$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ot.

$f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá $\qquad f = (f_1, \dots f_n)$

$\boxed{x' = f(x, t) \quad (DR)}$ $\qquad x = (x_1, \dots x_n)$

$f_i = f_i(x_1, \dots x_n, t)$

$|x| = (x_1^2 + \dots x_n^2)^{1/2}$

Def. $x: I \to \mathbb{R}^n$ je řešení, pokud splňuje:

(i) $\forall t \in I: (x(t), t) \in \Omega$

(ii) $\forall t \in I \ \exists$ vlastní $x'(t)$

(iii) $\forall t \in I: x'(t) = f(x(t), t)$

I ot. interval

Pozn. $\exists x'$ vlastní $\Rightarrow x$ spojitá

$x' = f(x, t) \Rightarrow x \in C^1$

„klasické řešení"

Lemma 1.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ot., $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ spoj., $(x_0, t_0) \in \Omega$,

$x: I \to \mathbb{R}^n$ spoj., graf x je v Ω (podm. (i))

NPJE:

(i) (x, I) je řešení rovnice (DR), splňující

p.p. $x(t_0) = x_0$

(ii) $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)\, ds \quad \forall t \in I$.

D. (i) $\Rightarrow$ (ii)

$x'(s) = f(x(s), s) \qquad \Big/ \int_{t_0}^{t} ds$

$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} x'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)\, ds$

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\quad x'(t) = \frac{d}{dt}(\text{P.S. (ii)}) = 0 + f(x(t), t)$

$x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} (\dots) = x_0$

$\square$

<u>Věta 1.1.</u> (Peanova o lokální existenci, 1890)

$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ot., $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spoj., $(x_0, t_0) \in \Omega$ dáno.

Potom $\exists\, I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $\delta > 0$,

$x : I \to \mathbb{R}^n$ řešení $x' = f(x, t)$, $x_0 = x(t_0)$

<u>D.</u> <u>1.</u> f spoj. a omezená v $\Omega = \mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow \exists$ globální řešení $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Pomocná úloha: $\underset{\lambda > 0}{(P_\lambda)}$ hledám funkci $x_\lambda : \langle t_0 - \lambda, \infty) \to \mathbb{R}^n$

splňující: $x_\lambda(t) = x_0$; $t \in \langle t_0 - \lambda, t_0 \rangle$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_\lambda(s-\lambda), s)\, ds \quad ; \text{ jinak.} \quad (*)$$

nalezení x_λ: $t \in \langle t_0 - \lambda, t_0 \rangle$ dáno

$t \in \langle t_0, t_0 + \lambda \rangle \to s - \lambda \in \langle t_0, t_0 + \lambda \rangle$

$(*) \Rightarrow$ znám x_λ na $\langle t_0, t_0 + \lambda \rangle$

$(*) \Rightarrow$ $\langle t_0, t_0 + 2\lambda \rangle$ atd.

$\Rightarrow \exists!\, x_\lambda$ řešení (P_λ)

$C(\langle 0, T \rangle; \mathbb{R}^n)$ $\quad \|x\| = \sup_{t \in \langle 0,T \rangle} |x(t)|$ $\quad x_n \to x$ v této normě

$\Leftrightarrow x_n \rightrightarrows x$ v $\langle 0, T \rangle$

$\mathcal{M} \subset C(\langle 0, T \rangle; \mathbb{R}^n)$ se nazve st. omezená: $\exists K > 0\ \forall x \in \mathcal{M}$

$|x(t)| < K \quad \forall t \in \langle 0, T \rangle$

st. spojitá: $\forall \varepsilon\, \exists \delta\, \forall x \in \mathcal{M}$

$\forall t_1, t_2 \in \langle 0, 1 \rangle\ |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$.

A-A: $\mathcal{M} \subset C(\langle 0, 1 \rangle; \mathbb{R}^n)$ rel. komp. $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$ je st. om. & st. spoj.

klíč. (·): $\{x_\lambda ; \lambda > 0\}$ je st. om. & st. spoj. na $\langle t_0, t_0 + T \rangle$ pro $\forall T > 0$ pevné.

