Carathéodoryho teorie ODR

Dalibor Pražák, 09/2014

0. Absolutně spojité funkce

V celém textu I je interval libovolného typu.

Definice 1. *Funkce $x : I \to \mathbb{R}^n$ se nazve absolutně spojitá, značíme $x \in AC(I)$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolné* disjunktní *intervaly $(a_i, b_i) \subset I$ platí*

$$\sum_i |a_i - b_i| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_i |f(a_i) - f(b_i)| < \varepsilon \tag{1}$$

Funkce x se nazve *lokálně absolutně spojitá*, značíme $x \in AC_{\text{loc}}(I)$, jestliže $x \in AC(J)$ pro každý kompaktní interval $J \subset I$.

Tvrzení 1. *Nechť $x \in AC(I)$. Potom x' je definována skoro všude v I, náleží do $L^1(I)$ a $x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} x'(s)\,ds$ pro všechna t_1, $t_2 \in I$.*

Tvrzení 2. *Nechť $h \in L^1(I)$, $t_0 \in I$. Potom funkce $x(t) := \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds$ náleží do $AC(I)$; navíc $x' = h$ skoro všude.*

1. Carathéodoryho řešení

V celém textu $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina s body $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $U = U(x_0, \delta)$ je koule v $\mathbb{R}^n$, $Q(t_0, x_0) = Q(t_0, x_0; \delta, \Delta)$ je válec $U(t_0, \delta) \times U(x_0, \Delta)$ v $\mathbb{R}^{n+1}$. Pro funkce $x = x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ značíme graf $x = \{(t, x(t)); t \in I\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definice 2. *Řekneme, že funkce $f(t, x) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ splňuje Carathéodoryho podmínky, značíme $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$, jestliže pro každé $(t_0, x_0) \in \Omega$ existuje válec $Q(t_0, x_0; \delta, \Delta) \subset \Omega$ a funkce $m \in L^1(U(t_0, \delta))$ tak, že*

(i) pro každé $x \in U(x_0, \Delta)$ je funkce $f(\cdot, x)$ měřitelná v $U(t_0, \delta)$

(ii) pro skoro každé $t \in U(t_0, \delta)$ je funkce $f(t, \cdot)$ spojitá v $U(x_0, \Delta)$

(iii) $|f(t, x)| \le m(t)$ pro skoro všechna t pro všechna x v $Q(t_0, x_0; \delta, \Delta)$

Definice 3. *Nechť $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$. Funkce $x : I \to \mathbb{R}^n$ se nazývá řešením rovnice*

$$x' = f(t, x) \tag{2}$$

v Ω ve smyslu Carathéodoryho, jestliže graf $x \subset \Omega$, *$x \in AC_{\text{loc}}(I)$ a platí $x'(t) = f(t, x(t))$ pro skoro všechna $t \in I$.*

Lemma 3. *Nechť $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$, $x : I \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce a* graf $x \subset \Omega$. *Potom funkce $t \mapsto f(t, x(t))$ je v $L^1_{\text{loc}}(I)$.*

Důkaz. Lokální existence integrovatelné majoranty plyne z Carathéodoryho podmínky (iii) a spojitosti x. Dokazujeme měřitelnost: nechť x_n jsou po částech konstantní funkce takové, že $x_n \to x$. Potom funkce $f(\cdot, x_n(\cdot))$ jsou měřitelné a konvergují s.v. k $f(\cdot, x(\cdot))$ dle Carathéodoryho podmínek (i) respektive (ii). □

Lemma 4. *Nechť $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$, $x : I \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce a* $\operatorname{graf} x \subset \Omega$. *Potom x je řešením (2) ve smyslu Carathéodoryho, právě když*

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))\, ds \tag{3}$$

pro všechna t_1, $t_2 \in I$.

Důkaz. Díky Lemmatu 3 je pravá strana dobře definovaná pro všechna (konečná) t_1, t_2. Obě implikace plynou pak ihned z Tvrzení 1 a 2. □

Věta 5 (Peano)**.** *Nechť $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$, nechť $(t_0, x_0) \in \Omega$. Potom existuje x řešení (2) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$, definované na nějakém $I = U(t_0, \delta)$.*

Důkaz. V situaci Definice 2 označme $X = C([t_0 - \delta, t_0 + \delta]) \cap \{x(t_0) = x_0\} \cap \{\operatorname{graf} x \subset \overline{Q}(t_0, x_0; \delta, \Delta)\}$. Zřejmě X je neprázdná, konvexní a uzavřená podmnožina prostoru $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$. Definujme operátor $\mathcal{T} : x \mapsto \hat{x}$ předpisem

$$\hat{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \qquad t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \tag{4}$$

