

(věta II.4)

(ii) počáteční podmínka: $u(x,t) \xrightarrow{?} u_0(\bar{x})$

pro $t \to 0+$, $x \to \bar{x}$

BÚNO: $\bar{x} = 0$, tj. cílem je:

$$\int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t)\,u_0(y)\,dy \to u_0(0)$$ pro $t \to 0+$, $x \to 0$.

ekvivalentně: $$\boxed{\int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t)\,u_0(y) - u_0(0) \xrightarrow{?} 0}$$

nechť $\varepsilon > 0$ je dáno:

TRIK: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t)\,u_0(y)\,dy - u_0(0)$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t)\left[u_0(y) - u_0(0)\right] dy =$$

(neboť $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} G(z,t)\,dz = 1$, $t > 0$ — jeme)
(věta II.4)

(TRIK) $\displaystyle = \int_{|y|<\delta} (\dots) + \int_{|y|>\delta} (\ ) = \boxed{I_1 + I_2}.$

kde $\delta > 0$ je t.ž. $\boxed{|y| < \delta \Rightarrow |u_0(y) - u_0(0)| < \varepsilon}$

(spojitost fce u_0)

$$|I_1| \leq \int_{|y|<\delta} G(x-y,t)\,\underbrace{|u_0(y) - u_0(0)|}_{<\varepsilon}\,dy$$

$$\leq \varepsilon \int_{|y|<\delta} G(x-y,t)\,dy \leq \varepsilon \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t)\,dy}_{=1}$$

$\Rightarrow |I_1| < \varepsilon$

Pro odhad I_2 BÚNO nechť $|x| < \frac{\delta}{2}$ (neboť $x \to 0$)

dále víme: $|u_0| \le M$ (omezenost)

$$\Rightarrow \quad |I_2| \le \int_{|y|>\delta} G(x-y,t)\, \underbrace{|u_0(y) - u_0(0)|}_{\le 2M}\, dy$$

$$\le 2M \int_{|y|>\delta} G(x-y,t)\, dy = 2M\, (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \underbrace{\int_{|y|>\delta} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dy}_{I_3}$$

zbývá: $I_3 \to 0$, pro $t \to 0+$ ($|x| < \frac{\delta}{2}$ pevné)

$$I_3 = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ z = x - y \\ |z| \ge |y| - |x| \ge \frac{\delta}{2} \end{array} \right| \le \int_{|z|>\frac{\delta}{2}} (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|z|^2}{4t}}$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ z = (4\pi t)^{1/2} u \\ dz = (4\pi t)^{\frac{d}{2}}\, du \\ |u| \ge c\, t^{-1/2} \end{array} \right| = \int_{|u| \ge c\,t^{-1/2}} e^{-\pi |u|^2}\, du \to 0$$

$$t^{-1/2} \to +\infty$$

(kde $c = \frac{\delta}{4\sqrt{\pi}}$)

ad 2. (i) $u \in C^\infty$ pro $t>0$ ... analogicky jako ad (1i)

(ii) nulové počáteční podmínky:

$$|u(x,t)| \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t-s) \underbrace{|f(y,s)|}_{\leq M} \, dy\, ds$$

$$\leq M \int_0^t \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t-s)\, dy \right)}_{=1} ds = M t \quad \text{(věta II.4)}$$

$\Rightarrow$ $|u(x,t)| \to 0$ pro $t \to 0+$, x libovolné (i měnící se)

(iii) $(\partial_t - \Delta_x) u(x,t) = f(x,t)$ pro $\forall t>0$, $x \in \mathbb{R}^d$ pevné

přepíšeme:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t-s) f(y,s)\, dy\, ds \quad \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ y = x - \tilde{y} \\ s = t - \tilde{s} \\ dy = d\tilde{y},\ ds = d\tilde{s} \end{array} \right.$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(\tilde{y},\tilde{s}) f(x-\tilde{y}, t-\tilde{s})\, d\tilde{y}\, d\tilde{s}$$

... smažu vlnky:

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(y,s) f(x-y,t-s)\, dy\, ds$$

$$\Rightarrow \Delta_x u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(y,s)\, \Delta_x f(x-y,t-s)\, dy\, ds$$

$$\partial_t u(x,t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(y,s)\, f(x-y,t-s)\, dy\, ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} G(y,t) f(x-y,0)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(y,s)\, \partial_t f(x-y,t-s)\, dy\, ds$$

