1. příklad.
Uvažujte systém dravec-kořist (se zpětnou vazbou růstu kořisti)

$$\begin{aligned} x' &= x(1-x) - xy \\ y' &= -2y + xy \end{aligned}$$

(a) ukažte, že řešení nemohou opustit první kvadrant
(b) najděte stacionární body a načrtněte průběh řešení v prvním kvadrantu (na základě elementárních úvah)
(c) co se děje s řešeními pro $t \to \pm\infty$?

2. příklad.
Ukažte, že pro velká μ má soustava

$$\begin{aligned} x' &= \sin x + \cos x - \exp \mu y \\ y' &= -\sin 2y + \frac{x}{1+y^2} \end{aligned}$$

v počátku stabilní ekvilibrium. Pro která μ bude počátek nestabilní?

3. příklad.
(a) spočítejte e^{tA}, víte-li, že $A^2 = -I$.
(b) pomocí předchozího bodu najděte řešení soustavy $u' = Au$, je-li

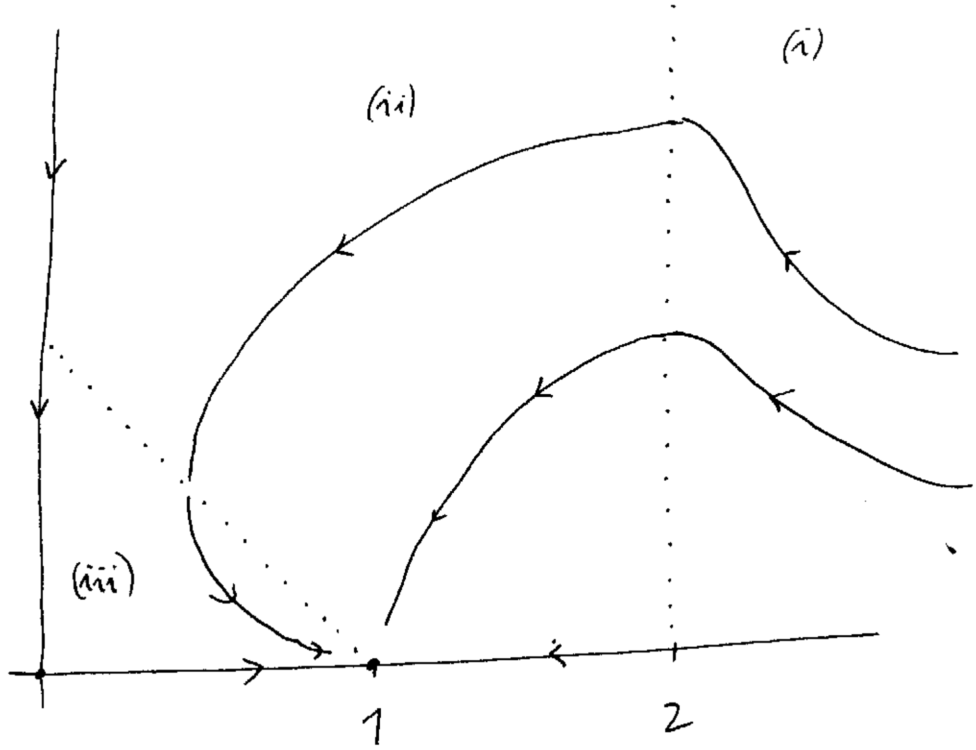
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1

$x' = x(1-x-y)$

$y' = y\,\cancel{(2-x)}$
$(x-2)$

nutné: obrázek.



$x>2:\ y'>0$

$x<2:\ y'<0$

$x+y>1:\ x'<0$

$x+y<1:\ x'>0$

stac. body: $(0,0)$ a $(1,0)$.

$(2,-1) \notin Q_1$

---

sektor (i): x .. klesá
y .. roste

sektor (ii): x klesá
y .. klesá

sektor (iii): x .. roste
y .. klesá.

Pro $t \to \infty$: řešení vstoupí do (ii) a případně do (iii), které neopustí; $x(t), y(t)$ .. monotónní, omezené;

odtud: $x(t) \to a$, $y(t) \to b$ pro $t \to \infty$;

nutně (a,b) je stacionární bod;

tj. $(a,b) = (1,0)$

Závěr: $\lim_{t\to\infty} (x(t), y(t)) = (1,0)$.

Pro $t \to -\infty$: řešení vstoupí do (iii);

zde $x(t) \to \infty$

$y(t)$ -- rostoucí; omezené

$\Rightarrow y(t) \to a \in \mathbb{R}$

2. rce: $y' = y(2-x) \to a \cdot \infty$.

$a \neq 0$ -- to je spor.

Závěr: $y(t) \to 0$, $x(t) \to \infty$ pro $t \to -\infty$.

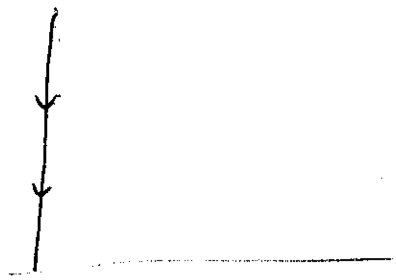
Řešení neopustí 1. kvadrant:

osy kvadrantu jsou řešeními;

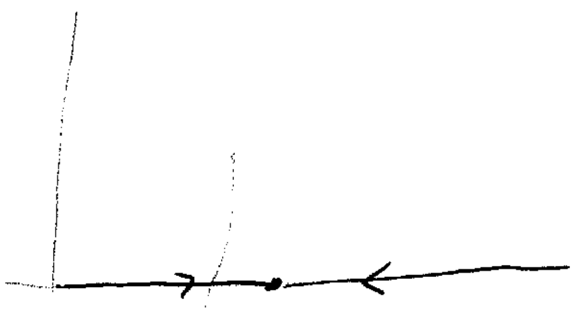
spor s jednoznačností (pravé strana rce je C^1.)

2

$x = 0$: $y' = -2y$.