Potřebujeme zaručit, aby $\mathcal{T}(X) \subset X$, z čehož nezřejmý je pouze požadavek na $\operatorname{graf} \hat{x}$, a k tomu účelu stačí případně zmenšit $\delta > 0$ tak, aby $\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} m(t)\, dt < \Delta$.
Funkce z $\mathcal{T}(X)$ jsou stejně omezené a díky majorizaci $|\hat{x}(t_1) - \hat{x}(t_2)| \le \int_{t_1}^{t_2} m(t)\, ds$ i stejně spojité. Podle Arzelo-Ascoliovy věty je $\mathcal{T}(X)$ relativně kompaktní v X a konečně podle Schauderovy věty zde má $\mathcal{T}$ alespoň jeden pevný bod, což je díky Lemmatu 4 hledané řešení. □

2. Zobecněná Picardova věta

Věta 6 (Zobecněná Banachova věta)**.** *Nechť Λ, X jsou metrické prostory, X je úplný a neprázdný. Nechť $\Phi : \Lambda \times X \to X$ je spojité vůči λ pro každé x pevné. Nechť (klíčový předpoklad „uniformní kontrakce“) existuje $\kappa \in (0, 1)$ takové, že*

$$\|\Phi(\lambda, x) - \Phi(\lambda, y)\|_X \le \kappa \|x - y\|_X \qquad \forall \lambda \in \Lambda,\ x,\ y \in X. \tag{5}$$

Potom

(i) pro každé $\lambda \in \Lambda$ existuje právě jedno $x(\lambda) \in X$ takové, že $\Phi(\lambda, x(\lambda)) = x(\lambda)$

(ii) zobrazení $\lambda \mapsto x(\lambda)$ je spojité

(iii) $\|y - x(\lambda)\|_X \le (1 - \kappa)^{-1} \|y - \Phi(\lambda, y)\|_X$ pro $\forall \lambda \in \Lambda$, $y \in X$

Důkaz. (i) Definujme funkce $x_n : \Lambda \to X$ jako $x_0(\lambda) \equiv y$, $x_{n+1}(\lambda) = \Phi(\lambda, x_n(\lambda))$, kde $y \in X$ je libovolné. Indukcí pro každé $n \ge 1$ plyne z (5)

$$\|x_n(\lambda) - x_{n-1}(\lambda)\|_X \le \kappa^{n-1} \|x_1(\lambda) - x_0(\lambda)\|_X = \kappa^{n-1} \|\Phi(\lambda, y) - y\|_X.$$

Odtud pro každé $m > n$

$$\begin{aligned} \|x_m(\lambda) - x_n(\lambda)\|_X &\le \sum_{j=n+1}^{m} \|x_j(\lambda) - x_{j-1}(\lambda)\|_X \le \sum_{j=n+1}^{\infty} \kappa^{j-1} \|\Phi(\lambda, y) - y\|_X \\ &= \frac{\kappa^n}{1 - \kappa} \|\Phi(\lambda, y) - y\|_X. \end{aligned} \tag{6}$$

Tedy posloupnost $x_n(\lambda)$ je (pro každé λ pevné) cauchyovská. Označme $x(\lambda)$ její limitu. Přechodem v definici $x_{n+1}(\lambda)$ plyne, že $x(\lambda)$ splňuje žádanou rovnici. Jednoznačnost je opět důsledkem (5). Speciálně $x(\lambda)$ nezávisí na výchozí volbě y.
(iii) Stačí volit $n = 0$ a $m \to \infty$ v (6).
(ii) Pro $y = x(\lambda_0)$ a $\lambda = \lambda_n$ dává již dokázaný bod (iii)

$$\|x(\lambda_0) - x(\lambda_n)\|_X \leq \frac{1}{1-\kappa}\|x(\lambda_0) - \Phi(\lambda_n, x(\lambda_0))\|_X = \frac{1}{1-\kappa}\|\Phi(\lambda_0, x(\lambda_0)) - \Phi(\lambda_n, x(\lambda_0))\|_X.$$

Tedy $\lambda_n \to \lambda_0$ implikuje $x(\lambda_n) \to x(\lambda_0)$ díky spojitosti Φ vůči λ. □

Věta 7 (Zobecněná Picardova věta)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je omezený interval, Π je metrický prostor a $f = f(t,x,p) : I \times \mathbb{R}^n \times \Pi \to \mathbb{R}^n$ splňuje následující:*

1. *$f(\cdot,\cdot,p) \in \mathrm{CAR}(I \times \mathbb{R}^n)$ pro každé $p \in \Pi$ pevné*
2. *existuje $m \in L^1(I)$ takové, že $|f(t,x,p) - f(t,y,p)| \leq m(t)|x-y|$ pro skoro všechna $t \in I$ pro všechna x, $y \in \mathbb{R}^n$, $p \in \Pi$*
3. *zobrazení $p \mapsto \int_{t_0}^t f(s,x(s),p)\,ds$ je spojité z Π do $C(I)$, pro libovolné pevné $t_0 \in I$ a $x \in C(I)$*

Potom: pro každé $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ a $p_0 \in \Pi$ existuje právě jedno $x \in AC(I)$ řešení rovnice $x' = f(t,x,p_0)$, $x(t_0) = x_0$. Toto řešení závisí spojitě na x_0 a p_0 v následujícím smyslu: $x_{0n} \to x_0$ a $p_{0n} \to p_0$ implikuje $x_n \rightrightarrows x$ v I, kde x_n respektive x jsou řešení příslušná k x_{0n}, p_{0n} respektive k x_0, p_0.