CELKEM:

$$(\partial_t - \Delta_x) u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(y,s) \left[(\partial_t - \Delta_x) f(x-y,t-s) \right] dy\, ds$$

$$+ \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} G(y,t) f(x-y,0)\, dy}_{= I_3}$$

(TRIK)

$$= \underbrace{\int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \cdots}_{I_1} + \underbrace{\int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^d}}_{I_2} + I_3 \quad , \ \varepsilon > 0 \text{ pevné, malé}$$

odhad: $$|I_1| \le \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} G(y,s) \underbrace{|(\partial_t - \Delta_x) f(x-y,t-s)|}_{\le M} dy\, ds$$

$$\le M \int_0^\varepsilon \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} G(y,s)\, dy}_{=1}\, ds = \varepsilon M \to 0 \quad (\varepsilon \to 0+)$$

$$I_2 = \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^d} G(y,s)\left[\underbrace{(\partial_t - \Delta_x)}_{= -\partial_s - \Delta_y} f(x-y,t-s)\right] dy\, ds$$

$$= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^d} G(y,s)\,(-\partial_s)\, f(x-y,t-s)\, dy\, ds$$

$$+ \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^d} G(y,s)\,(-\Delta_y)\, f(x-y,t-s)\, dy\, ds = P_1 + P_2$$

nyní per-partes:

$$P_1 = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\int_\varepsilon^t G(y,s)\,(-\partial_s)\, f(x-y,t-s)\, ds}\, dy$$

$$\Big[-G(y,s) f(x-y,t-s)\Big]_{s=\varepsilon}^{s=t} + \int_\varepsilon^t \partial_s G(y,s)\, f(x-y,t-s)\, ds$$

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} G(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)\, dy}_{I_4} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} G(y,t) f(x-y,0)\, dy}_{I_3 \text{ (viz výše!)}}$$

$$+ \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^d} \partial_s G(y,s)\, f(x-y,t-s)\, dy\, ds$$

dále: $P_2 = \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^d} G(y,s)\,(-\Delta_y) f(x-y,t-s)\,dy\,ds$

$$= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^d} (-\Delta_y)\, G(y,s)\, f(x-y,t-s)\,dy\,ds$$

zdůvodnění: Greenova formule: $u = f,\ v = G$

$\Omega = B(0,R),\ R \to +\infty$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{B(0,R)} G\cdot\Delta_y f\,dy = \int_{B(0,R)} \Delta_y G\cdot f\,dy}_{\downarrow} + \underbrace{\int_{\partial B(0,R)} G\frac{\partial f}{\partial n} + \frac{\partial G}{\partial n} f\,d\sigma}_{\to 0}$$

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^d} G\,\Delta_y f\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} \Delta_y G\, f\,dy}$$

neboť: $f, |\nabla f|$ ... omezené

$G, \nabla G \to 0$ (exponenciálně)

$\sigma(\partial B(0,R)) \sim R^{d-1}$ (polynom)

CELKEM:

$$(\partial_t - \Delta_x)u(x,t) = \underbrace{I_1}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0+} 0} + I_2 + \cancel{I_3},\ \text{přičemž}$$

$$\underbrace{P_1 + P_2}_{I_2} = I_4 - \cancel{I_3} + I_5$$

$$I_4 = \int_{\mathbb{R}^d} G(y,\varepsilon) f(x-y, t-\varepsilon)\, dy$$

$$I_5 = \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{(\partial_s - \Delta_y) G(y,s)}_{=0} f(x-y, t-s)\, dy\, ds = 0$$

zbývá tedy ukázat: $\boxed{I_4 \to f(x,t), \quad \varepsilon \to 0+}$

přepíšeme: $I_4 = \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,\varepsilon) f(y, t-\varepsilon)\, dy$

$\pm f(y,t)$

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,\varepsilon) f(y,t)\, dy}_{\substack{\downarrow\ \varepsilon\to 0+ \\ f(x,t)}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,\varepsilon) \underbrace{[f(y,t-\varepsilon) - f(y,t)]}_{|\ \ | \le C\cdot\varepsilon}\, dy}_{|\ \ | \le C\varepsilon \to 0}$$

(omezenost ∇f)

dle 1. části Věty

pro $u_0(y) = f(y,t)$

($t>0$ pevné)