$y = 0$: $x' = x(1-x)$



(2) $\left.\begin{aligned} x' &= \sin x + \cos x - e^{\mu y} \\ y' &= -2\,\mathrm{tg}\, y + \frac{x}{1+y^2} \end{aligned}\right\} F(x,y)$;

$F(0,0)=(0,0)$.

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x - \sin x, & -\mu e^{\mu y} \\ \frac{1}{1+y^2} \cancel{\frac{2}{\cos^2 x}} & , \frac{-2}{\cos^2 y} - \frac{2xy}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

~~DF(x,y)~~ $DF(0,0) = \begin{pmatrix} 1, & -\mu \\ 1, & -2 \end{pmatrix}$. nutné.

$\sigma(A) = ?$ $\qquad \begin{vmatrix} \lambda-1, & \mu \\ -1, & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + \mu - 2.$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{D}}{2}.$$

$$D = 1 + 4(2-\mu).$$

Diskuse: $D < 1$ $(\Leftrightarrow \mu > 2)$

zaručuje : $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < 0$: stabilita

$D > 1$: $(\Leftrightarrow \mu < 2)$

$\exists \lambda_i ; \lambda_i > 0$. : nestabilita.

(3)

$$e^{tA} = I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}\underset{-I}{\underset{\shortparallel}{A^2}} + \frac{t^3}{3!}\underset{-A}{\underset{\shortparallel}{A^3}} + \frac{t^4}{4!}\underset{I}{\underset{\shortparallel}{A^4}} + \frac{t^5}{5!}\underset{A}{\underset{\shortparallel}{A^5}} + \cdots$$

$$= I\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots\right) + A\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$= \cos t\, I + \sin t\, A.$$

hudné!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^2 = -I\ ;$$

$$e^{tA} = \cos t\, I + \sin t\, A = \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t, & \cdots & , -12\sin t \\ \sin t, & & -8\sin t \\ 0\ , & & -5\sin t \\ 0\ , & & \cos t - 2\sin t \end{pmatrix}$$

$$u(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - 10\sin t \\ -7\sin t \\ -5\sin t \\ \cos t - 2\sin t \end{pmatrix}.$$

1. příklad.

Uvažujte rovnici 1. řádu (neznámá funkce $x = x(t)$)

$$x' = t - x^2 .$$

(a) najděte body, kde řešení splňují $x' = 0$ resp. $x'' = 0$ — omezte se na polorovinu $x \geq 0$.

(b) načrtněte průběh několika různých řešení s počáteční podmínkou $x(0) = x_0 > 0$

(c) co se s těmito řešeními stane pro $t \to \infty$ resp. $t \to -\infty$? Zkuste odpověď co nejpřesněji zdůvodnit.

2. příklad.

Je dána soustava

$$\begin{aligned} x' &= \sin kx + y - x^3 y^2 \\ y' &= -x - x^4 y \end{aligned}$$

s reálným parametrem k.

(a) pomocí vět o linearizované (ne)stabilitě rozhodněte o stabilitě počátku

(b) pokud pro nějaké k nelze výše uvedené věty použít, zkuste najít Ljapunovský funkcionál ve tvaru $V = x^2 + by^2$, kde $b > 0$ je vhodně zvolené číslo

3. příklad.

(a) Vypočítejte

$$\int_0^\infty e^{tA}\, dt ,$$

víte-li, že matice A má pouze záporná vlastní čísla. (Proč konverguje tento integrál?)

Nápověda: vypočtěte nejprve pro matici 1×1, *tj. záporné reálné číslo. Definice:* $B = A^{-1}$, *právě když* $BA = I$.

(b) Nechť matice A je antisymetrická, tj. $A^T = -A$. Ukažte matice e^{tA} je ortogonální.

Nápověda: řešte klidně jen pro $t = 1$. *Matice* B *je ortogonální, jestliže* $B^T = B^{-1}$.

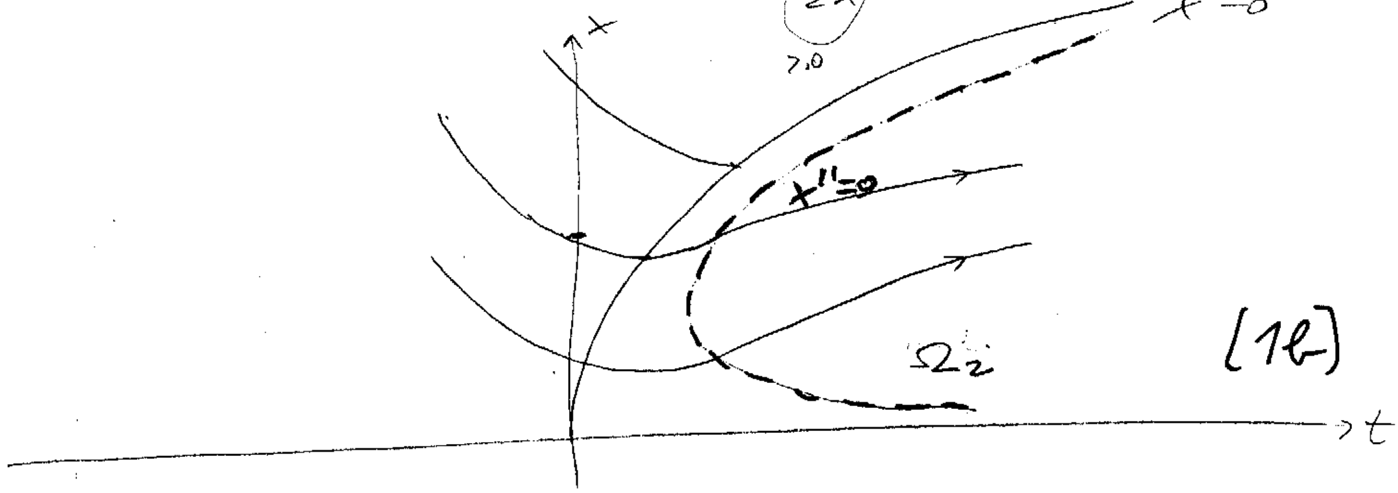
① $x'=0$: $t=x^2$

(a) $x''=1-2xx'=1-2x(t-x^2)$

$=1-2xt+2x^3$; $\quad 2xt=1+2x^3$

$t=\frac{1}{2x}+x^2$ [2b]

>0



[1b]

(b) viz obr.:

(c) $t\to\infty$: řešení vleze do Ω_2; [1b.]

možné $x(t)\to\infty$; ale je definováno

$t\to\infty$: řešení je v $t<0$; $x>0$ „strmější" než

$y'=-y^2$ .. blow-up v konečném čase.

