verze 7. ledna 2021

13. Úvod do dynamických systémů.

Definice. *Dynamickým systémem* rozumíme dvojici (φ, Ω), kde $\varphi = \varphi(t, x) : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$ je zobrazení, splňující

(i) $\varphi(0, x) = x$ pro $\forall x \in \Omega$

(ii) $\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(s + t, x)$ pro $\forall s,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \Omega$

(iii) $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$ je spojité

V uvedené definici může být Ω libovolný topologický prostor; nás však budou zajímat výlučně hladké dynamické systémy v $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Příklad. Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $f = f(x) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ třídy C^1, pak $\varphi(t, x_0) := x(t)$, kde $x = x(t)$ je řešení úlohy

$$x' = f(x), \qquad x(0) = x_0 \tag{1}$$

je dynamický systém třídy C^1. Tento příklad je kanonický v tom smyslu, že naopak každý hladký d.s. v $\mathbb{R}^n$ vznikne jako „řešicí funkce" jisté rovnice typu (1).

Definice. Nechť (φ, Ω) je dynamický systém. Množina $M \subset \Omega$ se nazve

- pozitivně invariantní, jestliže $\varphi(t, x) \in M$ pro $\forall t \geq 0,\ x \in M$
- negativně invariantní, jestliže $\varphi(t, x) \in M$ pro $\forall t \leq 0,\ x \in M$
- (úplně) invariantní, jestliže $\varphi(t, x) \in M$ pro $\forall t \in \mathbb{R},\ x \in M$

Pro $x_0 \in M$ dále definujeme

- pozitivní orbit $\gamma^+(x_0) = \{\varphi(t, x_0);\ t \geq 0\}$
- negativní orbit $\gamma^-(x_0) = \{\varphi(t, x_0);\ t \leq 0\}$
- (úplný) orbit $\gamma^-(x_0) = \{\varphi(t, x_0);\ t \in \mathbb{R}\}$

Jednoduchá pozorování: pozitivní/negativní/úplný orbit je pozitivně/negativně/úplně invariantní. Množina M je pozitivně/negativně/úplně invariantní, právě když pro každé $x_0 \in M$ je $\gamma^+(x_0)$ resp. $\gamma^-(x_0)$ resp. $\gamma(x_0)$ částí M.

Definice. Nechť (φ, Ω) je dynamický systém. Definujeme *ω-limitní množinu* bodu $x_0 \in \Omega$ jako

$$\omega(x_0) = \{y \in \Omega;\ \exists t_n \to +\infty \text{ t.ž. } \varphi(t_n, x_0) \to y\}$$

Podobně definujeme α-limitní množinu jako

$$\alpha(x_0) = \{y \in \Omega;\ \exists t_n \to -\infty \text{ t.ž. } \varphi(t_n, x_0) \to y\}$$

Poznámka. Lehce se nahlédne, že

$$y \in \omega(x_0) \iff \big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\forall T > 0\big)\big(\exists t \geq T\big)\Big[|y - \varphi(t, x_0)| < \varepsilon\Big],$$

tedy

$$y \in \Omega \setminus \omega(x_0) \iff \big(\exists \varepsilon > 0\big)\big(\exists T > 0\big)\big(\forall t \geq T\big)\Big[|y - \varphi(t, x_0)| \geq \varepsilon\Big],$$

neboli $\omega(x_0)$ obsahuje v tomto smyslu právě všechny body, které jsou významné pro $\varphi(t, x_0)$ pro velká $t > 0$.

Lemma 13.1. $\omega(x_0) = \bigcap_{\tau > 0} \overline{\gamma^+(\varphi(\tau, x_0))}$

Poznámka. Připomeňme, že množina M je *souvislá*, jestliže *neexistují* disjunktní otevřené množiny $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ takové, že $M \subset \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$, přičemž $M \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, $M \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$. Dále platí, že interval je souvislá množina, a spojitý obraz souvislé množiny je opět souvislá množina.

Věta 13.1. [Vlastnosti $\omega(x_0)$.] Nechť (φ, Ω) je dynamický systém. Potom

1. $\omega(x_0)$ je uzavřená a invariantní
2. je-li $\gamma^+(x_0)$ relativně kompaktní, je $\omega(x_0)$ neprázdná, kompaktní a souvislá.

Věta 13.2.[1] Nechť (φ, Ω) je dynamický systém. Potom:

1. $\omega(x_0) = \{z\}$, právě když $\varphi(t, x_0) \to z$, pro $t \to +\infty$
2. obecněji, pro $K \subset \Omega$ kompaktní platí: $\emptyset \neq \omega(x_0) \subset K$, právě když $\operatorname{dist}(\varphi(t, x_0), K) \to 0$ pro $t \to +\infty$.

Definice. Dynamické systémy (φ, Ω) a (ψ, Θ) nazveme *topologicky konjugované*, jestliže existuje homeomorfismus $h : \Omega \to \Theta$ takový, že $h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x))$ pro každé $t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$. Ekvivalentně $\varphi(t, \cdot) = h_{-1} \circ \psi(t, h(\cdot))$ pro každé t.

Poznámka. Topologická konjugace zachovává *podstatné* rysy dynamických systémů: stacionární body a jejich stabilitu; periodické orbity; ω-limitní množiny, ...

Věta 13.3. [O rektifikaci.] Nechť $f(x)$ je C^1 na okolí $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(x_0) \neq 0$. Pak existuje $\mathcal{V}$ okolí x_0, $\mathcal{W}$ okolí $0 \in \mathbb{R}^n$ a difeomorfismus $g : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ takový, že $x(t)$ je řešení rovnice (1) ve $\mathcal{V}$, právě když $y(t) = g(x(t))$ je řešení rovnice

$$y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

ve $\mathcal{W}$. Jinými slovy, dynamické systémy určené rovnicemi (1) a (2) jsou na příslušných okolích topologicky (dokonce C^1) konjugované.

Poznámka. Předchozí věta znamená, že dynamika na okolí nestacionárních bodů není příliš zajímavá. Následující (již těžší) věta říká, že na ani na okolí stacionárních hyperbolických bodů nevzniká zajímavá (tj. nelineární) dynamika.
Připomeňme, že stacionární bod rovnice (1) se nazývá *hyperbolický*, jestliže $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ pro každé λ ve spektru $A = \nabla f(x_0)$.

Věta 13.4.[2] [Hartman-Grobmanova.] Nechť $f(x)$ je C^1 na okolí x_0, kde x_0 je hyperbolický stacionární bod rovnice (1).
Pak existuje $\mathcal{V}$ okolí x_0 a $\mathcal{W}$ okolí $0 \in \mathbb{R}^n$ taková, že dynamické systémy, určené rovnicemi (1) na $\mathcal{V}$ respektive $y' = Ay$ na $\mathcal{W}$, jsou topologicky konjugované.

[1] Důkaz viz cvičení.
[2] Bez důkazu.

14. La Salleho princip invariance.

Připomeňme, že pro C^1 funkci $V : \Omega \to \mathbb{R}$ definujeme *orbitální derivaci* (vzhledem k řešením rovnice (1)) jako

$$\dot{V}_f(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j}(x) f_j(x)$$

Platí: $\dot{V}_f \leq 0$ v Ω, právě když pro libovolné řešení $x(t)$ rovnice (1) v Ω je $t \mapsto V(x(t))$ nerostoucí funkce.