$|f| \le M$

1) $|x_\lambda(t)| \le |x_0| + \left| \int_{t_0}^{t} f(\ldots)\, ds \right| \le |x_0| + (t - t_0) M \le |x_0| + TM$

2) $|x_\lambda(t_1) - x_\lambda(t_2)| = \left| \int_{t_0}^{t_1} f - \int_{t_0}^{t_2} f \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(\cdot) \right| \le M |t_1 - t_2|$

$\varepsilon > 0$ dáno: volme $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$

$x_n \ldots$ řešení (P_λ) pro $\lambda = \frac{1}{n}$

$\{x_n\}$ rel. komp. v $C(\langle t_0, t_0 + 1 \rangle)$

$\Rightarrow \exists$ podposloupnost $x_n \rightrightarrows x$ v $\langle t_0, t_0 + 1 \rangle$

$\{x_n\}$ rel. kmp. v $C(\langle t_0, t_0 + 2 \rangle)$

$\Rightarrow \exists\, x_n \rightrightarrows x$ v $\langle t_0, t_0 + 2 \rangle$

atd.

$x_n \rightrightarrows x$ v $\langle t_0, t_0 + K \rangle\ \forall K \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x_n \overset{loc}{\rightrightarrows} x$ v $\langle t_0, \infty)$

spec. $x \in C(\langle t_0, \infty))$

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_n(s - \tfrac{1}{n}), s)\, ds \quad \forall t \ge t_0$$

$$x_n(s - \tfrac{1}{n}) = \underbrace{x_n(s - \tfrac{1}{n}) - x(s - \tfrac{1}{n})}_{\substack{\rightrightarrows 0 \\ \text{protože } x_n \overset{loc}{\rightrightarrows} x}} + x(s - \tfrac{1}{n}) \underset{\text{na } s \in \langle 0, t \rangle}{\rightrightarrows} x(s)$$

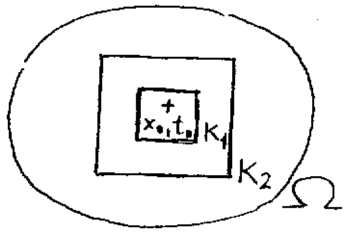
$f(x_n(s - \frac{1}{n}), s) \rightrightarrows f(x(s), s)$ v $\langle 0, t \rangle$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)\, ds \ ; \ t \ge t_0$$

analogicky najdu $x(t)$ i pro $t \le t_0$, tak, že

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)\, ds \quad \forall t \in \mathbb{R} \overset{\text{Lemma}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} x' = f(x, t) \\ x(t_0) = t_0 \\ \forall t \in \mathbb{R} \end{array}$$

2. f, Ω obecné



$$\Phi(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{na } K_1 \\ 0 & \text{vně } K_2 \end{cases}$$
spojitá

= spojitá seřezávací funkce

$\hat{f}(x,t) = f \cdot \Phi \ldots$ spoj. v Ω
$= f$ v K_1
$= 0$ vně K_2

$\hat{f}$ (dodefinovaná 0 mimo Ω) spojitá, omezená v $\mathbb{R}^{n+1}$
(nulová mimo kompakt, kde je spojitá)

1. krok $\Rightarrow \exists\, x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$x' = \hat{f}(x,t)$
$x(t_0) = x_0$

Spojitost x: $\exists\, \delta > 0$: graf $x|_{(t_0-\delta,\, t_0+\delta)} \subset K_1$
$x' = f(x,t)$ na $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ $\square$

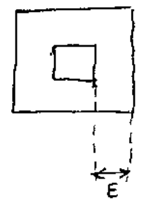
Př. $x' = e^x$
$x(0) = 2$
$x = \ln \frac{1}{e^{-2} - t}$; $t \in (-\infty, e^{-2})$

Pozn. $x' = f(x,t) \ldots$ obecně existují jen lokální řešení
f omezená $\Rightarrow \exists$ globální řešení
a sp. v $\mathbb{R}^{n+1}$

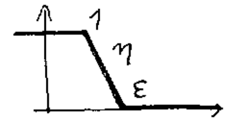
Doplňky. $y : I \to \mathbb{R}^n$
$y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$
$y'(t) = (y_1'(t), \ldots y_n'(t))$
$\int_a^b y(s)\,ds = \left(\int_a^b y_1(s)\,ds, \ldots \int_a^b y_n(s)\,ds\right)$

$\left|\int_a^t y(s)\,ds\right| \leq \int_a^t |y(s)|\,ds$, $|\ | = \|\ \|_e$ $(\mathbb{R}^n)$