(2)

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \kappa \cos \kappa x - 3x^2y^2 , & 1-2x^3y \\ -1-4x^3y , & -x^4 \end{pmatrix}$$

$$A = \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \kappa , & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \lambda-\kappa , & -1 \\ 1, & \lambda \end{vmatrix} =$$ [1b]

$$= (\lambda-\kappa)\lambda + 1 = \lambda^2 - \kappa\lambda + 1 \;; \quad D = \kappa^2 - 4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\kappa \pm \sqrt{\kappa^2-4}}{2}.$$

diskuse: a) $\kappa^2 - 4 \leq 0$

tj: $|\kappa| \leq 2$: $\quad Re\{\lambda_{1,2}\} = \frac{\kappa}{2}$.

b) $\kappa^2 - 4 > 0$: $\quad \lambda_1 < \lambda_2 = \frac{1}{2}\Big(\kappa + \underbrace{\sqrt{\kappa^2-4}}_{<|\kappa|}\Big)$ [1b]

celkem: $\kappa < 0$: $\quad Re\{\lambda_{1,2}\} < 0$

$\kappa > 0$: $\quad Re\{\lambda_2\} > 0$ [1b]

? $\kappa = 0$: $\quad x' = +y - x^3y^2$

$y' = -x - x^4y$

$$V = x^2+y^2; \quad V' = 2xx' + 2yy' = 2x(\cancel{y} - x^3y^2) + 2y(\cancel{-x} - x^4y)$$

$$= -2x^4y^2 - 2x^4y^2 \leq 0.$$

Stabilita.

[1b]

③

(a) $$\int_0^\infty e^{at}\,dt = \left[\frac{1}{a}e^{at}\right]_0^\infty = -\frac{1}{a}.$$

Arătăm: $$\int_0^\infty e^{tA}\,dt = -A^{-1}.$$ [1p]

$$A\int_0^\infty e^{tA}\,dt = \int_0^\infty A e^{tA}\,dt = \left[e^{tA}\right]_0^\infty = -I.$$ [1p]

(b) $$\left[e^{A}\right]^T = e^{A^T} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\left(A^T\right)^k = e^{-A} = \left(e^{A}\right)^{-1}.$$

$$\left(A^T\right)^k = (-A)^k = (-1)^k A^k$$

[2p]

3. termín: 11-6-

1. příklad. Dva živočišné druhy x a y, soupeřící o tentýž zdroj, jsou popsány soustavou:

$$x' = x(2 - x - 2y)$$
$$y' = y(2 - 2x - y)$$

(Omezíme se pouze na hodnoty $x \geq 0$, $y \geq 0$.)
(a) nakreslete chování řešení na osách $x = 0$ resp. $y = 0$
(b) najděte množiny, kde je x' resp. y' kladná (záporná), a odtud načrtněte chování řešení v prvním kvadrantu. Interpretujte z hlediska uvedené aplikace!
(c) najděte jediný stacionární bod (x_0, y_0), splňující $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Vyšetřete chování řešení v blízkosti tohoto bodu (nakreslete – ne nutně do předchozího obrázku). Jak se tento typ stac. bodu nazývá?

2. příklad. Soustavu

$$x' = -y - x^3$$
$$y' = x - y^3$$

převeďte do polárních souřadnic (tj. předpokládejte, že $x(t) = r(t)\cos\phi(t)$ a $y(t) = r(t)\sin\phi(t)$ a vyjádřete rovnice pro r a ϕ.)

(b) pomocí polárních souřadnic nyní vyšetřete typ stability v počátku

3. příklad. (Aplikace Sturmovy srovnávací věty.)
(a) Ukažte, že každé (netriviální) řešení rovnice

$$x'' + \frac{2t}{t+1}x = 0$$

má v intervalu $(0, \infty)$ nekonečně mnoho nulových bodů.
(Návod: srovnejte s rovnicí $y'' + y = 0$.)

Dokážete říci něco o rozložení těchto nulových bodů blízko nekonečna?

(b) Ukažte, že netriviální řešení rovnice

$$x'' + \frac{1}{8t^2 + 1}x = 0$$

má v intervalu $(0, \infty)$ nejvýše konečný počet nulových bodů.
(Návod: srovnejte s rovnicí $y'' + y/(8t^2) = 0$, jejíž řešení umím najít explictně ve tvaru $y = t^\lambda$ – jde o tzv. Eulerovu rovnici.)

Jaký nejlepší horní odhad tohoto počtu nulových řešení umíte odvodit?

