2. TERMÍN – 30.1.2020

---

1. [10b] Je dána rovnice

$$x' = |t - x^2|$$

Při řešení následujících úloh dávejte pozor na křivku $\{t = x^2\}$.

(i) Co lze říci o monotonii řešení?
(ii) Najděte (maximální) oblasti, kde platí $x'' > 0$ resp. $x'' < 0$, najděte též body inflexe řešení.
(iii) Načrtněte lokální průběhy několika typických řešení v rovině (x, t). Obrázek alespoň 10×10 cm!
(iv) Načrtněte speciálně průběhy řešení s počátečními podmínkami $x(1) = 0$ resp. $x(1) = 10$.
Mají tato řešení blow-up pro $t > 1$? Odpověď co nejpřesněji odůvodněte (aniž se pokusíte rovnici řešit).

---

2. [5b] Nechť $\phi = \phi(t, a, b)$ je řešicí funkce rovnice

$$x' = F(x^2 + b^2), \qquad x(0) = a$$

kde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je C^2 funkce.
(i) Napište rovnici pro $u = \frac{\partial \phi}{\partial a}$
(ii) Napište rovnici pro $v = \frac{\partial \phi}{\partial b}$.
(iii) Napište rovnici pro $z = \frac{\partial^2 \phi}{\partial a \partial b}$. Ověřte, že je stejná jako rovnice pro $\tilde{z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial b \partial a}$

---

3. [5b] Nechť reálná matice A splňuje $A^3 = -A^2$.
(i) Co lze říci o spektru A ?
(ii) Vypočítejte $\exp(tA)$, tj. vyjádřete pomocí elementárních skalárních funkcí, pouze s použitím definice maticové exponenciály.
(iii) Co lze říci o stabilitě resp. asymptotické stabilitě (nulového řešení) rovnice $x' = Ax$? Zformulujte přesný výrok či najděte (proti)příklad.
(iv) Užitím předchozího najděte řešení soustavy

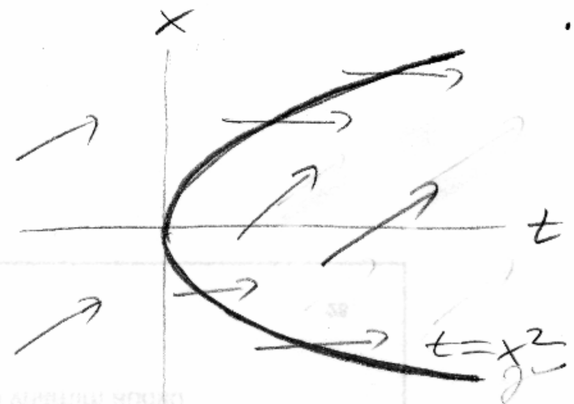
$$x' = 12x - 8y, \qquad x(1) = -1 \tag{1}$$
$$y' = 18x - 12y, \qquad y(1) = 0 \tag{2}$$

① $x' = |t - x^2| > 0$

… mimo $\gamma = \{t = x^2\}$

(protne max. 1x)

$\Rightarrow$ $x(t)$ rostoucí



konvexita? označ $\Omega_1 = \{t > x^2\}$ vnitřek γ

$\Omega_2 = \{t < x^2\}$ vnějšek γ

(i) ad Ω_1: $x' = |t - x^2| = t - x^2$

$x'' = 1 - 2x x' = 1 - 2x(t - x^2)$

$x'' = 1 + 2x^3 - 2xt$

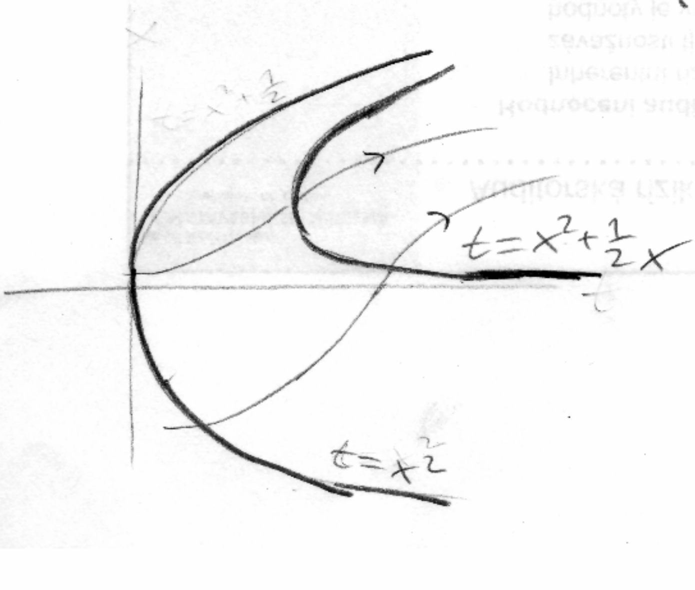
$x'' > 0 \Leftrightarrow 2xt < 1 + 2x^3$:

(α) $\boxed{x > 0}$ $\Leftrightarrow t < \dfrac{1+2x^3}{2x} = x^2 + \dfrac{1}{2x}$