$\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$
$z \in \mathbb{R}^n$
def. $\operatorname{dist}(z, M) := \inf_{y \in M} \|z - y\|$;
platí, že $|\operatorname{dist}(z_1, M) - \operatorname{dist}(z_2, M)| \leq |z_1, z_2|$



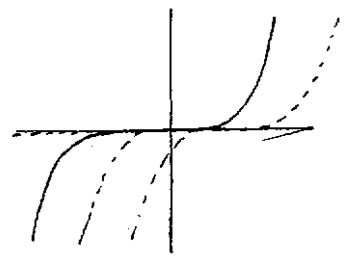
$\Phi(x,t) := \eta(\operatorname{dist}([x,t]; K_1))$



2. Jednoznačnost řešení

Př. (1) $x' = f(t)$ má ∞ řešení $F(t) + C$
$x(t_0) = x_0 \ldots$ určí jediné řešení

(2) $x' = 3\sqrt[3]{x^2}$
$x(0) = 0$ $\qquad x_1(t) \equiv 0$
$\qquad x_2(t) = t^3$



Def. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ot., $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spoj., $x' = f(x,t)$ (DR)

(i) Řekneme, že (DR) má vlastnost lokální jednoznačnosti, pokud: $(x, I), (y, J)$ řešení, $\exists\, t_0 \in I \cap J$: $x(t_0) = y(t_0) \Rightarrow \exists\, \delta > 0$: $x = y$ na $I \cap J \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

(ii) Řekneme, že (DR) má vlastnost globální jednoznačnosti, pokud: $(x, I), (y, J)$ řešení, $\exists\, t_0 \in I \cap J$: $x(t_0) = y(t_0) \Rightarrow x = y$ na $I \cap J$.

Věta 2.1. $\underset{ot.}{\Omega} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $f : \Omega \underset{sp.}{\to} \mathbb{R}^n$

(i) $\Leftrightarrow$ (ii)

Důkaz. jen „$\Rightarrow$"

$(x, I), (y, J)$ ř., $x(t_0) = y(t_0)$; $t_0 \in I \cap J = (a, b)$.

$C_1 := \{t \in \langle t_0, b),\ x = y \text{ na } \langle t_0, t\rangle\}$

(i) $\Rightarrow \langle t_0, t_0+\delta) \subset C_1$

C_1 je interval

Cíl: $C_1 = \langle t_0, b)$, stačí dokázat $\sup C_1 = b$.

Pro spor $c := \sup C_1$, $c < b$. Potom

$\exists t_n \in C_1$, $t_n \nearrow c$; $y(t_n) = x(t_n) \Rightarrow x(c) = y(c)$

(i) $\Rightarrow x = y$ na $\langle c, c+\delta)$ spor $c + \frac{\delta}{2} \in C_1$ ↯.

Tedy: $x = y$ na $\langle t_0, b)$, podobně na $(a, t_0\rangle$. □

Def. $\underset{ot}{\Omega} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\underset{sp}{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$; $f = f(\overset{\mathbb{R}^n}{\overset{\Downarrow}{x}}, \underset{\text{skalár}}{\underset{\downarrow}{t}})$

f je lok. lipsch. v Ω vůči x, pokud:

$\forall (t_0, x_0) \in \Omega\ \exists \delta > 0\ \exists L > 0 : |f(\xi, t) - f(\eta, t)| \le L|\xi - \eta|$ (lip.)
$\forall t \in \mathcal{U}(t, \delta)\ \forall \xi, \eta \in \mathcal{U}(x_0, \delta)$

Př. (1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je lipschitzovská: $|f(\xi) - f(\eta)| \le L|\xi - \eta|$

tedy $\left|\frac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta}\right| \le L \quad \forall \xi \ne \eta$ ... omezenost sečny

(2) $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2}$ není lip. na okolí 0.

Věta 2.2. $\underset{ot}{\Omega} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\underset{sp}{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$; f je v Ω lok. lipschitzovská vůči x. Potom $x' = f(x, t)$ má v Ω vlastnost lokální jednoznačnosti.