① $x' = x(2-x-2y)$

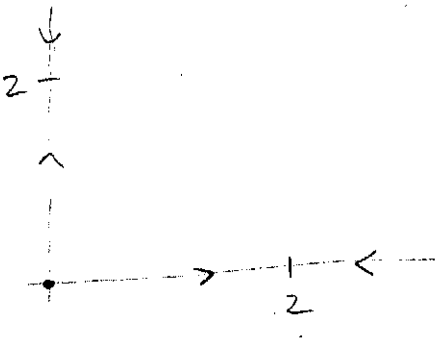
$y' = y(2-2x-y)$

[8]

(a)

$y=0: \quad x' = x(2-x)$

$x=0: \quad y' = y(2-y)$



[1]

(b) $x'>0: \quad 2-x-2y>0$

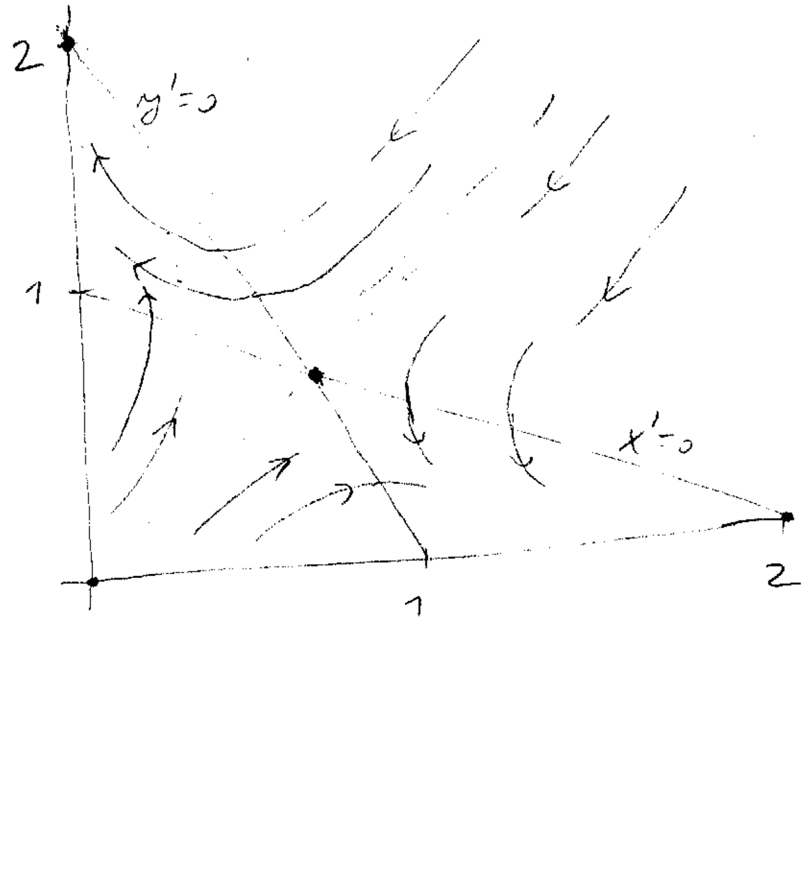
$2-x>2y$

$y<\frac{1}{2}(2-x)$

$y'>0: \quad 2-2x-y>0$

$2(1-x)>y$

$y<2(1-x).$



[2]

(c) $\frac{1}{2}(2-x) = 2(1-x)$

$1 - \frac{x}{2} = 2 - 2x$

$\left(2-\frac{1}{2}\right)x = 1$

$\underline{\underline{x = \frac{2}{3}}}$; $\quad y = 2(1-x) = 2\left(1-\frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

linearizace: $\quad F = \begin{pmatrix} 2x - x^2 - 2xy \\ 2y - 2xy - y^2 \end{pmatrix}$

$$DF = \begin{pmatrix} 2-2x-2y, & -2x \\ -2y, & 2-2x-2y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1-x-y, & -x \\ -y, & 1-x-y \end{pmatrix}$$

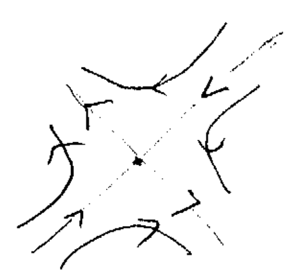
$$DF\left(\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}\right) = 2\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}, & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}, & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}, & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3}, & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$= \frac{1}{3}\underbrace{\begin{pmatrix} -2, & -4 \\ -4, & -2 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}}. \qquad \chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+2, & 4 \\ 4, & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2 - 16$$

$\lambda = -2 \pm 4.$

$\lambda = -6: \begin{pmatrix} -4, & 4 \\ 4, & -4 \end{pmatrix} \;..\; v = (1,1)$

$\lambda = 2: \begin{pmatrix} 4, & 4 \\ 4, & 4 \end{pmatrix} \;..\; u = (-1,1)$



sedlový bod:

(2) $x' = -y - x^3$ $\qquad x = r\cos\varphi$

$y' = x - y^3$ $\qquad y = r\sin\varphi$

$$x' = r'\cos\varphi - r\varphi'\sin\varphi$$
$$y' = r'\sin\varphi + r\varphi'\cos\varphi$$

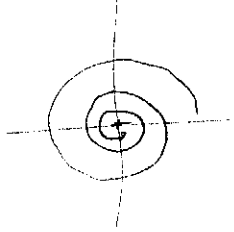
$$r' = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi$$
$$r\varphi' = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \qquad [1]$$

$$r' = (-y - x^3)\cos\varphi + (x - y^3)\sin\varphi$$
$$= (\cancel{-r\sin\varphi} - r^3\cos^3\varphi)\cos\varphi + (\cancel{r\cos\varphi} - r^3\sin^3\varphi)\sin\varphi$$
$$= -r^3\left[\cos^4\varphi + \sin^4\varphi\right] \le 0 \to \text{stabilita.}$$

dokonce: $r' < 0$ pro $r > 0$: $\to$ asymptotická stabilita. [2]

rce pro φ: $r\varphi' = (y + x^3)\sin\varphi + (x - y^3)\cos\varphi$

$$= (r\sin\varphi + r^3\cos^3\varphi)\sin\varphi$$
$$+ (r\cos\varphi - r^3\sin^3\varphi)\cos\varphi$$



$$= r + r^3\left[\cos^3\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\cos\varphi\right]$$
$$= r\left[1 + r^2\cos\varphi\sin\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\right]$$

$$\varphi' = 1 + r^2\,\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\cos 2\varphi = 1 + \tfrac{r^2}{4}\sin 4\varphi.$$

$\varphi' > 0$ if r small

(3) [4b]

(a) $$x'' + \underbrace{\frac{2t}{t+1}}_{q(t)} x = 0$$

$t > 1$: $2t > t+1$ .. $q(t) > 1$.