Věta 14.1. [La Salle.] Nechť (φ, Ω) je dynamický systém, určený rovnicí (1). Nechť existuje $V(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ třídy C^1, zdola omezená, $\ell > 0$ takové, že

$$\Omega_\ell = \{x \in \Omega;\ V(x) < \ell\}$$

je omezená a nechť konečně $\dot{V}_f \leq 0$ v Ω_ℓ. Označme dále

$$\begin{aligned} R &= \{x \in \Omega_\ell;\ \dot{V}_f = 0\} \\ M &= \{y \in R;\ \gamma(y) \subset R\} \end{aligned}$$

Potom pro každé $x_0 \in \Omega_\ell$ je $\omega(x_0) \subset M$.

Komentář. M je největší invariantní podmnožina R. Závěr (s ohledem na Větu 13.2. výše) říká, že každé řešení v Ω_ℓ se blíží k M pro $t \to +\infty$. V aplikacích často M je jednobodová a La Salle zaručuje asymptotickou stabilitu v situacích, kdy nelze použít ani princip linearizace, ani Ljapunovskou funkci.

15. Poincaré-Bendixsonova teorie.

Tato kapitola se zabývá výlučně hladkými, rovinnými dynamickými systémy. Přesněji řečeno, platí následující

Úmluva. V celé kapitole $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast (tj. otevřená, souvislá množina), $f(x) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je třídy C^1 a $\varphi = \varphi(t, x)$ je dynamický systém, příslušný k rovnici (1). Předpokládáme, že $\varphi(t, x)$ je definováno pro každé $t \geq 0$ a $x \in \Omega$.

Opakování. Množina γ se nazve *křivka*, jestliže $\gamma = \psi([a, b])$, kde ψ je spojité a prosté v $[a, b]$. Pokud ψ je spojité v $[a, b]$, prosté v $[a, b)$ a $\psi(a) = \psi(b)$, nazývá se $\gamma = \psi([a, b])$ *Jordanova křivka.*
Zřejmě (periodický) orbit, přesněji množina $\{\varphi(t, x_0);\ t \in [a, b]\}$ je (Jordanova) křivka.
V rovině platí *Jordanova věta*: je-li $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ Jordanova křivka, pak disjunktně $\mathbb{R}^2 = \Omega_1 \cup \gamma \cup \Omega_2$, kde Ω_i jsou oblasti, Ω_1 je omezená, Ω_2 je neomezená.

Definice. Úsečka[3] $\Sigma \subset \Omega$ se nazývá *transverzála*, pokud pro každé p platí, že vektor $f(p)$ není rovnoběžný se Σ.

Názorně: řešení protínají transverzálu pod nenulovým úhlem (a nutně v tomtéž směru). Zřejmě každým nestacionárním bodem lze vést nějakou transverzálu.

[3] Tj. křivka s afinní parametrizací.

Lemma 15.1. Nechť $\Sigma \subset \Omega$ je transverzála, $p \in \Sigma$. Potom existují $\mathcal{U} \supset \tilde{\mathcal{U}}$ okolí bodu p a číslo $\Delta > 0$ takové, že každé řešení, splňující $x(0) \in \tilde{U}$: (i) neopustí $\mathcal{U}$ v žádném čase $|t| < \Delta$, a (ii) protne $\Sigma \cap \tilde{\mathcal{U}}$ v nějakém čase $|t| < \Delta/2$

Poznámka. Klíčovou ideou předchozího lemmatu je konstrukce tzv. „flow-boxu“, což je (C^1-deformovaný) „obdélník“ obsahující p, jehož hranici tvoří dvojice řešení (protínajících Σ) a dvojice transverzál (rovnoběžných se Σ).

Lemma 15.2. Nechť $\Sigma \subset \Omega$ je transverzála, nechť $p \in \Omega$. Potom průsečíky $\gamma^+(p)$ a Σ tvoří mnotónní posloupnost. Podrobněji: pokud $t_1 < t_2 < t_3$ a $\varphi(t_i, p) \in \Sigma$, tak buď (i) $\varphi(t_1, p) = \varphi(t_2, p) = \varphi(t_3, p)$, nebo (ii) bod $\varphi(t_2, p)$ leží striktně uvnitř úsečky s krajními body $\varphi(t_1, p)$ a $\varphi(t_3, p)$.

Lemma 15.3. Nechť $\Sigma \subset \Omega$ je transverzála, nechť $p \in \Omega$. Potom $\omega(p) \cap \Sigma$ obsahuje nejvýše jeden bod.

Věta 15.1. [Poincaré-Bendixson.] Nechť pro $p \in \Omega$ je $\gamma^+(p)$ relativně kompaktní v Ω a nechť $\omega(p)$ neobsahuje stacionární bod. Potom $\omega(p) = \Gamma$, kde Γ je orbit (netriviálního) periodického řešení.

Věta 15.2. [Bendixson-Dulac.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je navíc jednoduše souvislá a nechť existuje C^1 funkce $B(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ taková, že $\operatorname{div}(Bf)(x) > 0$ skoro všude v Ω. Potom rovnice (1) nemá v Ω (netriviální) periodické řešení.

Věta 15.3.[4] Nechť φ dynamický systém v $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ má nejvýše konečný počet stacionárních bodů. Potom pro každé $p \in \Omega$ je $\omega(p)$ buď (i) jednobodová, nebo (ii) periodický orbit, nebo (iii) konečná množina stacionárních bodů + sjednocení orbitů, tyto body spojujících.

16. Carathéodoryho teorie.

V celém kapitole I je interval libovolného typu.

Definice. Funkce $x : I \to \mathbb{R}^n$ se nazve absolutně spojitá, značíme $x \in AC(I)$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolné *disjunktní* intervaly $(a_i, b_i) \subset I$ platí

$$\sum_i |a_i - b_i| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_i |f(a_i) - f(b_i)| < \varepsilon \tag{16.1}$$

Funkce x se nazve *lokálně absolutně spojitá*, značíme $x \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$, jestliže $x \in AC(J)$ pro každý kompaktní interval $J \subset I$.

Tvrzení 1. Nechť $x \in AC(I)$. Potom x' je definována skoro všude v I, náleží do $L^1(I)$ a $x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} x'(s)\, ds$ pro všechna t_1, $t_2 \in I$.

Tvrzení 2. Nechť $h \in L^1(I)$, $t_0 \in I$. Potom funkce $x(t) := \int_{t_0}^{t} h(s)\, ds$ náleží do $AC(I)$; navíc $x' = h$ skoro všude.

Značení. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina s body $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $U = U(x_0, \delta)$ je koule v $\mathbb{R}^n$, $Q(t_0, x_0) = Q(t_0, x_0; \delta, \Delta)$ je válec $U(t_0, \delta) \times U(x_0, \Delta)$ v $\mathbb{R}^{n+1}$. Pro funkce $x = x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ značíme graf $x = \{(t, x(t)); t \in I\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definice. Řekneme, že funkce $f(t, x) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ splňuje Carathéodoryho podmínky, značíme $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$, jestliže pro každé $(t_0, x_0) \in \Omega$ existuje válec $Q(t_0, x_0; \delta, \Delta) \subset \Omega$ a funkce $m \in L^1(U(t_0, \delta))$ tak, že

[4] Bez důkazu.