D. $(x, I), (y, J)$ ř., $x(t_0) = y(t_0)$ $\exists t_0 \in I \cap J$.

$\exists \delta > 0, \Delta > 0, L > 0$: (lip.) platí $\forall (\xi, t), (\eta, t) \in \mathcal{U} = \mathcal{U}(x_0, \Delta) \times \mathcal{U}(t_0, \delta)$

Beru δ malé tak, aby graf $x, y \subset \mathcal{U}$; navíc nechť $\delta \le \frac{1}{2L}$.

Tvrdíme: $x = y$ na $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Ozn. $\gamma := \sup_{t \in \mathcal{U}(t_0, \delta)} |x(t) - y(t)|$

$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)\, ds$

$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s)\, ds$

$|x(t) - y(t)| \le \left|\int_{t_0}^{t} f(x(s), s) - f(y(s), s)\, ds\right| \overset{|t-t_0|}{\le} L|x(s) - y(s)| \le L\gamma|t - t_0|$

$|x(t) - y(t)| \le \delta L \gamma \quad \Big| \sup_{t \in \mathcal{U}(t_0, \delta)}$

$\gamma \le \delta L \gamma$

$\gamma \le \frac{1}{2}\gamma \Rightarrow \gamma = 0$. □

Důsledek. (Picardova věta.)
$\underset{ot.}{\Omega} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\underset{sp}{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, f lok. lip. v Ω k x, $[x_0, t_0] \in \Omega$. Potom úloha $x' = f(x, t)$, $x(t_0) = x_0$ má řešení na $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$; $\delta > 0$, a toto je jednoznačné.

Tvrzení 2.1. $\underset{ot}{\Omega} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\underset{sp}{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sp.

$\Rightarrow$ f je v Ω lok. lipschitzovská vůči x.

Důkaz. (x_0, t_0).

$\exists \delta > 0 : \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right| \le K$ na $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x_0, \delta) \times \mathcal{U}(t_0, \delta)$

$$f(\xi, t) - f(\eta, t) = \Big[f(\underbrace{\eta + s(\xi - \eta), t}_{\in \mathcal{U}}) \Big]_{s=0}^{s=1} =$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{ds} f(\dots)\, ds$$

$$\frac{d}{ds} f(\dots, t) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\dots, t)}_{|\cdot| \le K} (\xi_j - \eta_j)$$

$$|f(\xi, t) - f(\eta, t)| \le \int_0^1 \sum_j K |\xi_j - \eta_j| \le \underbrace{nK}_{L} |\xi - \eta|.$$

$\square$

Důsledek. Pokud $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f, \frac{\partial f}{\partial x_i}$ spoj. v Ω, potom $x' = f(x, t)$ má v Ω vlastnost <u>globální</u> jednoznačnosti.

3. maximalita řešení

Definice. Řešení $(\hat{x}, \hat{I})$ se nazve prodloužením řešení (x, I), jestliže

$I \subset \hat{I}$ a $\hat{x}|_I = x$.

Řešení je maximální, pokud nemá žádné netriviální prodloužení.

Věta 3.1. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ot., f spojitá, $f(x, t) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, nechť (x, I) je řešení rovnice $x' = f(x, t)$. Potom (x, I) má alespoň jedno maximální prodloužení.

Zornovo lemma. ($\Leftrightarrow$ axiom výběru)

$\mathcal{M}$ je zcela libovolná neprázdná množina částečně uspořádaná relací $\prec$.

Nechť platí: je-li $A \subset \mathcal{M}$ řetězec (lin. usp. množina), potom

$\exists x \in \mathcal{M}\ \forall y \in A\ \ y \prec x$.

Potom v $\mathcal{M}$ existuje maximální prvek.

$(\exists m \in \mathcal{M} : \neg(\exists x \in \mathcal{M};\ m \prec x))$

Důkaz. (V. 3.1.) (x, I)... dané řešení

$\mathcal{M} := \{(\hat{x}, \hat{I});\ (\hat{x}, \hat{I})$ je prodloužení $(x, I)\}$

$(x, I) \prec (\hat{x}, \hat{I}) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\hat{x}, \hat{I})$ prodlužuje (x, I).

$\mathcal{A} = \{(x_\alpha, I_\alpha);\ \alpha \in A\}$... řetězec:

$\forall \alpha, \beta : (x_\alpha, I_\alpha) \prec (x_\beta, I_\beta)$
nebo $\succ$

$$J := \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$$

$y(t) := x_\alpha(t)$; libovolné tak, že $t \in I_\alpha$.

