$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina; p, $p' \in [1, \infty]$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Odkaz [LM] směřuje na skripta Lukeš, Malý: Míra a integrál, Karolinum, 1993.

Věta. Nechť $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ je omezená posloupnost, nechť $p > 1$. Pak existuje podposloupnost $\{\tilde{f}_n\}$ a $f \in L^p(\Omega)$ takové, že

$$\int\limits_\Omega \tilde{f}_n g \, dx \to \int\limits_\Omega f g \, dx \tag{1}$$

pro každé $g \in L^{p'}(\Omega)$. Navíc

$$\|f\|_p \le \limsup_{n \to \infty} \|f_n\|_p \tag{2}$$

Poznámka. Konvergenci (1) nazýváme slabou (v případě $p = \infty$ *-slabou) konvergencí v L^p. Pro $p = 1$ uvedená věta neplatí; slabou limitou posloupnosti omezené jen v L^1 může být obecně míra.

Důkaz věty. Protože $p > 1$, je $p' < \infty$ a tedy existuje[1] spočetná, hustá množina $G \subset L^{p'}(\Omega)$. Z Hölderovy nerovnosti[2] lehce dostaneme, že pro každé $g \in G$ pevné je posloupnost (čísel) $\{\int_\Omega f_n g \, dx\}$ omezená. Diagonálním výběrem (díky spočetnosti G) lze najít podposloupnost $\{\tilde{f}_n\}$ takovou, že

$$L(g) := \lim_{n \to \infty} \int\limits_\Omega \tilde{f}_n g \, dx \tag{3}$$

existuje konečná pro každé $g \in G$. Je-li nyní $g \in L^{p'}(\Omega)$ obecné, najdeme k danému $\varepsilon > 0$ prvek $\tilde{g} \in G$ takový, že $\|g - \tilde{g}\|_{p'} < \varepsilon$. Tedy

$$\int\limits_\Omega \tilde{f}_n g \, dx = \int\limits_\Omega \tilde{f}_n \tilde{g} \, dx + \int\limits_\Omega \tilde{f}_n (g - \tilde{g}) \, dx$$

První integrál vpravo má limitu; druhý integrál vpravo odhadneme opět Hölderem jako $K\varepsilon$, kde $\|\tilde{f}_n\|_p \le K$. Protože $\varepsilon > 0$ je libovolné, plyne odsud, že integrál vlevo má limitu. Tedy limiy $L(g)$ v (3) existuje konečná pro každé $g \in L^{p'}(\Omega)$.
Pozorujeme, že $g \mapsto L(g)$ je spojité, lineární zobrazení. Linearita je zřejmá; spojitost plyne z odhadu

$$|L(g)| \le \|g\|_{p'} \limsup_{n \to \infty} \|f_n\|_p$$

opět pomocí Hölderovy nerovnosti. Tedy L je prvkem duálu prostoru $L^{p'}(\Omega)$ a proto existuje[3] $f \in L^p(\Omega)$ takové, že $L(g) = \int_\Omega f g \, dx$ pro každé g. S ohledem na (3) je důkaz hotov.

[1] Plyne např. z [LM], 15.17.
[2] [LM], 10.3.
[3] [LM], 13.17. Zde opět potřebujeme $p' < \infty$.