Důkaz. Budiž $t_0 \in I$ pevné.[1] Aplikujeme Větu 6 na $\Lambda = \mathbb{R}^n \times \Pi$ a $X = C(I)$, kde Φ je zobrazení

$$(x_0, p_0, x(\cdot)) \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s), p_0)\,ds.$$

To je dle předpokladu spojité vůči (x_0, p_0) při pevném $x(\cdot)$. Klíčový předpoklad uniformní kontrakce (5) ověříme pro speciální volbu normy $\|x\|_X = \sup_{t\in I} |x(t)|e^{-L|t-t_0|}$, kde $L > 0$ upřesníme níže. Označme $\hat{x} = \Phi(x_0, p_0, x)$, $\hat{y} = \Phi(x_0, p_0, y)$. Potom

$$\begin{aligned} |\hat{x}(t) - \hat{y}(t)| &= \Big|\int_{t_0}^t f(s,x(s),p_0) - f(s,y(s),p_0)\,ds\Big| \leq \Big|\int_{t_0}^t m(s)|x(s)-y(s)|\,ds\Big| \\ &\leq \|x-y\|_X \Big|\int_{t_0}^t m(s)e^{L|s-t_0|}\,ds\Big|. \end{aligned}$$

□

Tedy $\|\hat{x} - \hat{y}\|_X \leq \kappa \|x-y\|_X$, kde

$$\kappa = \sup_{t\in I} \Big|\int_{t_0}^t m(s)e^{L(|s-t_0|-|t-t_0|)}\,ds\Big|.$$

V integrandu je s vždy mezi t_0 a t, tudíž

$$|s-t_0| - |t-t_0| = -|t-s| \leq 0.$$

[1] Volba normy níže závisí na tomto t_0. Není tedy jasné, zda můžeme t_0 též zahrnout do prostoru parametrů Λ. Dostal bych tak jednou ranou i spojitost vůči t_0.

Označme[2] $m_1(s) = m(s)\chi_{\{m>M\}}(s)$, $m_2(s) = m(s)\chi_{\{m\le M\}}(s)$. Díky Lebesgueově větě lze volit $M > 0$ tak velké, že $\int_I m_1 < 1/4$. Potom

$$\Big|\int_{t_0}^{t} m_1(s) e^{L(|s-t_0|-|t-t_0|)}\,ds\Big| \le \int_I m_1(s)\,ds < \frac{1}{4}.$$

Naproti tomu

$$\Big|\int_{t_0}^{t} m_2(s) e^{L(|s-t_0|-|t-t_0|)}\,ds\Big| \le M\int_I e^{-L|t-s|}\,ds \le 2M\int_0^\infty e^{-Ls'}\,ds' = \frac{2M}{L} < \frac{1}{4},$$

volíme-li $L > 8M$. Odsud $\kappa < 1/2$ a důkaz je hotov.

3. Maximální řešení

Definice 4. *Řešení $x : I \to \mathbb{R}^n$ rovnice (2) se nazývá maximální v Ω, jestliže nemá žádné netriviální prodloužení (tj. definované na striktně větším $\hat{I} \supset I$).*

Pokud $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$ a Ω je otevřená, pak řešení x lze prodloužit za koncový bod b intervalu I, právě když (i) $b < \infty$, (ii) existuje $\lim_{t\to b-} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ a (iii) $(b, x_0) \in \Omega$. Uvedené podmínky jsou zřejmě nutné. Že jsou postačující, plyne z lokální existence řešení a možnosti řešení nalepovat. Speciálně maximální řešení je vždy definováno na *otevřeném* intervalu.

Věta 8. *Každé řešení má alespoň jedno maximální prodloužení.*

Důkaz. Nechť $(x, (a, b))$ je řešení. Sestrojíme maximální *pravé* prodloužení rekurentním postupem takto: klademe $(x_0, (a, b_0)) = (x, (a, b))$ a jako $(x_{n+1}, (a, b_{n+1}))$ volíme vždy takové prodloužení, že $b_{n+1} > (b_n+\beta_n)/2$, kde β_n je supremum všech pravých krajních bodů možných prodloužení řešení $(x_n, (a, b_n))$. V případě, že $\beta_n = +\infty$, volíme $b_{n+1} > b_n + 1$.
Tvrdíme, že limitní řešení $(x, (a, \beta))$, kde $\beta = \lim_n b_n = \sup_n b_n$, je maximální. Sporem: netriviální prodloužení $(\tilde{x}, (a, \beta + \delta))$ je vždy i prodloužením $(x_n, (a, b_n))$ a tedy $\beta_n \ge \beta + \delta$; avšak pro b_n dosti blízké β se podmínky volby b_{n+1} dostávají do sporu s tím, že $b_{n+1} < \beta$. □