(i) pro každé $x \in U(x_0, \Delta)$ je funkce $f(\cdot, x)$ měřitelná v $U(t_0, \delta)$

(ii) pro skoro každé $t \in U(t_0, \delta)$ je funkce $f(t, \cdot)$ spojitá v $U(x_0, \Delta)$

(iii) $|f(t,x)| \le m(t)$ pro[5] skoro všechna t pro všechna x v $Q(t_0, x_0; \delta, \Delta)$

Definice. Nechť $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$. Funkce $x : I \to \mathbb{R}^n$ se nazývá řešením rovnice

$$x' = f(t, x) \tag{16.1}$$

v Ω ve smyslu Carathéodoryho, jestliže graf $x \subset \Omega$, $x \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$ a platí $x'(t) = f(t, x(t))$ pro skoro všechna $t \in I$.

Lemma 16.1. Nechť $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$, $x : I \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce a graf $x \subset \Omega$. Potom funkce $t \mapsto f(t, x(t))$ je v $L^1_{\mathrm{loc}}(I)$.

Lemma 16.2. Nechť $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$, $x : I \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce a graf $x \subset \Omega$. Potom x je řešením (16.1) ve smyslu Carathéodoryho, právě když

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))\, ds \tag{16.2}$$

pro všechna t_1, $t_2 \in I$.

Poznámka. Na základě uvedené integrální formulace se (analogicky ke klasické teorii) může rozvinout teorie AC („Carathéodoryho“) řešení: lokální existence, podmínky jednoznačnosti, maximální řešení, spojitá závislost na počáteční podmínce, atd. Zde se omezíme na jistou variantu Picardovy věty, zahrnující dokonce globální existenci a spojitou závislost na datech rovnice.

Věta 16.1. [Zobecněná Banachova věta.] Nechť Λ, X jsou metrické prostory, X je úplný a neprázdný. Nechť $\Phi : \Lambda \times X \to X$ je spojité vůči λ pro každé x pevné. Nechť (klíčový předpoklad *uniformní kontrakce*) existuje $\kappa \in (0, 1)$ takové, že

$$\|\Phi(\lambda, x) - \Phi(\lambda, y)\|_X \le \kappa \|x - y\|_X \qquad \forall \lambda \in \Lambda,\ x,\ y \in X. \tag{16.3}$$

Potom

(i) pro každé $\lambda \in \Lambda$ existuje právě jedno $x(\lambda) \in X$ takové, že $\Phi(\lambda, x(\lambda)) = x(\lambda)$

(ii) zobrazení $\lambda \mapsto x(\lambda)$ je spojité

(iii) $\|y - x(\lambda)\|_X \le (1 - \kappa)^{-1} \|y - \Phi(\lambda, y)\|_X$ pro $\forall \lambda \in \Lambda$, $y \in X$

Věta 16.2. [Zobecněná Picardova věta.] Nechť $I = [0, T]$ je omezený interval, Π je metrický prostor a $f = f(t, x, p) : I \times \mathbb{R}^n \times \Pi \to \mathbb{R}^n$ splňuje následující:

1. $f(\cdot, \cdot, p) \in \mathrm{CAR}(I \times \mathbb{R}^n)$ pro každé $p \in \Pi$ pevné
2. existuje $\ell \in L^1(I)$ takové, že $|f(t, x, p) - f(t, y, p)| \le \ell(t)|x - y|$ pro skoro všechna $t \in I$ pro všechna x, $y \in \mathbb{R}^n$, $p \in \Pi$

[5] Fráze „pro skoro všechna t pro všechna … “ znamená: existuje N množina míry nula taková, že pro všechna $t \notin N$, pro všechna … .

3. zobrazení $p \mapsto \int_0^t f(s, x(s), p)\,ds$ je spojité z Π do $C(I)$, pro libovolné pevné $t_0 \in I$ a $x \in C(I)$

Potom: pro každé $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a $p_0 \in \Pi$ existuje právě jedno $x \in AC(I)$ řešení rovnice $x' = f(t, x, p_0)$, $x(0) = x_0$. Toto řešení závisí spojitě na x_0 a p_0 v následujícím smyslu: $x_{0n} \to x_0$ a $p_{0n} \to p_0$ implikuje $x_n \rightrightarrows x$ v I, kde x_n respektive x jsou řešení příslušná k x_{0n}, p_{0n} respektive k x_0, p_0.

Poznámka. Předpoklad 2 uvedené věty můžeme nazvat *zobecněnou lipschitzovskostí* $f(t, x, p)$ vůči x.

Příklad. Lineární rovnice

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{16.3}$$

kde $A(t) : [0, T] \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $b(t) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ jsou L^1 funkce. Zřejmě předpoklady Věty 16.2. jsou splněny (volme $\ell(t) = \|A(t)\|$). Pravou stranu $b(t) \in L^1(0, T)$ lze zahrnout do prostoru parametrů Π.

17. Sturm-Liouvilleova teorie.

Budeme se zabývat rovnicí

$$\big(p(t)x'\big)' + (\lambda r(t) + q(t))x = 0, \qquad t \in I, \tag{1}$$

s okrajovými podmínkami

$$c_1 x(a) + c_2 p(a) x'(a) = 0, \tag{2a}$$

$$c_3 x(b) + c_4 p(b) x'(b) = 0. \tag{2b}$$

Předpoklady platné v celé kapitole : $I = [a, b]$ je omezený, uzavřený interval, $p(t)$, $r(t)$, $q(t)$ jsou spojité, navíc $p(t)$, $r(t) > 0$ v celém I; vektory (c_1, c_2) a (c_3, c_4) jsou nenulové.

Poznámka. Úloha je „přezadaná“: netriviální řešení bude existovat jen pro jisté hodnoty λ.

Příklad. Rovnice $x'' + \lambda x = 0$, $t \in [0, \pi]$, okrajové podmínky $x(0) = 0$, $x(\pi) = 0$. Netriviální řešení existují pouze pro $\lambda = k^2$, $k \in \mathbb{N}$.
Pozoruji : příslušná řešení $u_k = \sin(kt)$ mají na vnitřku intervalu právě $k - 1$ nulových bodů, a tvoří úplný OG systém v $L^2(0, \pi)$. Odpovídající vlastní čísla $\lambda_k = k^2 \to \infty$. Ukážeme, že tento závěr platí obecně:

Věta 17.1. Existuje posloupnost $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k \to \infty$ taková, že (1), (2a), (2b) má *netriviální* řešení právě když $\lambda = \lambda_k$ pro nějaké k. Tato řešení u_k mají $k - 1$ nulových bodů v (a, b). Navíc tvoří úplnou OG bázi prostoru $L^2_r(a, b)$, tj. Hilbertova prostoru se skalárním součinem

$$\langle x, y \rangle_r = \int_a^b x(t) y(t) r(t) dt. \tag{2}$$

Poznámka. Řešení chápeme v Carathéodoryho smyslu, přesněji řečeno: $x(t)$, $p(t)x(t)' \in AC(I)$, rovnice splněna skoro všude v I.

Pohled z FA. Definujeme operátor

$$\mathscr{L} : \mathscr{D}(\mathscr{L}) \to L^1(I)$$
$$x \mapsto (px')' + qx$$

kde

$$\mathscr{D}(\mathscr{L}) = \Big\{x \in AC(I);\ p(t)x' \in AC(I);\ \text{ a platí (2a), (2b) } \Big\}$$

Potom (1) lze psát jako

$$\mathscr{L}x + \lambda r x = 0$$

tj. jde o úlohu na *vlastní čísla* operátoru $\mathscr{L}$. Věta 17.1. je tedy (jedním z řady) zobecnění známé věty z LA : je-li A symetrická matice, pak vlastní čísla jsou pouze reálná a z vlastních vektorů lze stvořit OG bázi.