<u>Sturm:</u> rovnice osciluje rychleji než $y'' + y = 0$

$y = \cos t$.

$\cos t$ .. ∞ - nulových bodů

$\Rightarrow$ $x(t)$ má ∞ - nul. bodů v $(1, \infty)$.

[2]

<u>Dodatek:</u> $q(t) \to 1 \Rightarrow \text{dist}(x_i, x_{i+1}) \to \pi$ pro $t \to \infty$.

(b) $$x'' + \underbrace{\frac{1}{8t^2+1}}_{p(t)} x = 0 \qquad p(t) < \frac{1}{8t^2}$$

osciluje pomaleji než

$$y'' + \frac{y}{8t^2} = 0.$$

$y(t)$ nemá 0 v $(0, \infty)$

$\Rightarrow$ $x(t)$ má nejvýše jeden 0 bod zde.

$y = t^\lambda$: $\lambda(\lambda - 1) + \frac{1}{8} = 0$

$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{8} = 0$

$\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} = 0$

$\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} = \lambda_1, \lambda_2$

$y = t^{\lambda_1}$ .. řešení. [2]

4. termín 24.6.'08

1. příklad.[5b] (a) Nalezněte oblasti, kde řešení rovnice

$$x' = t + \frac{t}{x}$$

rostou (klesají) resp. kde jsou konvexní (konkávní).
(b) Na základě těchto údajů načrtněte co nejpřesněji průběhy různých řešení. (Omezte se na oblast $t > 0$. Rovnici neřešte! Obrázek aspoň 10x10 cm!!!)
(c) Co se stane s řešeními pro $t \to \infty$?

2. příklad.[4b] Je dán systém rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xz + by/4 + y^2 \\ y' &= -y + x + x^3 y \\ z' &= az \end{aligned}$$

Proveďte co nejúplnější diskusi stability počátku $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ vzhledem k parametrům $a \geq 0$ a $b \in R$.

(Návod: řešte zvlášť situaci $a > 0$ resp. $a = 0$.)

3. příklad.[4b]
(a) Spočítejte $\exp(tA)$ přímo z definice, víte-li, že matice A splňuje $A^2 = c^2 I$, kde c je kladné reálné číslo.
(b) Ukažte, že spektrum A neobsahuje jiná čísla než $\pm c$.
(c) Pomocí bodu (a) najděte fundamentální matici pro systém $u' = Au$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 6 & 0 & 6 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Návod: $\cosh(y) = 1 + y^2/2! + y^4/4! + \ldots$, $\sinh(y) = y + y^3/3! + y^5/5! + \ldots$*)*

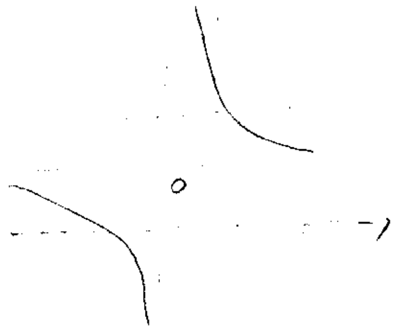
① $x' = t + \frac{t}{x}$ $\quad (t>0)$ $\quad x=0$: nemá smysl!! $\quad$ [5b]

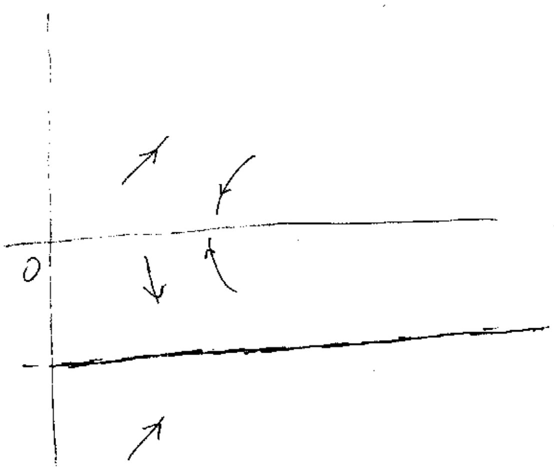
$x'>0 \Leftrightarrow t\left(1+\frac{1}{x}\right)>0$:

$1+\frac{1}{x}>0$

$\frac{1}{x}>-1$

$x>0$ nebo $x\in(-\infty,-1)$.





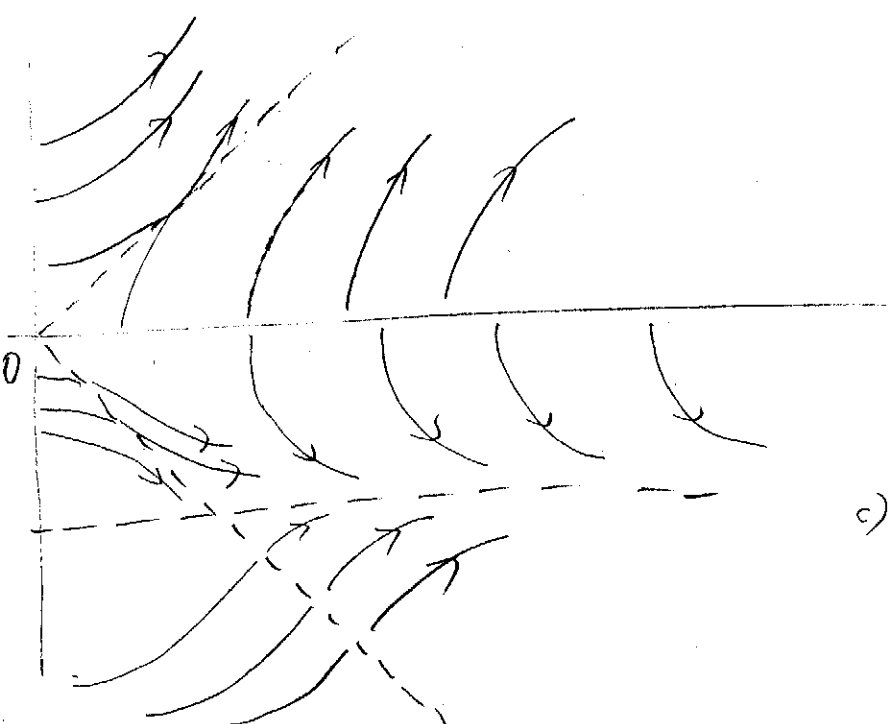
$x\equiv -1$: řešení. $\quad$ [2]