Poznámka. *Zádrhel konstrukce maximálního řešení spočívá v nutnosti vybírat pokračování v (potenciálně nespočetně) mnoha bodech větvení, což se standardně překonává pomocí Zornova lemmatu, tj. axiomu výběru. Uvedený důkaz vystačí se spočetnou verzí AC. Je-li zaručena jednoznačnost řešení, nepotřebujeme ani to, neboť množina všech prodloužení je už nutně řetězec (tj. lineárně uspořádaná).*

Věta 9 (O opuštění kompaktu)**.** *Nechť $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená, nechť (x, I) je maximální řešení rovnice (2) v Ω. Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní množina taková, že $(t_0, x(t_0)) \in K$ pro nějaké $t_0 \in I$. Potom existuje $t_1 > t_0$ v I takové, že $(t_1, x(t_1)) \notin K$ a podobně existuje $t_2 < t_0$ v I takové, že $(t_2, x(t_2)) \notin K$.*

Důkaz. Označme $I = (a, b)$ a předpokládejme pro spor, že graf $\tilde{x} = x_{[t_0,b)}$ leží v K. Funkce $\tilde{x}'$ je lokálně a tedy díky kompaktnosti K i globálně integrovatelná na omezeném intervalu $[t_0, b)$. Odtud $\tilde{x}$ má konečnou variaci a tudíž i vlastní limitu $x_0 = \tilde{x}(b-)$. Zřejmě $(b, x_0) \in \Omega$ a dle Poznámky za Definicí 4 lze $\tilde{x}$ prodloužit za bod b, což je spor. □

[2] χ_A je charakteristická funkce množiny A.

4. Jednoznačnost

Lemma 10 (Gronwall)**.** *Nechť $u \in C(I)$, $\rho \in L^1(I)$ jsou nezáporné a $t_0 \in I$, $c \geq 0$ takové, že platí:*

$$u(t) \leq c + \Big| \int_{t_0}^{t} \rho(s) u(s)\, ds \Big| \qquad \textit{pro všechna } t \in I. \tag{7}$$

Potom

$$u(t) \leq c \exp\Big(\Big| \int_{t_0}^{t} \rho(s)\, ds \Big| \Big) \qquad \textit{pro všechna } t \in I.$$

Důkaz. BÚNO se omezíme na $t \in I \cap [t_0, \infty)$, tj. absolutní hodnoty kolem integrálů lze vynechat. Označme pravou stranu (7) jako $\Phi(t)$. Potom

$$\Phi'(t) = \rho(t) u(t) \leq \rho(t) \Phi(t)$$

a rutinním výpočtem (integrační faktor – ovšem ve třídě AC funkcí) dostáváme $\Phi(t) \leq \Phi(0) \exp(\int_{t_0}^{t} \rho(s)\, ds)$, pro všechna $t \in I \cap [t_0, \infty)$. Protože $\Phi(0) = c$ a $u(t) \leq \Phi(t)$, je důkaz hotov. □

Lemma 11. *Nechť pro $v \in AC(I)$, $\rho \in L^1(I)$, $\rho \geq 0$, platí*

$$\big| v'(t) \big| \leq \rho(t) |v(t)| \qquad \textit{pro s.v. } t \in I. \tag{8}$$

Potom

$$|v(t)| \leq |v(t_0)| \exp\Big(\Big| \int_{t_0}^{t} \rho(s)\, ds \Big| \Big) \qquad \textit{pro všechna } t_0,\ t \in I. \tag{9}$$

Důkaz. Pro pevné $t_0 \in I$ máme (rovnost díky Tvrzení 1)

$$\begin{aligned} |v(t)| &\leq |v(t_0)| + |v(t) - v(t_0)| = |v(t_0)| + \Big| \int_{t_0}^{t} v'(s)\, ds \Big| \\ &\leq |v(t_0)| + \Big| \int_{t_0}^{t} \rho(s) |v(s)|\, ds \Big| \qquad \text{pro všechna } t \in I \end{aligned}$$

a stačí aplikovat Lemma 10 s $u(t) = |v(t)|$, $c = |v(t_0)|$. □

Definice 5. *Řekneme, že rovnice* (2) *má v Ω vlastnost* lokální jednoznačnosti*, jestliže pro každá dvě řešení (x, I), (y, J) v Ω, splňující $x(t_0) = y(t_0)$ pro nějaké $t_0 \in I \cap J$, existuje $\delta > 0$ takové, že $x = y$ na $I \cap J \cap U(t_0, \delta)$.*
Rovnice má vlastnost globální jednoznačnosti*, jestliže $x(t_0) = y(t_0)$ pro nějaké $t_0 \in I \cap J$ implikuje $x = y$ na celém $I \cap J$.*

Zřejmě globální jednoznačnost implikuje lokální jednoznačnost; pojmy jsou však ve skutečnosti *ekvivalentní*. Stačí uvážit, že množina $R = \{t \in I \cap J;\ x(t) = y(t)\}$ je uzavřená a otevřená (za předpokladu lokální jednoznačnosti) zároveň; tedy $R \neq \emptyset$ už implikuje $R = I \cap J$.