Lemma 17.1. Nechť $(\xi(t), \eta(t)) : I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ jsou spojité. Pak existují spojité $\rho(t) : I \to (0, \infty)$ a $\phi(t) : I \to \mathbb{R}$ takové, že $\xi(t) = \rho(t)\cos\phi(t)$, $\eta(t) = \rho(t)\sin\phi(t)$, $t \in I$. Funkce ρ, ϕ získají i dodatečnou hladkost (např. AC nebo C^k) funkcí ξ, η.

Prüferova transformace. Substitucí $\xi(t) = p(t)x'(t)$, $\eta(t) = x(t)$ převedeme (1) systém

$$\begin{aligned} \xi' &= -(\lambda r(t) + q(t))\eta \\ p(t)\eta' &= \xi \end{aligned}$$

Polární souřadnice (viz Lemma 17.1) $\xi(t) = \rho(t)\cos\phi(t)$, $\eta(t) = \rho(t)\sin\phi(t)$ vedou na

$$\rho' = \rho\left(\frac{1}{p(t)} - (\lambda r(t) + q(t))\right)\cos\phi\sin\phi \tag{3}$$

$$\phi' = \frac{1}{p(t)}\cos^2\phi + (\lambda r(t) + q(t))\sin^2\phi \tag{4}$$

Klíčový fakt: rovnice (4) pro ϕ („fáze“) nezávisí na ρ („amplituda“), která nás nezajímá. Transformace okrajových podmínek : BÚNO lze předpokládat, že

$$(c_1, c_2) = (\cos\alpha, -\sin\alpha) \qquad (c_3, c_4) = (\cos\beta, -\sin\beta) \tag{5}$$

a lehce si rozmyslíme, že (2a) resp. (2b) je ekvivalentní $\phi(a) = \alpha + l\pi$ resp. $\phi(b) = \beta + k\pi$. Konečně BÚNO $l = 0$ a $\alpha \in [0, \pi)$, $\beta \in (0, \pi]$. Shrňme: nalezení *netriviálního* řešení úlohy (1), (2a), (2b) odpovídá nalezení řešení ϕ rovnice (4), splňující

$$\phi(a) = \alpha, \tag{5a}$$

$$\phi(b) = \beta + k\pi \tag{5b}$$

pro vhodné k celé, kde čísla α, β splňují (5).

Lemma 17.2. Označme $\phi(t, \lambda)$ řešicí funkci rovnice (4) s počáteční podmínkou (5a), pro dané λ. Potom:

1. $\lambda \mapsto \phi(b, \lambda)$ je rostoucí, spojitá
2. $\phi(b, \lambda) \to \infty$, $\lambda \to \infty$
3. $\phi(b, \lambda) \to 0$, $\lambda \to -\infty$

Důsledek. První část Věty 17.1 (existence λ_k, u_k; počet nulových bodů u_k.)

Značení. Až do konce kapitoly λ_k značí čísla z předchozí věty a u_k nějaká k nim příslušná netriviální řešení. Ortogonalita u_k (tj. druhá část Věty 17.1) plyne ihned z následujícího:

Lemma 17.3. Operátor $\mathscr{L}$ je symetrický, má pouze reálná vlastní čísla a vektory příslušné k různým vlastním číslům jsou kolmé vzhledem ke skalárnímu součinu v $L^2_r(a,b)$.

Lemma 17.4. Nechť u, v jsou lineárně nezávislá řešení (1) (s libovolnými okrajovými podmínkami). Potom existuje nenulové c tak, že

$$u(t)v'(t) - u'(t)v(t) = \frac{c}{p(t)} \qquad t \in [a,b]. \tag{6}$$

Lemma 17.5. Nechť $\lambda \neq \lambda_k$ pro každé k. Nechť $h \in L^2_r(a,b)$. Potom rovnice

$$\big(p(t)x'\big)' + (\lambda r(t) + q(t))x = r(t)h(t), \tag{7}$$

spolu s okrajovými podmínkami (2a), (2b) má *právě jedno* řešení $w(t)$, které lze vyjádřit jako

$$w(t) = \frac{1}{c}\left(v(t)\int_a^t u(s)h(s)r(s)\,ds + u(t)\int_t^b v(s)h(s)r(s)\,ds \right)$$

Zde $u(t)$ resp. $v(t)$ jsou libovolná netriviální řešení (1), splňující (2a) resp. (2b), a $c = p(uv' - u'v)$ je konstanta z Lemmatu 17.4.

Greenův operátor. Nechť $\lambda \neq \lambda_k$ je pevné. Potom ve smyslu předchozího definujeme operátor $\mathscr{G}_\lambda : h(t) \mapsto w(t)$. Lze psát:

$$w(t) = \int_a^b G_\lambda(t,s)h(s)r(s)\,ds, \qquad t \in [a,b], \tag{8}$$

kde

$$G_\lambda(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{c}v(t)u(s), & s < t, \\ \frac{1}{c}v(s)u(t), & s > t. \end{cases} \tag{9}$$

Terminologie: $\mathscr{G}_\lambda : L^2_r(a,b) \to \mathscr{D}(\mathscr{L})$ nazýváme *Greenův operátor* operátor úlohy (7), (2a), (2b). Je ovšem $\mathscr{G}_\lambda = (\mathscr{L} + \lambda r)^{-1}$, neboli *resolventa* $\mathscr{L}$.

Lemma 17.6. Operátor $\mathscr{G}_\lambda$ je kompaktní (na $L^2_r(a,b)$), symetrický, a $\mathscr{G}_\lambda(u_k) = \frac{u_k}{\lambda - \lambda_k}$ pro každé $\lambda \neq \lambda_k$.

Lemma 17.7. Je dáno $h \in L^2_r(a,b)$. Úloha

$$\big(p(t)x'\big)' + (\lambda_k r(t) + q(t))x = r(t)h(t), \tag{10}$$

spolu s okrajovými podmínkami (2a), (2b) má řešení, právě když $\langle h, u_k\rangle_r = 0$. Za tohoto předpokladu mají všechna její řešení tvar $\alpha u_k + w$, kde

$$w(t) = \frac{1}{c}\left(v(t)\int_a^t u_k(s)h(s)r(s)\,ds + u_k(t)\int_t^b v(s)h(s)r(s)\,ds \right); \tag{11}$$

zde v je nějaké řešení (10) s nulovou pravou stranou (s libovolnými okrajovými podmínkami), lineárně nezávislé od u_k, a konstanta $c = p(u_k v' - u_k' v)$ pochází z Lemmatu 17.4.

Poznámka. V řeči FA jsme dokázali: $\mathscr{L} + \lambda r$ je prostý, právě když je „na". Obecněji $\operatorname{Rng}(\mathscr{L} + \lambda r) = \big(\operatorname{Ker}(\mathscr{L} + \lambda r)\big)^\perp$, OG doplněk v prostoru $L^2_r(a,b)$. Zbývá: funkce u_k tvoří *úplnou* bázi $L^2_r(a,b)$, což je ekvivalentní tvrzení, že $S = \{0\}$, kde

$$S = \big\{ h \in L^2_r(a,b);\ \langle h, u_k\rangle_r = 0,\ \forall k = 1,2,\dots \big\} \tag{12}$$

Tvrzení z FA. Nechť H je Hilbertův prostor, nechť $T : H \to H$ je kompaktní, symetrický a $T \neq 0$. Pak T má aspoň jedno nenulové vlastní číslo.