$$x'' = \left(1+\frac{1}{x}\right) + t\left(-\frac{1}{x^2}x'\right) = \left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{t^2}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{-3}(x+1)(x+t)(x-t) = \underbrace{x^{-3}}_{>0}(x+1)(x^2-t^2)$$

$x^2>t^2$

$|x|>|t|$.



$x'>t$

$x\geq x_0+\frac{1}{2}t^2$ $\quad$ [2]

c) $x(1)>0$.

[1]

$x'<2t$

(2)

$$x' = xz + \frac{by}{4} \qquad (x,y,z) \text{ -- neznámé}$$
$$y' = -y + x \qquad a \geq 0;\ b \in \mathbb{R} \text{ -- parametry.}$$
$$\underbrace{z' = az}_{F(x,y,z)}$$

$$DF = \begin{pmatrix} z, & \frac{b}{4}, & x \\ 1, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & a \end{pmatrix}; \quad DF(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0, & \frac{b}{4}, & 0 \\ 1, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & a \end{pmatrix}.$$

- $a \in \sigma(A)$; $a > 0 \Rightarrow$ nestabilní. [1]

$a = 0$: $\Rightarrow z' = 0$; $z(t) \equiv \varepsilon \in \mathbb{R}$ (parametr.)

systém pro: (x,y):
$$x' = \varepsilon x + \frac{b}{4} y$$
$$y' = -y + x$$

$$B = \begin{pmatrix} \varepsilon, & \frac{b}{4} \\ 1, & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \lambda - \varepsilon, & -\frac{b}{4} \\ -1, & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - \varepsilon)(\lambda + 1) - \frac{b}{4}$$
$$= \lambda^2 + (1-\varepsilon)\lambda - \frac{b}{4} \qquad [1]$$

$$D = (1-\varepsilon)^2 + b.$$

$b < -1$: $D < 0$; ε..

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(1-\varepsilon) \pm \sqrt{D}}{2}.$$

$1 - \varepsilon > 0$: stabilita.

$b > 0$: $\sqrt{D} = \sqrt{(1-\varepsilon)^2 + b} > \underline{1-\varepsilon}$. $\lambda_1 > 0$ – nestabilita. [1]

$b \in (0,1)$: . . .

(3) $A^2 = c^2 I$; $c > 0$. [4]

(a)

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \frac{1}{4!}t^4A^4$$

$$= I + tA + \frac{1}{2}t^2c^2I + \frac{1}{3!}t^3c^2A + \frac{1}{4!}t^4c^4I \qquad [1]$$

$$= I\left(1 + \frac{1}{2}(tc)^2 + \frac{1}{4!}(tc)^4 + \cdots\right)$$

$$+ \frac{A}{c}\left(tc + \frac{1}{3!}(tc)^3 + \frac{1}{5!}(tc)^5 + \cdots\right)$$

$$= I\cosh(tc) + \frac{A}{c}\sinh(tc). \qquad [1]$$

(b) $A^2 = c^2 I$;

$Au = \lambda u$

$A^2u = A(Au) = \lambda^2 u = c^2 u$

$\lambda^2 = c^2$

$\underline{\lambda = \pm c.}$ $\qquad \lambda^2 = 1$; $\lambda = \pm 1$

$\lambda \in \mathbb{C}$. [1]

(c) $M = \begin{pmatrix} 3, & 3, & -3 \\ 6, & 0, & 6 \\ -3, & 3, & 3 \end{pmatrix}$;

$$MM = \begin{pmatrix} 3, & 3, & -3 \\ 6, & 0, & 6 \\ -3, & 3, & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3, & 3, & -3 \\ 6, & 0, & 6 \\ -3, & 3, & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36, & 0, & 0 \\ 0, & 36, & 0 \\ 0, & 0, & 36 \end{pmatrix} \quad c = 6$$

$$e^{tM} = I\cosh(6t) + \frac{M}{6}\sinh(tc). \qquad [1]$$

5. TERMÍN – 2.7. 2008

1. příklad. [4b]
Uvažujte systém dravec-kořist (se zpětnou vazbou růstu kořisti)

$$
\begin{aligned}
x' &= x(1-x) - xy \\
y' &= -y + 2xy
\end{aligned}
$$

(a) nalezněte stacionární body
(b) určete oblasti, kde $x' > 0$ (resp. $x' < 0$) a $y' > 0$ (resp. $y' < 0$)
(c) načrtněte co nejpřesněji průběh řešení

Veškeré úvahy omezte na první kvadrant $x \geq 0$, $y \geq 0$.

2. příklad. [4b]
Vyšetřete stabilitu počátku pro soustavu

$$
\begin{aligned}
x' &= -\sin x - y^2 \\
y' &= y \sin x - x^2 y - ay
\end{aligned}
$$

v závislosti na parametru a.

Selže-li linearizace, použijte Ljapunovský funkcionál $V = y^2/2 - \cos x + 1$. (Uveďte všechny požadavky na Ljapunovský funkcionál a ověřte podrobně, že jsou splněny na malém okolí počátku.)

3. příklad. [4b] (Srovnávací věta.)
(a) ukažte, že řešení rovnice

$$x'' + x/t^4 = 0$$

má nulový bod v intervalu $(0, \delta)$ pro každé (malé) δ.