Definice 6. *Funkce $f(t, x) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ se nazve lokálně zobecněně Lipschitzovská vůči x, jestliže pro každé $(t_0, x_0) \in \Omega$ existuje válec $Q(t_0, x_0; \delta, \Delta) \subset \Omega$ a funkce $l \in L^1(U(t_0, \delta))$ tak, že $|f(t, x) - f(t, y)| \leq l(t)|x - y|$ pro skoro všechna t pro všechna x, y v $Q(t_0, x_0; \delta, \Delta)$.*

Věta 12. *Nechť $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$ je lokálně zobecněně Lipschitzovská vůči x. Potom rovnice* (2) *má v Ω vlastnost lokální (a tedy též globální) jednoznačnosti.*

Důkaz. Nechť (x, I), (y, J) jsou řešení a $x(t_0) = y(t_0) =: x_0$ pro nějaké $t_0 \in I \cap J$. Nechť δ, Δ a $l(t)$ jsou jako v Definici 6. BÚNO navíc $\delta > 0$ je tak malé, že grafy x a y, zúžené na $\hat{I} = I \cap J \cap U(t_0, \delta)$, leží v $Q(t_0, x_0; \delta, \Delta)$.
Označme $v(t) = x(t) - y(t)$. Potom $|v'(t)| \leq l(t)|v(t)|$ pro s.v. $t \in \hat{I}$ a závěr plyne ihned z Lemmatu 11. □

Definice 7. *Nezáporná, neklesající funkce $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ se nazve zobecněný modulus spojitosti funkce $f = f(t, x)$ vzhledem k x v Ω, jestliže pro každé $(t_0, x_0) \in \Omega$ existuje válec $Q(t_0, x_0; \delta, \Delta) \subset \Omega$ a funkce $k \in L^1(U(t_0, \delta))$ tak, že $|f(t, x) - f(t, y)| \leq k(t)\omega(|x - y|)$ pro skoro všechna t pro všechna x, y v $Q(t_0, x_0; \delta, \Delta)$.*

Věta 13 (Osgood)**.** *Nechť funkce $f = f(t, x)$ má (lokálně) zobecněný modulus spojitosti ω vzhledem k x takový, že*

$$\int_0^\eta \frac{ds}{\omega(s)} = \infty \tag{10}$$

pro každé $\eta > 0$. Potom rovnice $x' = f(t, x)$ má vlastnost (lokální) jednoznačnosti.

Důkaz. Nechť x, y jsou řešení na $[t_0, t_0 + \delta]$ a $x(t_0) = y(t_0)$. Označme $u(t) = |x(t) - y(t)|$. Pro AC funkce platí $|z(t)|' = z'(t)\,\mathrm{sgn}(z(t))$ skoro všude, tedy $u'(t) \leq |x'(t) - y'(t)| \leq k(t)\omega(u(t))$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ máme

$$\int\limits_0^{u(t_0+\delta)} \frac{dy}{\omega(y) + \varepsilon} = \int\limits_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{u'(t)\,dt}{\omega(u(t)) + \varepsilon} \leq \int\limits_{t_0}^{t_0+\delta} k(t)\,dt \tag{11}$$

Integrály nalevo se rovnají, neboť jsou přírůstkem C^1 resp. *AC* funkce $G(y) = \int dy/(\omega(y)+\varepsilon)$ resp. $G(u(t))$ v příslušných mezích. Nyní pošleme $\varepsilon \to 0+$. Pokud $u(t_0+\delta) > 0$, jde levá strana do $+\infty$ díky (10) a Leviho větě, což je při pevném $\delta > 0$ napravo spor. □

Poznámka. *Předchozí věta zřejmě zobecňuje obvyklou větu o jednoznačnosti (Věta 12, $\omega(s) = s$). Zároveň však dává optimální kritérium, jak je zřejmé z následujícího.*

Tvrzení 14. *Nechť $\omega : [0, \eta] \to [0, \infty)$ je neklesající a splňuje*

$$\int_0^\eta \frac{ds}{\omega(s)} < \infty \tag{12}$$

Potom rovnice $x' = \omega(x)$ má netriviální řešení s počáteční podmínkou $x(0) = 0$.

Důkaz. Označme $G(y) := \int_0^y ds/\omega(s)$ pro $y \in [0, \eta]$. Zřejmě $\omega(s) > 0$ pro $s > 0$, tedy $G(y)$ je rostoucí. Funkce $x := G_{-1}$, definovaná na $[0, G(\eta)]$, je též rostoucí a $x'(t) = 1/G'(x(t)) = \omega(x(t))$. □

5. Spojitost řešicí funkce

Nechť $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$ a nechť rovnice (2) má v Ω vlastnost lokální (a tedy globální) jednoznačnosti. Definujme *řešicí funkci* φ předpisem $\varphi(t, t_0, x_0) = x(t)$, kde $x(\cdot)$ je *maximální* řešení rovnice (2) s počáteční podmínkou $x(t_0) = t_0$. Zřejmě φ je korektně definována na nějaké podmnožině $\mathbb{R} \times \Omega$ a $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$ pro každé $(t_0, x_0) \in \Omega$.