Lemma 17.8. Zvolme $\lambda \neq \lambda_k$, $\forall k$. Potom $\mathscr{G}_\lambda(S) \subset S$ a je-li $S \neq \{0\}$, pak $\mathscr{G}_\lambda \neq 0$ na S.

18. Optimální regulace

V této kapitole studujeme rovnice tvaru

$$x' = f(x,u), \qquad x(0) = x_0 \tag{1}$$

kde $f(x,u) : \Omega \times U \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ a $u = u(t)$ je *přípustná regulace*, tj. prvek

$$\mathcal{U} = \{u : [0,T] \to U;\ u \text{ je měřitelná } \}$$

Je obvyklé (ačkoliv teorie to nevyžaduje), že $m < n$, tj. dimenze regulace je menší než dimenze celého systému. Typické problémy:

1. pro jaká x_0, $t > 0$ existuje $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ tak, že $x(t) = 0$ (regulovatelnost)?
2. táž otázka, navíc pro minimální t (časově optimální regulace)
3. obecněji: najít $u(\cdot)$ takové, aby funkcionál

   $$P[u(\cdot)] = g(x(t)) + \int_0^t r(x(s), u(s))\, ds$$

   byl maximální. Varianty: $t > 0$ libovolné, předepsaná koncová podmínka na $x(t)$ (Mayerův problém); nebo $t = T$ pevně dané, zatímco $x(T)$ není určeno (Bolzův problém).

18. I. Lineární úloha – regulovatelnost, pozorovatelnost.

Uvažujeme nejprve lineární problém

$$\begin{aligned} x' = Ax + Bu, \qquad x(0) = x_0, \\ u(\cdot) \in \mathcal{U} = L^\infty(0,T;\mathbb{R}^m). \end{aligned} \tag{2}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ jsou matice. Z (Carathéodoryho) teorie plyne, že pro každé $u(\cdot)$ existuje jediné řešení, dané navíc vzorečkem (variace konstant)

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s)\, ds\,.$$

Definice. Řekneme, že regulace $u(\cdot)$ přivádí počáteční stav x_0 do 0 v čase t, jestliže příslušné řešení splňuje $x(t) = 0$. Značíme $x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} 0$. Množinu

$$\mathcal{R}(t) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n;\ \exists u(\cdot) \in \mathcal{U} \text{ t.ž. } x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} 0\}$$

nazýváme *oblastí regulovatelnosti* v čase t.

Klíčové pozorování. Z předchozí formule plyne, že pro úlohu (2) nastává $x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} 0$, právě když

$$x_0 = -\int_0^t e^{-sA} Bu(s)\, ds\,. \tag{KP}$$

Definice. Kalmanovou maticí rozumíme matici typu $n \times mn$

$$\mathcal{K}(A, B) = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)$$

Lemma 18.1. Pro každé $l \geq 0$ celé je $A^l \in \mathrm{Lin}\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$.

Věta 18.1. Pro úlohu (2) je pro $t > 0$ libovolné $\mathcal{R}(t) = \mathrm{Lin}\{g_1, \dots, g_{mn}\}$, kde $\{g_j\}$ jsou sloupce Kalmanovy matice $\mathcal{K}(A, B)$.

Důsledek. Úloha (2) je (globálně) regulovatelná (tj. $\mathcal{R}(t) = \mathbb{R}^n$ pro každé $t > 0$), právě když $\mathcal{K}(A, B)$ má hodnost n.

Definice. Systém

$$\begin{aligned} x' &= Ax, \quad x(0) = x_0, \\ y &= Bx \end{aligned} \tag{3}$$

se nazve pozorovatelný (skrze veličinu $y = Bx$), jestliže platí: jsou-li x_1, x_2 řešení, pro která $Bx_1 \equiv Bx_2$ na nějakém netriviálním intervalu $[0, t]$, pak už nutně $x_1(0) = x_2(0)$.

Věta 18.2. Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jsou dány. Potom je ekvivalentní:

1. systém (3) je pozorovatelný skrze $y = Bx$
2. systém $x' = A^T x + B^T u$ je globálně regulovatelný
3. hodnost $\mathcal{K}(A^T, B^T)$ je n

Poznámka. Předchozí věta tvrdí, že „pozorovatelnost" a „regulovatelnost" jsou v určitém smyslu duální pojmy. Následující věta je typickým příkladem *principu linearizace*: řešitelnost lineární úlohy implikuje lokální řešitelnost (hladké) nelineární úlohy.

Věta 18.3. [O lokální regulovatelnosti.] Nechť $f(0, 0) = 0$, $f(x, u)$ je C^1 na okolí $(0, 0)$ a nechť U (tj. obor hodnot přípustných regulací) obsahuje okolí 0. Nechť linearizovaná úloha, tj. (2) pro $A = \nabla_x f(0, 0)$, $B = \nabla_u f(0, 0)$ je globálně regulovatelná.
Pak úloha (1) je lokálně regulovatelná (tj. pro každé $t > 0$ obsahuje $\mathcal{R}(t)$ okolí nuly).

18. II. Zpětná vazba, stabilizovatelnost.

Ptejme se, zda lze regulaci volit automaticky, tj. ve formě zpětné vazby $u = F(x)$. Takový systém určitě nebude regulovatelný v konečném čase (to by odporovalo jednoznačnosti řešení); může však být (asymptoticky) stabilní.
Odpověď je opět skryta v Kalmanově matici a dostaneme opět výsledek globální pro lineární problém a výsledek lokální pro hladký, nelineární problém.

Lemma 18.2. Matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-2} & \beta_{n-1} \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom $p(\lambda) = \lambda^n - \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \lambda^j$. Speciálně: volbou β_j lze docílit libovolného tvaru spektra $\sigma(A)$.

Věta 18.4. Je-li systém $x' = Ax + Bu$ regulovatelný, pak existuje $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ takové, že $\sigma(A + BF) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, kde $\lambda_j \in \mathbb{R}$ jsou dána libovolně. Speciálně, lineární zpětnou vazbou tvaru $u = Fx$ lze zaručit (exponenciální) asymptotickou stabilitu.

Věta 18.5. Nechť jsou splněny předpoklady Věty 18.3. Pak existuje $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ takové, že systém $x' = f(x, Fx)$ je v počátku lokálně asymptoticky stabilní.

18. III. Časově optimální regulace lineární úlohy.

Nyní se budeme zabývat opět lineární úlohou, leč pouze s omezenými hodnotami přípustné regulace:

$$\begin{gathered} x' = Ax + Bu, \qquad x(0) = x_0, \\ u(\cdot) \in \mathcal{U} = \{u : [0, T] \to [-1, 1]^m;\ \text{měřitelné}\ \} \end{gathered} \tag{4}$$

kde opět $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ jsou matice. Symboly $x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} 0$ a $\mathcal{R}(t)$ mají týž význam jako v sekci I výše a ovšem platí klíčové pozorování (KP). Zaměříme se na problém časově optimální regulace. Budeme potřebovat dva hlubší výsledky z FA:

Tvrzení 1. [Banach-Alaoglu.] Množina přípustných regulací v (4) je $*$-slabě sekvenciálně kompaktní v $L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$. Tj. pro každou posloupnost $\{u_n\} \subset \mathcal{U}$ existuje podposloupnost $\{\tilde{u}_n\}$ a funkce $u \in \mathcal{U}$ taková, že $\tilde{u}_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ v $L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$, tj.

$$\int_0^T M(t) \cdot \tilde{u}_n(t)\, dt \to \int_0^T M(t) \cdot u(t)\, dt$$

pro libovolnou pevnou funkci $M(t) \in L^1(0, T; \mathbb{R}^m)$.

