Optimální regulace

1. Pohyb lokomotivy je dán rovnicí
$$\ddot{x} = u\,.$$
Najděte $u : [0, \infty) \to [-1, 1]$ takové, že $x = \dot{x} = 0$ nastane v nejkratším čase.

2. Závaží na pružině se řídí rovnicí
$$\ddot{x} + x = u\,.$$
Najděte $u : [0, \infty) \to [-1, 1]$ takové, že $x = \dot{x} = 0$ nastane v nejkratším čase.

3. Národní hospodářství se řídí rovnicí
$$\dot{x} = kux\,,$$
kde $k > 0$ je dáno a $u : [0, T] \to [0, 1]$ je procento reinvestic. Určete u tak, že celková spotřeba, tj.
$$\int_0^T x(t)(1 - u(t))\,dt\,,$$
je maximální. Čas $T > 0$ je pevně daný.

4. Včely se řídí soustavou rovnic
$$\begin{aligned}\dot{w} &= -\mu w + buw\,,\\ \dot{q} &= -\nu q + c(1-u)w\,,\end{aligned}$$
kde $w(t)$, $q(t)$ je počet dělnic resp. královen a $u : [0, T] \to [0, 1]$ určuje, který typ potomstva je preferován. Kladné konstanty μ, ν, b, c jsou dány. Najděte u tak, že $q(T)$ je maximální. Čas $T > 0$ je dán pevně.

5. (Kvadratický regulátor.) Určete $u : [0, T] \to R$ tak, že
$$\int_0^T x^2(t) + u^2(t)\,dt$$
je minimální, přičemž
$$\dot{x} = x + u\,.$$
Čas $T > 0$ je dán pevně.

Poznámky k úlohám.

1. Podle (1) je $u(t) = \operatorname{sgn}(-h_1 t + h_2)$, tedy $u = \pm 1$ a změna nastane nejvýše jednou. Jak vypadají řešení v rovině x, $y = \dot{x}$ pro $u \equiv 1$ resp. $u \equiv -1$?

2. BÚNO $(h_1, h_2) = (-\cos a, \sin a)$, potom $u(t) = \operatorname{sgn} \sin(t + a)$, tj. optimální regulace střídá ± 1 s intervalem π. Pro $u \equiv 1$ je uběhne řešení v rovině x, $y = \dot{x}$ polovinu kružnice se středem $(0, 1)$.

3. Rovnice (2) říká $\dot{p} = -1 - u(kp - 1)$, podle (4) $u = 0$ pro $kp < 1$, $u = 1$ pro $kp > 1$. Konstruujte p z podmínky $p(T) = 0$ v čase zpět.

4. Soustava pro p vypadá $\dot{p_1} = (\mu - bu)p_1 - c(1-u)p_2$, $\dot{p_2} = \nu p_2$, $p_1(T) = 0$, $p_2(T) = 1$. Podle (4) je $u = 1$ pokud $bp_1 > cp_2$ a $u = 0$ jinak. Postupujte z času T zpět.

5. Z principu maxima $u(t) = p(t)/2$, odtud soustava $\dot{x} = x + p/2$, $\dot{p} = 2x - p$.