Lemma 15. *Nechť $Q = Q(t_0, x_0; \delta, \Delta)$ a $m(t)$ jsou jako v Definici 2; navíc*

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} m(t)\, dt < \Delta/3 \tag{13}$$

Nechť x je řešení, definované na $U(t_0, \delta)$, $x(t_0) = x_0$ a nechť (y, J) je maximální *řešení, splňující $|y(t') - x(t')| < \Delta/3$ pro nějaké $t' \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Potom J obsahuje $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ a $|y(t) - x_0| < \Delta$ pro všechna $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.*

Důkaz. Ukažme nejprve, že $|y(t) - x_0| < \Delta$ pro všechna $t \in J \cap [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Sporem: nechť $t'' > t'$ je nejmenší takové, že $|y(t'') - x_0| = \Delta$. Tedy $|y(t) - x_0| < \Delta$ pro všechna t mezi t', t'' a tudíž

$$\begin{aligned}
|y(t'') - x_0| &\le |y(t'') - y(t')| + |y(t') - x(t')| + |x(t') - x_0| \\
&= \Big| \int_{t'}^{t''} y'(t)\, dt \Big| + |y(t') - x(t')| + \Big| \int_{t_0}^{t'} x'(t)\, dt \Big| \\
&< 2 \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} m(t)\, dt + \Delta/3 < \Delta
\end{aligned}$$

– spor. Ovšem y musí dle Věty 9 opustit $\overline{Q}$, tedy $J \supset [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

□

Lemma 16. *Nechť $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$. Potom rovnice (2) má v Ω vlastnost lokální jednoznačnosti, právě když má vlastnost lokální spojité závislosti na počáteční podmínce.*

Důkaz. Lokální spojitou závislostí na počáteční podmínce rozumíme, že ke každému řešení (x, I) a $t_0 \in I$ existuje $U(t_0, \delta) \subset I$ takové, že pokud x_n jsou řešení na $U(t_0, \delta)$ a $x_n(t') \to x(t')$ pro alespoň jedno pevné $t' \in U(t_0, \delta)$, pak už $x_n \rightrightarrows x$ na $U(t_0, \delta)$.
Implikace zprava doleva: je-li $y(t)$ libovolné řešení, splňující $y(t_0) = x(t_0)$, pak BÚNO dle Lemmatu 15 je y definováno na celém $U(t_0, \delta)$. Využitím předpokladu (s volbou $t' = t_0$, $x_n = x$) plyne závěr triviálně.
Obráceně můžeme opět díky Lemmatu 15 předpokládat, že graf $x_n \subset Q(t_0, x_0; \delta, \Delta)$. Stejně jako ve Větě 5 obdržíme relativní kompaktnost posloupnosti x_n v $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$. Pokud $x_n \not\rightrightarrows x$, vybrali bychom podposloupnost tak, že $x_{\tilde{n}} \rightrightarrows \tilde{x} \ne x$. Protože však dle předpokladu $x_{\tilde{n}}(t') \to \tilde{x}(t') = x(t')$, dostáváme spor s jednoznačností. □

Věta 17. *Nechť $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená. Nechť rovnice (2) má vlastnost lokální jednoznačnosti. Potom řešicí funkce je spojitá a její definiční obor je otevřená množina. Dodatek: zobrazení „počáteční podmínce přiřaď maximální interval existence řešení" je zdola polospojité.*

Důkaz. Nechť $(t_1, t_0, x_0) \in \mathcal{D}(\varphi)$, nechť $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ je příslušné maximální řešení, definované na intervalu $(a, b) \supset [t_0, t_1]$. Množinu $\{(t, x(t));\ t \in [t_0, t_1]\}$ lze díky kompaktnosti pokrýt konečným systémem Carathéodoryovských válců $Q_k = Q_k(\tau_k, x(\tau_k); \delta_k, \Delta_k)$, $k \le N$. BÚNO předpokládejme, že $\tau_0 = t_0$ a $\tau_N = t_1$, $Q_{k-1} \cap Q_k \neq \emptyset$ a také že

$$\int_{I_k} m_k(\tau)\, d\tau < \Delta_k/3 \tag{14}$$

kde klademe $I_k = [\tau_k - \delta_k, \tau_k + \delta_k]$. Označme pro jednoduchost $y(t) = \varphi(t, t_0', x_0')$. Potom

$$|y(t_0') - x(t_0')| \le |x_0' - x_0| + |x(t_0) - x(t_0')| < \Delta_0/3$$

pokud (t_0', x_0') je dost blízko (t_0, x_0). Dle Lemmatu 15 je y definováno alespoň na I_0 a graf $y|_{I_0} \subset Q_0$. Díky odhadu $|y'| \le m_0$ zde máme