Poznámka. Z formule variace konstant si snadno rozmyslíme, že konvergence $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ implikuje $x_n(t) \to x(t)$ pro příslušná řešení bodově v $[0, T]$.

Tvrzení 2. [Krein-Milman.] Je-li K kompaktní, konvexní, neprázdná podmnožina lokálně konvexního topologického prostoru X, pak $K = \overline{\mathrm{co}}(\operatorname{ext} K)$, kde $\operatorname{ext} K$ jsou extremální body K. Speciálně K obsahuje extremální bod.
Bod $a \in K$ se nazve extremální, jestliže neexistují $x, y \in K$ takové, že $x \neq y$ a $a = (x + y)/2$. Ekvivalentně: a je extremální v K, právě když $K \setminus \{a\}$ je konvexní. Symbolem $\overline{\mathrm{co}}(M)$ rozumíme uzávěr konvexního obalu M.

Věta 18.6. Je dána úloha (4). Potom pro každé $t > 0$ je $\mathcal{R}(t)$ konvexní, symetrická, uzavřená, a $\mathcal{R}(t_1) \subset \mathcal{R}(t_2)$ pro $t_1 < t_2$.

Důsledek. Oblast globální regulovatelnost $\mathcal{R} := \bigcup_{t>0} \mathcal{R}(t)$ je konvexní a symetrická.

Věta 18.7. Nechť $\mathcal{K}(A, B)$ má hodnost n a nechť $\operatorname{Re} \lambda \le 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$. Potom $\bigcup_{t>0} \mathcal{R}(t) = \mathbb{R}^n$.

Poznámka. Je-li dokonce $\operatorname{Re} \sigma(A) < 0$, plyne předchozí věta snadno z Věty 18.3 (o lokální regulovatelnosti).

Definice. Řekneme, že $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ je regulace typu *bang-bang*, jestliže $u_i(t) = \pm 1$ pro s.v. t, pro všechna $i = 1, \dots, n$. Jinými slovy, $u(t)$ se skoro stále nachází v některém z rohů krychle $[-1, 1]^m$ přípustných hodnot.

Věta 18.8. [Princip bang-bang.] Nechť $x_0 \in \mathcal{R}(t)$. Pak existuje $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ typu bang-bang taková, že $x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} 0$.

Poznámka. V důkazu se užila jen existence extremálního bodu. Plně znění Krein-Milmanovy věty implikuje, že libovolná regulace lze $*$-slabě aproximovat (konečnou) konvexní kombinací regulací typu bang-bang (a tedy každé řešení lze aproximovat řešeními, poháněnými konečnou konvexní kombinací regulací typu bang-bang).

Věta 18.9. Nechť $x_0 \in \bigcup_{t>0} \mathcal{R}(t)$. Pak existuje t^* a $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$ taková, že $x_0 \xrightarrow[u^*(\cdot)]{t^*} 0$, přičemž čas t^* je nejmenší možný, tj. $x_0 \notin \bigcup_{t<t^*} \mathcal{R}(t)$.

Důsledek. (Vět 18.8. a 18.9.) Je-li $x_0 \in \bigcup_{t>0} \mathcal{R}(t)$, existuje časově optimální $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$ typu bang-bang taková, že $x_0 \xrightarrow[u^*(\cdot)]{t^*} 0$.

Věta 18.10. [Pontrjaginův princip maxima.] Nechť $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$, $x_0 \xrightarrow[u^*(\cdot)]{t^*} 0$, kde t^* je optimální čas. Pak existuje $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ takové, že

$$h \cdot e^{-sA} B u^*(s) = \max_{\eta \in [-1,1]^m} h \cdot e^{-sA} B \eta, \qquad \text{pro s.v. } t \in [0, t^*]. \tag{5}$$

Poznámka. Uvedená věta je typickým příkladem nutné podmínky extrému: na první pohled není zřejmé, proč platí, ani k čemu je užitečná. V konkrétních příkladech však zpravidla vede k identifikaci jednoho či několika málo kandidátů na extrém, mezi nimiž už snadno rozhodneme.

18. IV. Pontrjaginův princip – obecná verze.

Závěrem budeme uvažovat obecnou optimalizační úlohu

$$\begin{gathered} x' = f(x,u), \qquad x(0) = x_0 \\ u(\cdot) \in \mathcal{U} = \{u : [0,T] \to U \text{ měřitelné }\} \\ P[u(\cdot)] = g(x(t)) + \int_0^T r(x(s), u(s))\, ds \end{gathered} \tag{6}$$

Cílem je najít $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ takové, že hodnota funkcionálu $P[u(\cdot)]$ je maximální. V zadání úlohy je $T > 0$ dáno pevně, na hodnotu $x(T)$ neklademe žádné podmínky (tzv. Bolzův problém).

Věta 18.11. [Pontrjaginův princip – Bolzův problém.] Nechť $u^*(t) \in \mathcal{U}$ je lokální maximum úlohy (6); nechť $x^*(t)$ je příslušné řešení a nechť funkce $f = f(x,u)$, $r = r(x,u)$ a $g = g(x)$ jsou C^1 na okolí grafů $x^*(t)$, $u^*(t)$.
Potom pro s.v. $t \in [0,T]$ je

$$H(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) = \max_{\eta \in U} H(x^*(t), p^*(t), \eta) \tag{7}$$

kde

$$H(x,p,u) = p^T f(x,u) + r(x,u) \tag{8}$$

je tzv. *Hamiltonián* a $p^*(t) \in \mathbb{R}^n$ je řešení *adjungované úlohy*

$$\left(p^T\right)' = -\nabla_x H(x^*, p, u^*) \tag{9}$$

s koncovou podmínkou

$$p^T(T) = \nabla_x g(x^*(T)) \tag{10}$$

Poznámka. Adjungovaná rovnice (9) po složkách

$$p_i' = -\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x^*(t), u^*(t)) - \frac{\partial r}{\partial x_i}(x^*(t), u^*(t)), \qquad p_i(T) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x(T)).$$

To je lineární rovnice a má tedy – pro daná $x^*(t)$, $u^*(t)$ – jediné (AC) řešení.

Lemma 18.3. Nechť $z' = A(t)z$, nechť $(p^T)' = -p^T A(t)$. Potom $p \cdot z$ je konstantní.

19. Bifurkace

Definice. [Bifurkace – verze ODR.] Bod (x_0, μ_0) se nazve *regulární bod* rovnice

$$x' = f(x, \mu), \tag{1}$$

jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro $|\mu - \mu_0| < \delta$ jsou příslušné dynamické systémy na jistém okolí x_0 navzájem topologicky konjugované. Bod (x_0, μ_0) se nazve *bodem bifurkace*, pokud není regulární. Proměnnou μ (zde jen z $\mathbb{R}$) nazýváme bifurkační parametr.

Poznámky. Bod bifurkace ODR je nutně stacionární (Věta 13.3 o rektifikaci), nehyperbolický (VOIF, Rouchého věta, Hartman-Grobmanova věta, …).