Návod: srovnejte zde s rovnicí $y'' + A^2 y = 0$ pro vhodné velké $A > 0$.

(b) ukažte, že (netriviální) řešení téže rovnice nemá žádný nulový bod blízko $+\infty$.

Návod: srovnejte s $y'' + y/ct^2 = 0$ pro vhodné velké $c > 0$ – Eulerova rovnice.

① $x' = x(1-x) - xy$ [4b]

$y' = -y + 2xy$

(a) stac. body: $x(1-x-y)=0$

$y(2x-1)=0 \Rightarrow y=0 \vee x=\frac{1}{2}$

(α): $y=0$: 1. rce: $x(1-x)=0$

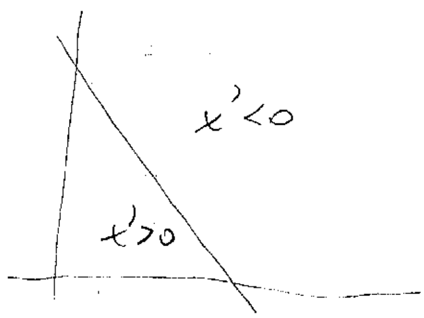
$x = 0, 1$

(β) $y \neq 0$: $x=\frac{1}{2}$ · 1. rce: $y=\frac{1}{2}$.

celkem: 3 stac. body $[0,0]$, $[1,0]$; $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. [1]

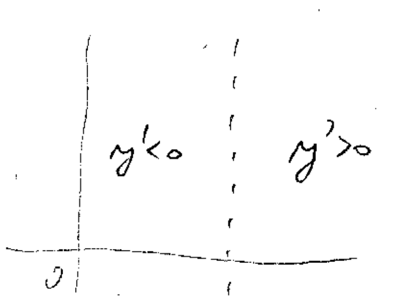
(b) $x' > 0$: $1-x-y > 0$

$y < 1-x$

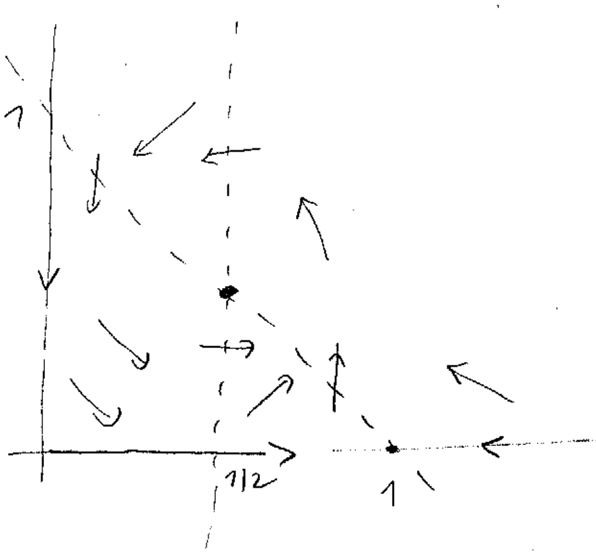


$y' > 0$: $2x-1 > 0$

$x > \frac{1}{2}$



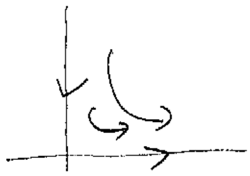
celkem:



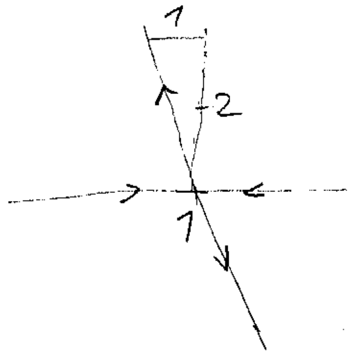
[2]

linearizace: $F = \begin{pmatrix} x - x^2 - xy \\ -y + 2xy \end{pmatrix}$, $DF = \begin{pmatrix} 1-2x-y, & -x \\ 2y, & -1+2x \end{pmatrix}$

$DF(0,0) = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$ „sedlo"



$DF(1,0) = \begin{pmatrix} -1, & -1 \\ 0, & +1 \end{pmatrix}$ „sedlo"



$DF(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} \lambda+\frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ -1, & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+\frac{1}{2})\lambda + \frac{1}{2}$

