

11. Sturmova rovnice vč. řeš

úloha: (11.1) $a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$

$$t \in I = (\alpha, \beta), \quad a_i(t) \text{ mají } \overline{\quad}, i=0,1,2 \\ a_0(t) \neq 0 \quad \forall I$$

Věta 9.3 $\Rightarrow t_0 \in I, \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$ dává:

$$\exists! \text{ (maximální) řešení } x(t) \in C^2 I \\ \text{ s poč. podm. } x(t_0) = \gamma_0 \\ x'(t_0) = \gamma_1$$

Problém: rozložením nulových bodů
(maximálního) řešení na (11.1)

Lemma 11.1 Buď $x(t)$ maximální řešení (11.1).

- (i) $x(t_0) = 0$, ale $x'(t_0) \neq 0$
- (ii) $x(t_0) = 0 = y(t_0)$, kde $y(t)$ je sč. řešení,
ale $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.j. $y(t) = \lambda x(t)$, pro $\forall t \in I$.
- (iii) množina $N(x) = \{t \in I, x(t) = 0\}$ nulových
bodů $x(t)$ nemá v I hromadný bod.

Důk.: (i) ?? $x(t_0) = x'(t_0) = 0 \dots$ leč $R(t) \equiv 0 \quad \forall I$

sč. řešení (11.1),

a sč. systém poč. podmínek

$\Rightarrow x(t) \equiv R(t) \equiv 0$, SPOR

(ii) polož $\tilde{y}(t) = \lambda x(t)$; kde $\lambda := \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$

vidíme: $\tilde{y}(t)$ řeší (11.1) ... lineárně ($\neq 0$ dle (i))

$$\tilde{y}(t_0) = 0 = y(t_0)$$

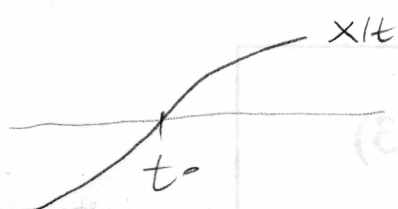
$$\tilde{y}'(t_0) = \lambda \cdot x'(t_0) = y'(t_0)$$

... stejné poč. podmín. $\Rightarrow \tilde{y}(t) \equiv y(t)$

(iii) ?? buď $t_0 \in I$ hromadný bod $N(t)$,
 $\exists P(t_0, \delta) \cap N(t) \neq \emptyset, \forall \delta > 0$
 $\Leftrightarrow \exists t_n \in N(t), t_n \rightarrow t_0$
 leč $t_n \neq t_0$ pro $\forall n$.

mají tot: $0 = x(t_n) \rightarrow x(t_0)$, tj. $x(t_0) = 0$.

dle (i): $x'(t_0) \neq 0$, a tedy $x(t) \neq 0$

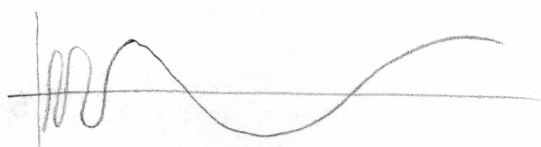
mezi tím $P(t_0, \delta) \dots$ SPOR,


Důs. $N(t) \cap K$ nejvýše konečné pro $K \subset I$ kompaktní
 ... mě smysl: sousední (nejbližší) nulový bod

Příkl. $N(t) \subset I = (\alpha, \beta)$... musí být nekonečné.
 s hromadnými body α, β

$$t^2 x'' + tx + x = 0, t \in (0, +\infty)$$

... Eulerove rovnice: $t^\lambda \rightarrow \lambda = \pm i$



$$x(t) = \cos(\ln t)$$

$$N(x) = \{ \exp((2+\frac{1}{2})\pi), 2 \in \mathbb{Z} \}$$

Lemma 11.2 Rovnici (11.1) lze vzájemně převést na (11.2) $(p(t)x')' + q(t)x = 0$, kde $p(t), p'(t), q(t)$ jsou spojité v I ,
 $p(t) \neq 0$.

Důk.: (11.2) dáno: $(p(t)x')' = p(t)x'' + p'(t)x'$,

již máme (11.1) pro $a_0 = p, a_1 = p', a_2 = q$

(11.1) dáno: BÚNO $a_0(t) \equiv 1$ (lze vydělit),

již máme $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$

substituce: $x(t) = u(t)y(t)$
 $\nwarrow$ vhodné (nemulová) fce

$$x' = uy' + u'y$$

$$x'' = uy'' + 2u'y' + u''y$$

dosazení: $uy'' + [2u' + pu]y' + [u'' + pu' + qu]y = 0$

chtíme $\equiv 0$ - položíme:

$$u(t) = \exp\left(-\int \frac{p(t)}{2} dt\right)$$

(řešení ze $u' = -\frac{1}{2}p(t)u$)

celkem dostaneme: $y'' + R(t)y = 0$,

$$\text{kde } R = \frac{u''}{u} + \frac{pu'}{u} + Q = -\frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}P' + Q$$

neboť: $u' = -\frac{1}{2} P u$

$$u'' = -\frac{1}{2} P' u - \frac{1}{2} P u' = -\frac{1}{2} P' u - \frac{1}{2} P \left(-\frac{1}{2} P u\right)$$

$$= -\frac{1}{2} P' u + \frac{1}{4} P^2 u$$

$$\Rightarrow R = -\frac{1}{2} P' + \frac{1}{4} P^2 + P \left(-\frac{1}{2} P\right) + Q$$

$$= -\frac{1}{2} P' - \frac{1}{4} P^2$$

důležitě: $u(t) \neq 0 \forall t \Rightarrow N(x) = N(y)$, y :
redukovat se nulové body.