Lemma 19.1. [O vydělení.] Nechť $h(x, \lambda)$ je C^k, kde $k \geq 1$, a nechť $h(0, \lambda) = 0$, na nějakém okolí $(0, 0)$. Potom existuje $H(x, \lambda)$ třídy C^{k-1} takové, že $h(x, \lambda) = xH(x, \lambda)$ na témže okolí $(0, 0)$. Navíc platí:

$$H(0,0) = \partial_x h(0,0), \qquad \partial_x H(0,0) = \frac{1}{2}\partial^2_{xx} h(0,0),$$
$$\partial_\lambda H(0,0) = \partial^2_{x\lambda} h(0,0), \qquad \partial^2_{xx} H(0,0) = \frac{1}{3}\partial^3_{xxx} h(0,0), \quad \text{atd.}$$

Věta 19.1. Nechť $f(x, \mu)$ je C^2 na okolí $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Nechť $f(0, 0) = 0$, $f_x(0, 0) = 0$, nechť $f_\mu(0, 0) \neq 0$, $f_{xx}(0, 0) \neq 0$. Potom rovnice

$$x' = f(x, \mu) \tag{2}$$

má v bodě $(0, 0)$ bifurkaci typu „sedlo-uzel".

Věta 19.2. Nechť $f(x, \mu)$ je C^2 na okolí $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Nechť $f(0, 0) = 0$, $f_x(0, 0) = 0$; dále nechť $f(0, \mu) = 0$ pro μ v okolí 0 (tedy též $f_\mu(0, 0) = 0$). Nechť $f_{\mu x}(0, 0) \neq 0$, $f_{xx}(0, 0) \neq 0$. Potom rovnice (2) má v bodě $(0, 0)$ „transkritickou" bifurkaci.

Věta 19.3. Nechť $f(x, \mu)$ je C^3 na okolí $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Nechť $f(0, 0) = 0$, $f_x(0, 0) = 0$; dále nechť $f(0, \mu) = 0$ pro μ v okolí 0 (tedy též $f_\mu(0, 0) = 0$) a nechť $f_{xx}(0, 0) = 0$. Konečně nechť $f_{\mu x}(0, 0) \neq 0$ a $f_{xxx}(0, 0) \neq 0$. Potom rovnice (2) má v bodě $(0, 0)$ „vidličkovou" bifurkaci.

Definice. [Bifurkace – abstraktní verze.] Nechť $F(u, \lambda) : X \times \mathbb{R} \to Y$, kde X, Y jsou (reálné) Banachovy prostory. Nechť $F(0, \lambda) = 0$ pro λ v okolí λ_0. Bod $(0, \lambda_0)$ se nazve *bodem bifurkace*, jestliže každé okolí $(0, \lambda_0)$ obsahuje *netriviální* (tj. s $u \neq 0$) řešení rovnice

$$F(u, \lambda) = 0 \tag{3}$$

Věta 19.4. [Hopfova bifurkace v $\mathbb{R}^2$.] Je dána soustava

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x,y,\mu) \\ g(x,y,\mu) \end{pmatrix} \tag{4}$$

kde f, g, $\nabla_{x,y} f$, $\nabla_{x,y} g$ jsou hladké v okolí počátku a rovné nule v bodech $(0,0,\mu)$. Nechť A_μ je reálná matice 2×2, závisející hladce na μ taková, že (klíčový předpoklad)

$$\sigma(A_\mu) = \{\alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)\}$$
$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha'(0) \neq 0, \quad \omega(0) \neq 0$$

Pak v (libovolném) okolí počátku existují (netriviální) periodická řešení. Podrobněji: existuje $\delta > 0$ t.ž. pro každé $a \in (0,\delta)$ existuje $\mu = \mu(a)$ takové, že soustava má periodické řešení, procházející bodem $(x,y) = (a,0)$.

20. Stabilní, nestabilní a centrální varieta.

Problém. Budeme se nejprve zabývat pomocnou soustavou

$$\begin{aligned} x' &= Ax + f(x,y) \\ y' &= By + g(x,y) \end{aligned} \tag{1}$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $f = g = 0$ v bodě $(0,0)$.

Předpoklady. Pro jistá kladná ε, c_0, β, ρ a σ platí :

- $\operatorname{Re}\sigma(A) \geq -\varepsilon$ ($\iff$ $x \cdot Ax \geq -\varepsilon|x|^2$)
- $\operatorname{Re}\sigma(B) \leq -\beta$ ($\iff$ $\|e^{tB}\| \leq c_0 e^{-t\beta}$, $t \geq 0$)
- $|f|$, $|g| \leq \rho$ všude v $\mathbb{R}^{n+m}$
- $\operatorname{Lip} f$, $\operatorname{Lip} g \leq \sigma$ všude v $\mathbb{R}^{n+m}$

Cíl. Hledáme invariantní varietu; podrobněji hledáme $\Phi \in \mathcal{X}$, kde

$$\mathcal{X} = \{\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m;\ \Phi(0) = 0,\ |\Phi| \leq b,\ \operatorname{Lip}\Phi \leq \ell\ \}$$

s vlastností

$$(x(t),y(t)) \text{ řeší (1)},\ y(0) = \Phi(x(0)) \quad\Longrightarrow\quad y(t) = \Phi(x(t)),\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{INV}$$

Značení. Rovnici

$$p' = Ap + f(p,\Phi(p)) \tag{2}$$

kde $\Phi \in \mathcal{X}$, nazýváme *redukovanou rovnicí.* Poznamenejme, že díky (globální) lipschitzovskosti f, g, Φ je zaručena globální existence a jednoznačnost řešení (1), (2).

Lemma 20.1. $\Phi \in \mathcal{X}$ má vlastnost (INV), právě když má vlastnost

$$p(t) \text{ řeší (2)} \quad\Longrightarrow\quad (x(t),y(t)) := (p(t),\Phi(p(t))) \text{ řeší (1)} \tag{RED}$$

Lemma 20.2. Nechť matice B splňuje výše uvedené předpoklady, nechť $\gamma(t)$ je spojitá, omezená na $(-\infty, 0]$. Pak existuje právě jedno řešení rovnice $y' = By + \gamma(t)$, omezené pro $t \to -\infty$. Toto řešení je určeno počáteční podmínkou

$$y(0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB}\gamma(s)ds$$

Lemma 20.3. $\Phi \in \mathcal{X}$ má vlastnost (INV), právě když má vlastnost

$$\Phi(p_0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} g(p(s), \Phi(p(s)))ds, \qquad \forall p_0 \in \mathbb{R}^n \tag{PB}$$

kde $p(\cdot)$ na pravé straně je řešení (2) s počáteční podmínkou $p(0) = p_0$.

Věta 20.1. Nechť výše zavedené konstanty splňují:

$$\frac{c_0\rho}{\beta} \leq b \qquad \frac{c_0\sigma(1+\ell)}{\beta - \varepsilon - \sigma(1+\ell)} \leq \ell \qquad c_0\sigma\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1+\ell}{\beta - \varepsilon - \sigma(2+\ell)}\right) < 1$$

Pak existuje právě jedno $\Phi \in \mathcal{X}$, splňující (INV).

Poznámka. Podmínky předchozí věty lze splnit typicky takto: konstanty β, c_0 a ε, vyjadřující vlastnosti matic A, B, jsou dány a platí $\beta > 0$, $\beta > \varepsilon$ (dokonce ε může být i záporné.) Konstanty b, ℓ, definující $\mathcal{X}$, zvolím libovolně. Pak pro dosti malé ρ, σ (což jsou konstanty, kontrolující nelinearity f, g) jsou uvedené podmínky splněny.

Dodatek o hladkosti. Jsou-li f, g třídy C^1, lze nalézt Φ též třídy C^1. Platí obecněji pro $k \geq 1$; neplatí ve třídě C^∞ a ani ve třídě analytických funkcí.