Zjevně $(y, J) \in \mathcal{M}$; $(x_\alpha, I_\alpha) \prec (y, J)\ \forall \alpha \in A$

Zorn: $\exists (\bar{x}, \bar{I}) \in \mathcal{M}$, maximální vůči $\prec$, tedy $(\bar{x}, \bar{I})$ je max. prodloužení původního řešení (x, I).

$\square$

Lemma 3.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ot., f spoj. $(\Omega \to \mathbb{R}^n)$,
nechť (x, I) řeší $x' = f(x, t)$,
$I = (a, b)$. Potom řešení lze prodloužit
za bod $t = b$, právě když

(i) $b < \infty$;

(ii) $\exists \lim\limits_{t \to b_-} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}^n$

(iii) $(b, x_0) \in \Omega$.

Důkaz: „$\Rightarrow$" $(\hat{x}, \hat{I})$ prodl. (x, I); $b \in \hat{I}$

$\Rightarrow$ x lze spojitě dodefinovat pro $t = b$

$\Rightarrow$ (i), (ii), (iii)

„$\Leftarrow$" V. 1.1. (Peano): $\exists$ řešení $y(t) : (b-\delta, b+\delta) \to \mathbb{R}^n$
$y(b) = x_0$

polož $$\hat{x}(t) := \begin{cases} x(t); & t \in (a, b) \\ y(t); & t \in \langle b, b+\delta) \end{cases}$$

$\hat{I} := (a, b+\delta)$

Snadno se ověří (Lemma 1.1.): $(\hat{x}, \hat{I})$ je řešení. □

Věta 3.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ot., $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spoj., (x, I) je maximální řešení
$x' = f(x, t)$ v Ω.
Nechť $K \subset \Omega$ je kompakt, nechť existuje
$t_0 \in I : (t_0, x(t_0)) \in K$.

Potom $\exists t_1 > t_0 : (t_1, x(t_1)) \notin K$
& $\exists t_2 < t_0 : (t_2, x(t_2)) \notin K$

(maximální řešení opustí každý kompakt.)

Důkaz. Nechť $I = (a, b)$. Nechť $(t, x(t)) \in K$ $\forall t \in \langle t_0, b)$

K kompakt $\Rightarrow b < \infty$, x omezená na $\langle t_0, b)$

Tvrdíme: $\exists \lim\limits_{t \to b_-} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}^n$

f spojitá $\Rightarrow |f(\xi, t)| \leq M$ $\forall (\xi, t) \in K$.

$x_i'(t) = f_i(x(t), t)$; $\qquad (f_i \geq -M)$

$x_i(t) = \underbrace{Mt + x_i(t)}_{u_i(t)} \underbrace{- Mt}_{v_i(t)}$

$u_i, v_i \ldots$ omezené (x omez.) & monotónní v $\langle t_0, b)$

$u_i' = M + x_i' \geq 0$

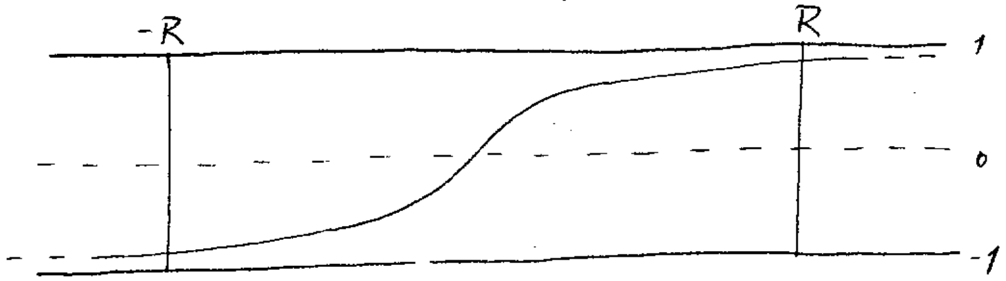
$\Rightarrow$ $\exists$ vlastní limita.

$(x(t), t) \to (x_0, b) \in K \subset \Omega$

L. 3.1. $\Rightarrow (x, I)$ lze prodloužit za $t = b$ ↯ □

Příklad. $x' = 1 - x^2$

$\Omega_0 = \{x \in (-1,1),\ t \in \mathbb{R}\}$



Tvrdíme: max. řešení (x, I) v Ω_0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ nutně $I^* = \mathbb{R}$

Důkaz: $K := \langle -R, R\rangle \times \langle -1, 1\rangle$

x opustí K nutně „po straně"

$\Rightarrow I \supsetneq \langle -R, R\rangle \ \forall R \Rightarrow I = \mathbb{R}$.