$$|y(t_0) - x(t_0)| \le |y(t_0) - y(t_0')| + |x_0' - x(t_0)| \le |\int_{t_0}^{t_0'} m_0(s)\, ds| + |x_0' - x_0| \to 0\,.$$

pro $(t_0', x_0') \to (t_0, x_0)$, a z Lemmatu 16 plyne, že dokonce $y \rightrightarrows x$ v I_0. Speciálně $y(t'') \to x(t'')$ v nějakém $t'' \in I_1$. Zřetězením těchto úvah dostáváme, že $y \rightrightarrows x$ dokonce v $t \in [t_0 - \delta_0, t_1 + \delta_N]$. Odsud zřejmě

$$\varphi(t_1', t_0', x_0') - \varphi(t_1, t_0, x_0) = y(t_1') - x(t_1') + x(t_1') - x(t_1) \to 0$$

pro $(t_1', t_0', x_0') \to (t_1, t_0, x_0)$, což je dokazovaná spojitosti φ. Také nahlížíme $[t_0 - \delta_0, t_1 + \Delta_N] \times I_0 \times U(x(t_0), \Delta') \subset \mathcal{D}(\varphi)$ pro vhodné $\Delta' > 0$, tj. otevřenost $\mathcal{D}(\varphi)$.
Zdola polospojitostí v „dodatku“ rozumíme: je-li (maximální) řešení x definováno na (otevřeném) I a $K \subset I$ je kompakt, pak libovolné dost blízké (maximální) řešení y je definováno alespoň na nějakém (otevřeném) $J \supset K$. Což také vyplývá z dokázaného.

□

6. Diferencovatelnost řešicí funkce

Pro účely této sekce předpokládejme, že $f = f(t, x)$ je lokálně lipschitzovská na (otevřené) $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dle předchozího je řešicí funkce $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0)$ spojitá na $\mathcal{D}(\varphi)$. Snadno se nahlédne, že φ je dokonce lokálně lipschitzovská. Pro snazší značení se výrazy tvaru $\varphi(t, t_0, x_0)$ implicitně omezují na hodnoty $(t, t_0, x_0) \in \mathcal{D}(\varphi)$. Tedy jde o průniky s otevřenou množinou (Věta 17), což speciálně nemění nic na měřitelnosti.

Lemma 18. *Nechť $A \subset \Omega$ je množina míry nula, nechť t_0 je pevné. Potom pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí, že $(t, \varphi(t, t_0, x)) \notin A$ pro skoro všechna t.*

Důkaz. Stačí uvážit, že

$$\{(t, x); \varphi(t, t_0, x) \in A\} = \{\varphi(t_0, \tau, y); (\tau, y) \in A\}\,. \tag{15}$$

Množina vpravo má míru nula (lipschitzovský obraz nulové množiny); dle Fubiniho věty jsou x-skoro všechny řezy nulové podmnožiny $\mathbb{R}$. □

Věta 19. *Nechť $t_0 \in \mathbb{R}$ je pevné. Potom pro skoro všechna $x_0 \in \mathbb{R}^n$ taková, že $(t_0, x_0) \in \Omega$, platí, že $u(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$ je definováno pro skoro všechna t a $w \in \mathbb{R}^n$ libovolné a splňuje „rovnici ve variacích“*

$$u' = \nabla_x f(t, \tilde{x}(t))u, \qquad u(t_0) = w \tag{16}$$

kde $\tilde{x}(t) := \varphi(t, t_0, x_0)$.

Důkaz. Nechť $t_0 \in \mathbb{R}$ je pevné. Nechť $A \subset \Omega$ je množina bodů, kde $\varphi(\cdot, t_0, \cdot)$ nebo f není diferencovatelná. Dle Rademacherovy věty má A nulovou míru a dle Lemmatu 18 pro s.v. x_0 platí, že $u(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$ je definováno pro s.v. t (při libovolném w) a též $A(t) := \nabla_x f(t, \tilde{x}(t))$ je definováno pro s.v. t.
Označme $y(t) := \varphi(t, t_0, x_0 + hw)$. Potom (dle Lemmatu 4)

$$\frac{y(t) - x(t)}{h} = \frac{y(t_0) - x(t_0)}{h} + \int_{t_0}^{t} \frac{f(s, y(s)) - f(s, x(s))}{h} \, ds \tag{17}$$

pro každé t. Pro $h \to 0$ jde první člen k $u(t)$, druhý člen je roven w a integrand ve třetím členu jde k $A(s)u(s)$ pro s.v. s. Z lokální lipschitzovskosti f snadno plyne stejnoměrná omezenost integrandu, a lze tedy použít Lebesgueovu větu. Dostáváme

$$u(t) = w + \int_{t_0}^{t} A(s)u(s) \, ds \tag{18}$$

pro s.v. t. Tedy $u(t)$ má AC reprezentanta, který je zároveň (jediným) řešením rovnice (16), opět dle Lemmatu 4. $\square$