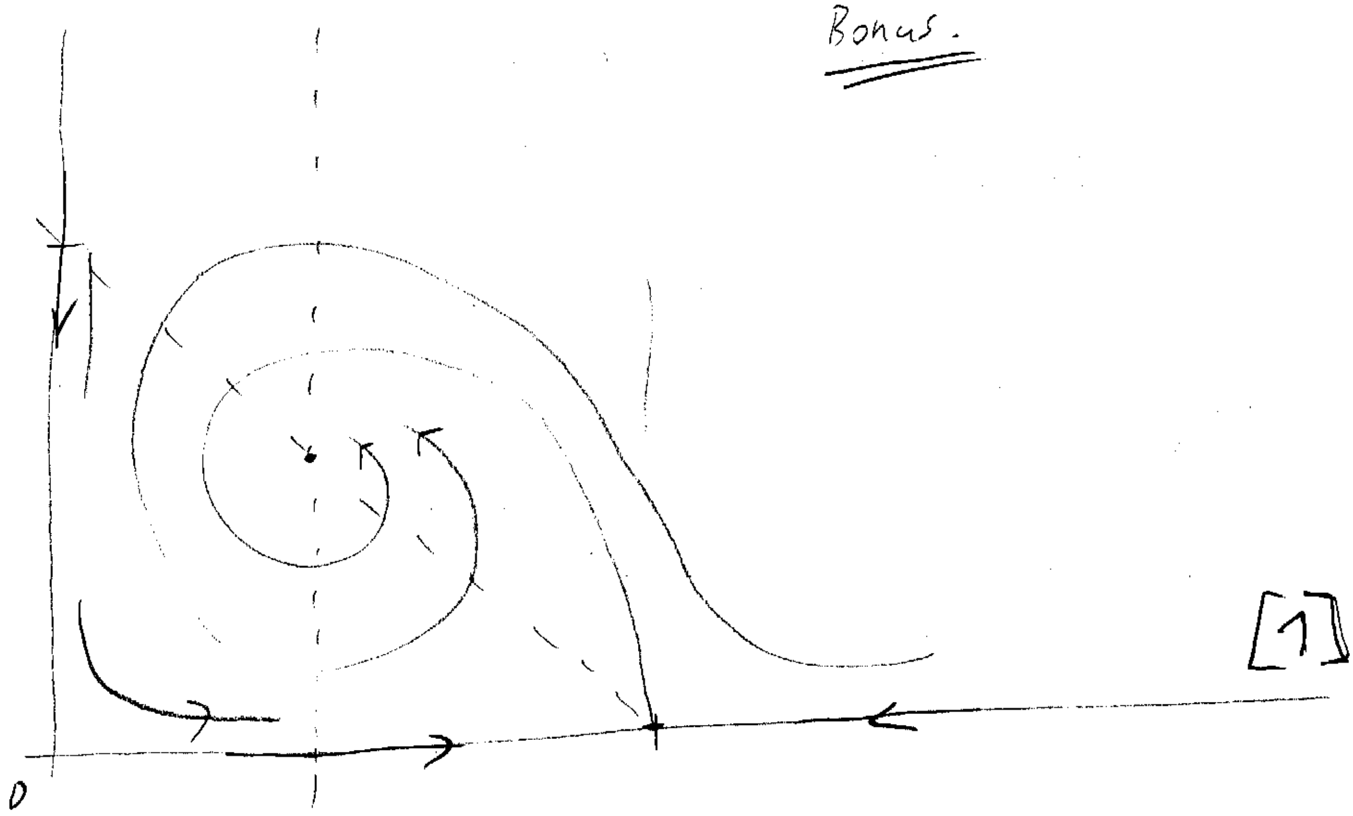
$= \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}$

$D = \frac{1}{4} - 2 < 0.$

$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm i\omega}{2}.$

 „stabilní vír".

Bonus.



② $x' = -\sin x - y^2$ [4b]

$y' = \underbrace{y \sin x - x^2 y - a y}_{F}$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} -\cos x, & -2y \\ y\cos x - 2xy, & \sin x - x^2 - a \end{pmatrix}$$ [1]

$$\nabla F(0,0) = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -a \end{pmatrix}$$

$a > 0 : \Rightarrow$ stabilní

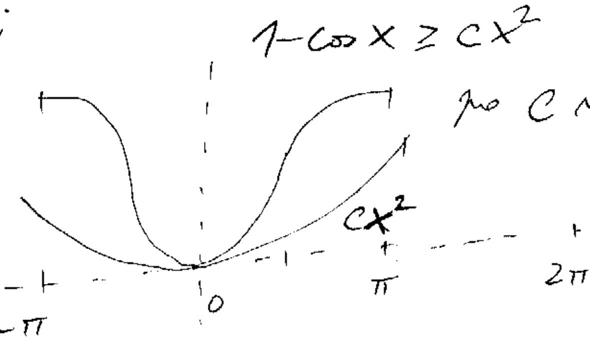
$a < 0 \Rightarrow$ nestabilní [1]

$\boxed{a=0}$: $x' = -\sin x - y^2$

$y' = y \sin x - x^2 y$;

$1 - \cos x \geq c x^2$

pro c malé



$V(x,y) = \frac{y^2}{2} + 1 - \cos x$

na $\Omega = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ platí:

- V spojité; ≥ 0; $V = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$
- $V(x,y) \geq \frac{y^2}{2} + c x^2 \geq d\,(x^2 + y^2)$
- $x(t), y(t)$ .. řešení: $\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} y^2 + (1 - \cos x)\right]$

$= y y' + \sin x \cdot x' = y\,(y \sin x - x^2 y) + \sin x\,(-\sin x - y^2)$

$= \cancel{y^2 \sin x} - x^2 y^2 - \sin^2 x - \cancel{y^2 \sin x} = -x^2 y^2 - \sin^2 x \leq 0.$

$\Rightarrow$ stabilita [2]

(3) $x'' + \frac{x}{t^4} = 0$ [4b]

(a) $t \in (0, \delta)$: $\frac{1}{t^4} > \frac{1}{\delta^4}$ ... srovnej s $y'' + A^2 y = 0$

$A = \frac{1}{\delta^2}$.

$y(t) = \sin At$

nulové body $\frac{\pi}{A} = \delta^2 \pi$ od sebe.

$\delta^2 \pi < \frac{\delta}{2}$

$\delta < \frac{1}{2\pi}$

$\sin At$ má v $(0, \delta)$ aspoň 2 nulové body

$\Rightarrow x(t)$ má v $(0, \delta)$ aspoň 1 nulový bod [2]

(b) $t \geq K$: $\frac{1}{t^4} \leq \frac{1}{K^2 t^2}$ .. srovnej s

$$y'' + \frac{y}{K^2 t^2} = 0$$

$$K^2 t^2 y'' + y = 0$$

Eulerova rce: $K^2 \lambda(\lambda - 1) + 1 = 0$

$$K^2 \lambda^2 - K^2 \lambda + 1 = 0$$

$$D = K^4 - 4K^2 = K^2(K^2 - 4) > 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{K^2 \pm \sqrt{D}}{2}$$

obecné řešení: $y(t) = C_1 t^{\lambda_1} + C_2 t^{\lambda_2}$

$$= t^{\lambda_1} \left[C_1 + C_2 t^{\lambda_2 - \lambda_1} \right]$$

nemá kořen v (K, ∞) pro nějaké C_1, C_2. [2]

$\Uparrow$

$x(t)$ má nejvýše 1 kořen v (K, ∞).