Dodatek o tečně. Je-li $\nabla g(0,0) = 0$, splňuje nalezené Φ navíc $\nabla\Phi(0) = 0$.

Aplikace 1. Uvažujme systém

$$X' = MX + F(X) \tag{3}$$

kde F je C^1 na okolí 0, $F(0) = 0$, $\nabla F(0) = 0$. Předpokládejme dále, že spektrum M se nachází částečně v polorovině $\{\mathrm{Re} < 0\}$, částečně na imaginární ose $\{\mathrm{Re} = 0\}$. Jde tedy o nehyperbolický stacionární bod a zároveň je to případ, kdy stabilitu *nelze určit* pouze z lineární části rovnice M – členy vyššího řádu F zde mají též slovo.
Vhodnou lineární transformací lze systém převést na tvar (1), kde $\mathrm{Re}\,\sigma(A) = 0$ („centrální směry“), $\mathrm{Re}\,\sigma(B) \leq -\beta$ („stabilní směry“), pro vhodné $\beta > 0$.
Nelinearitu seřízneme takto : $\theta(X)$ budiž C^1 funkce taková, že $\theta(X) = X$ pro $|X| < 1$, $\theta(X) = 2X/|X|$ pro $|X| > 2$, a platí $|\nabla\theta(X)| \leq 2$. Potom funkce $F_r(X) = F(r\theta(X/r))$ je globálně C^1, rovná se F na r-okolí 0, a pro F_r, ∇F_r platí globální odhady, libovolně malé.
Dle Věty 20.1 obdržená varieta je invariantní pro původní systém ovšem pouze v příslušném r-okolí bodu $(0,0)$. Jde o tzv. *lokální centrální varietu.* Ta obecně není určena jednoznačně (což není ve sporu s jednoznačností ve Větě 20.1, která se aplikuje až po blíže neurčeném seříznutí). Viz však Důsledek za Větou 20.3.

Aplikace 2. Týž postup lze použít v případě, že $\mathrm{Re}\,\sigma(B) < 0$, avšak $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$. Pak jde o tzv. *lokální nestabilní varietu*, tečnou k příslušným nestabilním směrům x. V tomto případě (hyperbolický bod!) můžeme dále „otočit čas“ a sestrojíme varietu tečnou ke směrům y, tj. *lokální stabilní varietu.* Stabilní a nestabilní varieta je (lokálně) určena jednoznačně – lze je charakterizovat jako ty body, které jdou k počátku pro $t \to \pm\infty$ a zároveň neopustí (libovolně malé) jeho okolí.

Poznámky. V dalším se budeme věnovat situaci, popsané v Aplikaci 1. Ukážeme si, že stabilita celého systému (1) je ekvivalentní stabilitě redukované rovnice (2) („princip redukce stability"). Ukážeme si dále metodu aproximace c.v., která je zvláště šikovná v aplikacích : c.v. totiž obvykle neumíme explicitně spočítat.

Značení. Pro nějaké pevné $\mu > 0$ definujeme „kužel" a jeho „stín" (= uzávěr doplňku)

$$\mathcal{K} = \big\{X = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m};\ |y| \le \mu|x|\big\}$$
$$\mathcal{V} = \big\{X = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m};\ |y| \ge \mu|x|\big\}$$

obecněji $\mathcal{K}(X_0) = \{\tilde{X};\ \tilde{X} - X_0 \in \mathcal{K}\}$, $\mathcal{V}(X_0) = \{\tilde{X};\ \tilde{X} - X_0 \in \mathcal{V}\}$.

Lemma 20.4. Pro vhodnou volbu $\mu > 0$ a konstant ve Větě 20.1 platí:

1. pozitivní kuželová invariance: jsou-li X_1, X_2 řešení soustavy (1) a $X_1(0) \in \mathcal{K}(X_2(0))$, pak $X_1(t) \in \mathcal{K}(X_2(t))$ pro všechna $t \ge 0$

2. exponenciální stabilita stínu: jsou-li X_1, X_2 řešení soustavy (1) a $X_1(t) \in \mathcal{V}(X_2(t))$ na intervalu I, pak se na tomto intervalu řešení exponenciálně přibližují; přesněji řečeno : $|X_1(t) - X_2(t)| \le e^{-\gamma(t-s)}|X_1(s) - X_2(s)|$ pro všechna $s < t \in I$

Věta 20.2. Nechť jsou splněny předpoklady Lemmatu 20.4, nechť navíc $\mu > \ell$. Potom c.v. má vlastnost „asymptotické úplnosti" (též „stopovací vlastnost" neboli "tracking property"): pro libovolné $X(t)$ řešení (1) existuje řešení $P(t)$, ležící na c.v. takové, že $X(t) - P(t)$ jde exponenciálně do nuly. Navíc: je-li $X(0)$ blízko počátku, lze volit $P(0)$ též blízko počátku.

Důsledek. (Princip redukce stability.) Nechť 0 je stabilní (resp. asymptoticky stabilní, resp. nestabilní) pro redukovanou rovnici (2). Potom 0 má stejnou vlastnost pro původní systém (1).

Pozorování. V Lemmatech 20.1. a 20.3. jsme viděli, že vlastnost (INV) invariance variety je ekvivalentní vlastnostem (RED) resp. (PB). Další ekvivalentní formulace je následující: nechť $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je C^1. Potom Φ má vlastnost (INV), právě když $M\Phi(x) = 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}^n$, kde

$$M\Phi(x) = \nabla\Phi(x)\big[Ax + f(x, \Phi(x))\big] - B\Phi(x) - g(x, \Phi(x)) \tag{DR}$$

Nejde vlastně o nic jiného než „orbitální derivaci" funkce $\Phi(x) - y$ podél řešení (1).

Věta 20.3. [Aproximace c.v.] Nechť jsou splněny předpoklady Věty 20.1, nechť $\Phi(x) \in \mathcal{X}$ je příslušná c.v. Dále nechť $\Psi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je C^1 funkce, splňující $\Psi(0) = 0$, $\nabla\Psi(0) = 0$ a

$$M\Psi(x) = \mathcal{O}(|x|^q), \qquad |x| \to 0, \tag{4}$$

pro nějaké $q > 1$. Pak $\Phi(x) - \Psi(x) = \mathcal{O}(|x|^q)$, $|x| \to 0$.

Důsledek. [„Asymptotická jednoznačnost c.v."] Jsou-li $\Phi(x)$, $\tilde{\Phi}(x)$ (lokální) C^1 c.v., pak $\Phi(x) - \tilde{\Phi}(x) = \mathcal{O}(|x|^q)$, $|x| \to 0$ platí pro *libovolné* $q > 1$.

Poznámka. Dle výše uvedeného pozorování je nalezení c.v. ekvivalentní vyřešení rovnice $M\Phi = 0$. To obecně neumíme – jedná se systém o m rovnic v proměnné $x \in \mathbb{R}^n$, který navíc degeneruje (obecně nelze vyjádřit derivace Φ) v okolí počátku.

Můžeme však ,,uhodnout“ přibližné řešení Ψ tak, aby q v (4) bylo co největší; dle Věty 20.3. tak máme odpovídající aproximaci c.v. a tudíž i aproximaci redukované rovnice (2), jejíž chování (stabilitu, bifurkace) můžeme tak vyšetřit. S ohledem na Větu 20.2 se nalezené výsledky snadno rozšíří na celý systém (1).