Důsledek 20. *Je-li $f = f(t, x)$ třídy C^1, je $\frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$ definováno pro* všechny *hodnoty argumentů – a je opět řešením rovnice ve variacích* (16)*.*

Důkaz. Označme $\tilde{u}(t)$ řešení (16); víme již, že $\tilde{u}(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$ pro skoro všechny hodnoty argumentů. Ovšem $\tilde{x}(t)$ a tedy $A(t)$ závisí na těchto argumentech spojitě; totéž platí pro $\tilde{u}(t)$ díky Větě 7. Závěr je nyní přímých důsledkem následujícího lemmatu. $\square$

Lemma 21. *Nechť $f(x)$ je lokálně lipschitzovská na otevřené $Q \subset \mathbb{R}^m$; nechť existuje spojitá funkce $g(x)$ taková, že $\nabla f(x) = g(x)$ skoro všude. Potom $f(x)$ je C^1 a $\nabla f(x) = g(x)$ všude.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že Q je omezená krychle, na níž je $g(x)$ stejnoměrně spojitá. V případě $m = 1$ máme (s ohledem na Tvrzení 1) $f(x_1) - f(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx$ pro všechna x_1, $x_2 \in Q$; tedy $f'(x) = g(x)$ všude a je spojitá. Pro m obecné ukažme, že

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = g_1(x) \tag{19}$$

všude (a tedy je spojitá) v Q. Píšeme-li $x = (x_1, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$, je podle Fubiniho věty pro y mimo nulovou $N \subset \mathbb{R}^{m-1}$ (19) v platnosti pro skoro všechna x_1, a tedy pro všechna x_1 dle případu $m = 1$. Pro $y_0 \in N$ následně volíme $y_n \notin N$ taková, že $y_n \to y_0$. Protože $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\cdot, y_n) = g_1(\cdot, y_n)$ a pravá strana jde stejnoměrně ke $g_1(\cdot, y_0)$, platí (19) i pro $y = y_0$ a důkaz je hotov. $\square$

7. Lineární rovnice

Obecnou lineární rovnicí rozumíme

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{20}$$

kde $A(t) : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ a $b(t) : I \to \mathbb{R}^n$. Jsou-li $A(t)$ a $b(t)$ lokálně integrovatelné, je pravá strana zjevně Carathéodoryovská, dokonce zobecněně lokálně lipschitzovská, tedy lokální existence a jednoznačnost je zaručena. Podstatným rysem *lineárních* rovnic je však *globální* existence řešení.

Věta 22. *Nechť $A(t) \in L^1_{\text{loc}}(I)$, $b(t) \in L^1_{\text{loc}}(I)$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Potom pro každou počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$, kde $t_0 \in I$, existuje právě jedno řešení rovnice* (20)*, definované na celém I.*

Důkaz. Označme $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$. Dle Vět 8, 12 existuje právě jedno maximální řešení, definované na (otevřeném) intervalu $J \subset I$. Nechť $t_0 \in [\alpha, \beta] \subset I$ je libovolný kompaktní interval. Označme ještě $m(t) = \|A(t)\|$, $c = |x_0| + \int_\alpha^\beta |b(t)|\, dt$, $C = c \exp\big(\int_\alpha^\beta m(s)\, ds\big)$. Platí

$$|x(t)| \le c + \int_{t_0}^t m(t)|x(t)|\, dt \tag{21}$$

a tedy $|x(t)| \le c \exp\big|\int_{t_0}^t m(s)\, ds\big|$ pro každé $t \in [\alpha, \beta]$, dle Lemmatu 11. Dle Věty 9 existují t_1, $t_2 \in J$ taková, že $t_2 < t_0 < t_1$ a $(t_1, x(t_1))$ a $(t_2, x(t_2))$ neleží v kompaktu $K = [\alpha, \beta] \times \overline{U}(x_0, C)$. Protože však $|x(t)| \le C$ pro všechna $\alpha \le t \le \beta$, je nutně $t_1 > \beta$, $t_2 < \alpha$. Protože $[\alpha, \beta] \subset I$ je libovolné, plyne odtud $J = I$. $\square$

Poznámka. *Analogickou úvahou dostáváme* globální existenci *pro rovnici* (2)*, pokud $f \in$* CAR$(I \times \mathbb{R}^n)$ *a platí odhad $|f(t,x)| \le a(t)|x| + b(t)$ pro nějaké $a(t)$, $b(t) \in L^1_{\text{loc}}(I)$.*

Věta 23. *Nechť $b(t) \in L^1_{\text{loc}}(I)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je konstantní matice. Potom řešení rovnice*

$$x' = Ax + b(t) \tag{22}$$

splňuje

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} b(s)\, ds \tag{23}$$

pro libovolná t_0, $t \in I$.

Důkaz. Ekvivalence (22) a (23) se provádí rutinním výpočtem, ovšem s odkazem na Tvrzení 1 a 2. Je také třeba pozorovat, že integrand na levé straně (23) je lokálně integrovatelný. $\square$