(β) $\boxed{x < 0}$ $\Leftrightarrow t > x^2 + \dfrac{1}{2x}$ … vždy v Ω_1

CELKEM v Ω_1: konvexní pro $x^2 < t < x^2 + \dfrac{1}{2x}$

konkávní $t > x^2 + \dfrac{1}{2x}$



(ii) ad Ω_2: $x' = |t - x^2| = x^2 - t$

$$x'' = 2x^3 - 2xt - 1$$

$$x'' > 0 \iff 2xt < 2x^3 - 1$$

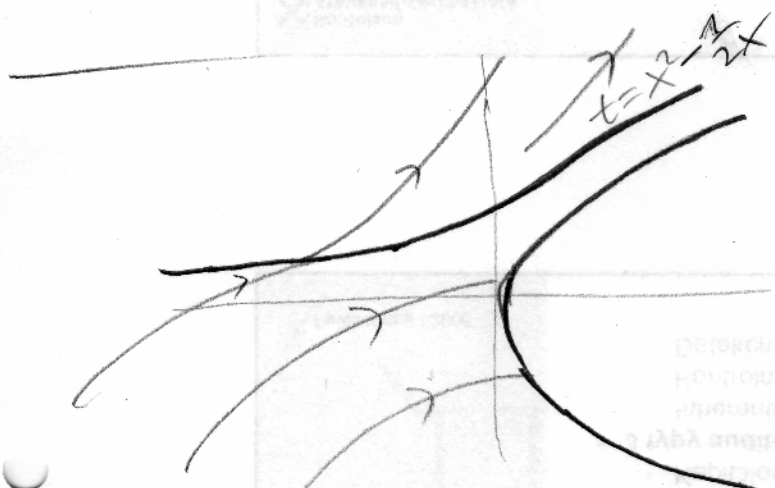
(α) $x > 0$ | $t < x^2 - \frac{1}{2x}$

(β) $x < 0$ | $t > x^2 - \frac{1}{2x}$ ... nikdy v Ω_2

CELKEM v Ω_2: konvexní pro $t < x^2 - \frac{1}{2x}$, $x > 0$

konkávní: $x < 0$ nebo

$x^2 - \frac{1}{2x} < t < x^2$, $x > 0$



Blow-up? $x(1) = 0$, $t > 1$: NE (řešení neopustí Ω_1)

$x(1) = 10$, $t > 1$: ANO,

neboť: $x(t)$ roste, konvexní

$\Rightarrow x(t) > t$, $\forall t > 1$

$$x' = x^2 - t > x^2 - x$$

leč: $y' = y^2 - y$ ... $\boxed{\text{Barrow}}$: $T_\infty - 1 = \int_{10}^{+\infty} \frac{dy}{y^2 - y} < +\infty.$

$y(1) = 10$

(2) $x' = F(x^2+b^2)$; $x(0) = a$

$$u = \frac{\partial x}{\partial a} \Rightarrow u' = \frac{\partial}{\partial a} x' = \frac{\partial}{\partial a} F(x^2+b^2)$$

$$u' = F'(x^2+b^2) \cdot 2xu \quad , u(0) = 1$$

$$v = \frac{\partial x}{\partial b} \Rightarrow v' = \frac{\partial}{\partial b} F(x^2+b^2)$$

$$= F'(x^2+b^2)(2xv+2b)$$

$$r = \frac{\partial u}{\partial b} \Rightarrow r' = \frac{\partial}{\partial b}\left\{F'(x^2+b^2)\,2xu\right\}$$

$$r' = F''(x^2+b^2)\cdot(2xv+2b)\cdot 2xu$$

$$+ F'(x^2+b^2)\cdot(2vu+2xr).$$

$$\tilde{r} = \frac{\partial v}{\partial a} \Rightarrow \tilde{r}' = \frac{\partial}{\partial a}\left\{F'(x^2+b^2)\cdot(2xv+2b)\right\}$$

$$\tilde{r}' = F''(x^2+b^2)\cdot 2xu\cdot(2xv+2b)$$

$$+ F'(x^2+b^2)\cdot(2uv+2x\tilde{r})$$

(3) (i) $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \exists v \neq 0$ t.ž. $Av = \lambda v$

$$\Rightarrow A^3 v = \underline{\lambda^3 v} = -A^2 v = \underline{-\lambda^2 v}$$

$$(\lambda^3+\lambda^2)v = 0 \quad . \quad \lambda^2(\lambda+1) = 0$$

tj. $\sigma(A) \subset \{0,-1\}$

(ii)

$$A^3 = -A^2$$
$$A^4 = -A^3 = A^2$$
$$A^5 = A^3 = -A^2 \ \dots$$

$$\Rightarrow e^{tA} = I + tA + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k A^2}_{}$$

$$= e^{-t} - (1-t)$$

$$e^{tA} = I + tA + \left[e^{-t} - (1-t)\right] A^2.$$

(iii) může (leč nemusí) být cokoliv, neboť $A^3 = -A^2$ splní matice:

- $A = -I$ (asympt. stabilita)
- $A = O$ (stabilita, neasympt.)
- $A \neq O$, t.ž. $A^2 = O$ (nestabilita)

(iv) $A = \begin{pmatrix} 12, & -8 \\ 18, & -12 \end{pmatrix}$ splní $A^2 = O$, tedy

$$e^{tA} = I + tA = \begin{pmatrix} 1+12t, & -8t \\ 18t, & 1-12t \end{pmatrix}$$

$$X(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X(t) = e^{(t-1)A} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11-12t \\ 18-18t \end{pmatrix}$$