4. závislost řešení na počátečních podmínkách.

$x' = f(x,t)$

$x(t_0) = x_0$

Věta 4.1. (Gronwallovo lemma.)

Nechť w, g spojité, nezáporné v I, $t_0 \in I$, $K > 0$ konstanta.

Nechť $w(t) \le K + \left|\int_{t_0}^{t} w(s)\, g(s)\, ds\right| \ \forall t \in I$.

Potom $w(t) \le K \exp \left|\int_{t_0}^{t} g(s)\, ds\right| \ \forall t_0 \in I$.

Důkaz. Bůno omezme se na $t \ge t_0$ (potom jsou integrály nezáporné.) Buď $\varepsilon > 0$.

$$w(t) \le K + \int_{t_0}^{t} w(s)\, g(s)\, ds + \varepsilon =: \Phi(t); \quad t \ge t_0$$

Platí: $\Phi(t) > 0$, $\Phi'(t) = g(t)\, w(t)$

$$w(s) \le \Phi(s) \quad \Big/ \cdot \frac{g(s)}{\Phi(s)}$$

$$\frac{w(s)\, g(s)}{\Phi(s)} = \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} = (\ln \Phi(s))' \le g(s) \quad \Big/ \int_{t_0}^{t} ds$$

$$\ln \Phi(t) - \ln \Phi(t_0) \le \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds \quad \Big/ \exp$$

$$w(t) \le \Phi(t) \le \underbrace{\Phi(t_0)}_{K+\varepsilon} \exp \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds \quad \Big/ \varepsilon \to 0_+ .$$

□

Důsledek. Nechť $f(x,t)$ je globálně lipschitzovská v Ω vůči x. Nechť $x, y : I \to \mathbb{R}^n$ jsou řešení $x' = f(x,t)$ v Ω. Potom $|x(t) - y(t)| \le |x(t_0) - y(t_0)| \exp(L|t - t_0|)$ $\forall t, t_0 \in I$. Tj. spojitá závislost řešení na počáteční podmínce.

Důkaz. L.1.1.: $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)\, ds$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s)\, ds$$

$$x(t) - y(t) = x(t_0) - y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) - f(y(s), s)\, ds$$

$$\overbrace{|x(t) - y(t)|}^{w} \le \overbrace{|x(t_0) - y(t_0)|}^{K} + \left|\int_{t_0}^{t} \overbrace{L}^{g(s)\ (\text{zde konst.})} |x(s) - y(s)|\, ds\right| \ \forall t, t_0 \in I$$

Gronwall: požadované tvrzení. □

Poznámka. f je na Ω lok. lipsch. vůči x; $K \subset \Omega$ kompakt $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ f je na K (globálně) lipschitzovská

Definice. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ot., $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spoj., lok. lipsch. vůči x

$\varphi : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^n$

$\varphi(t, t_0, x_0) := x(t)$, kde $x(t)$ je maximální řešení $x' = f(t, x(t))$ v Ω, $x(t_0) = x_0$

„řešící funkce"

Věta 4.2. Za uvedených předpokladů buď
$D := \{(t,t_0,x_0) \in \mathbb{R}^{n+2};\ \varphi(t,t_0,x_0)$ je definované$\}$.
Pak D je otevřená a $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ je spojité.

Důkaz. $(t,t_0,x_0) \in D$; označ $x(t) := \varphi(t,t_0,x_0)$ ... max. řešení
$\Delta > 0$ dáno. $K := \{(t,y);\ t \in \langle t_0-\Delta, t_0+\Delta\rangle =: I;\ |y - x(t)| \le \Delta\}$
kompakt, Δ malé $\Rightarrow K \subset \Omega$, $x(t)$ def. na I.
f je lipsch. vůči x na K (konst. L)
$|f| \le C_0$ na K
$(\tau_0, y_0) \in K$; $|\tau_0 - t_0|, |y_0 - x_0| < \delta := \dfrac{\Delta}{2(1+C_0)e^{LT}}$; T ... délka I.
označ $y(t) := \varphi(t,\tau_0,y_0)$ max. řešení, $t \in J$