Příklad. Besselova ne ředu ρ :

$$t^2 x'' + t x' + (t^2 - \rho^2) x = 0, \quad t \in (0, +\infty)$$

dělíme: $x'' + \underbrace{\frac{1}{t}}_{P(t)} x' + \underbrace{\left(1 - \frac{\rho^2}{t^2}\right)}_{Q(t)} x = 0$

polož $u(t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t}\right) = t^{-1/2}$

$y(t) = \frac{x(t)}{u(t)} = t^{1/2} x(t)$ - řešíme

$$y'' + R(t) y = 0, \text{ kde}$$

$$R = -\frac{1}{4} P^2 - \frac{1}{2} P' + Q$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t^2}\right) + \left(1 - \frac{\rho^2}{t^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1/4 - \rho^2}{t^2}$$

Věta 11.1 [Sturmova]. Nechť $x(t)$ je netriviální

řešení rce $(p(t)x')' + q_1(t)x = 0$, nechť $t_1 < t_2$

jsou sousední nulové body. Nechť $y(t)$ je (libovolné)

řešení rce $(p(t)x')' + q_2(t)y = 0$. Nechť zloží

$p(t) > 0$, $q_1(t), q_2(t)$ jsou spojité v $[t_1, t_2]$, a nechť

(klíčový předpoklad): $q_2(t) \geq q_1(t)$ pro $\forall t \in [t_1, t_2]$.

Pak nastane právě jeden z případů:

(i) $y(t)$ má v (t_1, t_2) nulový bod

(ii) $q_1(t) \equiv q_2(t)$ a $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ a.ř. $y(t) \equiv \lambda x(t)$ v $[t_1, t_2]$.

Speciálně: $y(t)$ má vždy nulový bod v $[t_1, t_2]$.

Pozn.: "fyzikální" interpretace: $p(t) \equiv m > 0$

konstantní (hmotnost)

limitním přiblížením

$q_1(t), q_2(t) \dots$

$$m x'' = -q_1(t)x$$

(suhot přiblížení)

$$m y'' = -q_2(t)y$$

rychlejší

zpětné síle

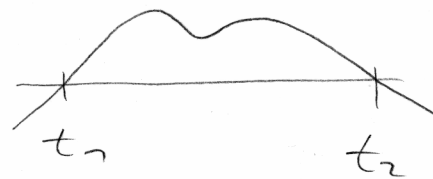
předpoklad: $q_2 \geq q_1$... 2. přiblížení je silnější

aspoň jako 1. přiblížení

zvěř: $y(t)$ limitně aspoň tak rychle

jako $x(t)$

D2.: BÚNO $x(t) > 0 \vee (t_1, t_2) \dots$
 (možná, $\neq 0$, lineárne)



$x(t_1) = 0 \dots$ L.N.1 $\Rightarrow x'(t_1) \neq 0$, tedy musí > 0
 podobně navíc: $x'(t_2) < 0$

Ukážeme: $i \Rightarrow ii$; tedy nechť $y(t) \neq 0 \vee (t_1, t_2)$
 pak BÚNO $y(t) > 0$ " "
 možná $\Rightarrow y(t_1) \geq 0$
 $y(t_2) \geq 0$.

TRIK: (1. rovnice) $\cdot y - (2. rovnice) \cdot x$

$$(p_1 x')' y - (p_2 y')' x = (q_2 - q_1) x y \int_{t_1}^{t_2} dt$$

LS: per-paras:

$$\left[p_1(t) x'(t) y(t) - p_2(t) y'(t) x(t) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} (p_1(t) x'(t) y'(t) - p_2(t) y'(t) x'(t)) dt \equiv 0$$

"0, neboť $x(t_1) = x(t_2) = 0$

tedy LS: $p_1(t_2) x'(t_2) y(t_2) - p_2(t_1) x'(t_1) y(t_1) \leq 0$

$> 0 < 0 \geq 0 > 0 \geq 0$

$$PS: \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{(q_2(t) - q_1(t))}_{\geq 0} \underbrace{x(t)y(t)}_{> 0} dt \geq 0.$$

musně tedy: $LS = PS = 0$, tedy dle:

$$y(t_2) = y(t_1) = 0$$

$$q_2(t) \equiv q_1(t) \text{ -- sejná rovnice}$$

$$\text{Lemma 11.1.} \Rightarrow y(t) = \lambda x(t), \quad x \in [t_1, t_2].$$

Věta 11.2 [oddělovací.] Necht' $\{u(t), v(t)\}$ je f.s. ře $(x(t)x')' + q(t)x = 0, t \in I$. Necht' $q(t) > 0$, $q(t)$ spojit. Označme $N(u)$ resp. $N(v)$ nulové body $u(t)$ resp. $v(t)$. Pak $N(u) \cap N(v) = \emptyset$ a mezi dvěma sousedními body $N(u)$ resp. $N(v)$ leží právě jeden bod $N(v)$ resp. $N(u)$.

Důk.: ?? $\exists t_0 \in N(u) \cap N(v) \dots$ viz L. 11.1

$$\Rightarrow v(t) = \lambda u(t), \text{ tj. } u, v \text{ jsou LZ -- SPOR}$$

buď $t_1 < t_2$ sousední body $N(u)$

viz V. 11.1. -- (ii) nemůže nastat, tedy

$$(x=u, y=v) \quad \exists t_0 \in N(v), t_0 \in (t_1, t_2)$$

právě jeden: ?? buď $t_0 < \tilde{t}_0 \in N(v) \cap (t_1, t_2)$

-- dle rovnice: $\exists t_3 \in (t_0, \tilde{t}_0) \cap N(u) \dots$ SPOR: $t_1 < t_2$ sousední