$$y(t_0) - x(t_0) = \underbrace{y(t_0) - y(\tau_0)}_{|\ | \le C_0 \underbrace{|t_0-\tau_0|}_{<\delta}} + \underbrace{y(\tau_0) - x(t_0)}_{= |y_0 - x_0| < \delta} \Rightarrow |y(t_0) - x(t_0)| \le (1+C_0)\delta$$

neb $|y'| = |f(t,y)| \le C_0$

□

Lemma 4.1. $|x(t) - y(t)| \le |x(t_0) - y(t_0)| e^{L|t-t_0|} \le (1+C_0)\delta e^{LT} \le \frac{\Delta}{2}$; $t \in I$.
$\Rightarrow y(t)$ neopustí K „po stranách".
y maximální $\Rightarrow$ opustí K na začátku a na konci
y je def. na $I = \langle t_0-\Delta, t_0+\Delta\rangle$
Speciálně: $(t_0-\Delta, t_0+\Delta) \times (t_0-\delta, t_0+\delta) \times U(x_0,\delta) \subset D$
navíc: $|\tau_0 - t|, |y_0 - x_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(t,t_0,y_0) - \varphi(t,t_0,x_0)| < \frac{\Delta}{2}$; $t \in I$.

Věta 4.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ot.; $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spoj., navíc $f \in C_x^2(\Omega)$,
$\varphi(t,t_0,x_0) : D \to \mathbb{R}^n$ je řešící funkce úlohy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$.

Potom $\exists \frac{\partial}{\partial w}\varphi(t,t_0,x_0)$ všude v D a označíme-li
$x(t) := \varphi(t,t_0,x_0)$ (pro pevné t_0, x_0), $u(t) := \frac{\partial}{\partial w}\varphi(t,t_0,x_0)$
pak $u(t)$ splňuje tzv. rovnici ve variacích
$u' = [\nabla_x f(t,x)]u = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x)u_j$, $u(t_0) = w$ (V).

Důkaz. $x(t) := \varphi(t,t_0,x_0)$
$u(t)$ ... řešení (V) $\exists!$ globální ... lineární rovnice pro u
$y(t) := \varphi(t,t_0,x_0+hw)$ ... má smysl pro h malé
Přímo $x, y \in K$ .. kompakt
f je lipsch. vůči x na K
Dle Lemmatu 4.1.: $|x(t) - y(t)| \le \underbrace{|x(t_0) - y(t_0)| e^{LT}}_{|h|\,\|w\|\,e^{LT} \le C_2|h|}$

Taylor:
$f \in C_x^2(\Omega)$
$f(t,y) - f(t,x) = [\nabla_x f(t,x)](y-x) + \frac{1}{2}(y-x)[\nabla_x^2 f(t,\theta)](y-x)$
$\theta \in \overline{x,y}$
$|\nabla_x f|, |\nabla_x^2 f| \le C_0$ na $K \Rightarrow$
$f(t,y) - f(t,x) = [\nabla_x f(t,x)](y-x) + z(t)$
zbytek $z(t) \le \frac{C_0}{2}|x(t) - y(t)|^2 \le C_3|h|^2$
Cíl: $\underbrace{\frac{y(t)-x(t)}{h} - u(t)}_{\eta(t)} \xrightarrow{h\to 0} 0$, t pevné

Rovnice pro $\eta(t)$: $\eta'(t) = \frac{1}{h}(x' - y') - u' = \frac{1}{h}(f(t,y) - f(t,x)) -$
$- [\nabla_x f(t,x)]u =$
$= [\nabla_x f(t,x)]\underbrace{\left(\frac{y-x}{h} - u\right)}_{\eta} + \frac{z(t)}{h}$

$\eta' = [\nabla_x f(t,x)]\eta + \frac{z(t)}{h}$
$\eta(t_0) = \frac{1}{h}(\underbrace{x(t_0) - y(t_0)}_{hw}) - u(t_0) = 0$
$v(t) \le C_4|h|$
$\eta(t) = 0 + \int_{t_0}^{t}[\nabla_x f(s,x(s))]\eta(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds$
$|\eta(t)| \le C_0\left|\int_{t_0}^{t}|\eta(s)|\,ds\right| + C_5|h|$; $t \in I$.
Gronwall: $|\eta(t)| \le C_5|h|\exp(C_0|t-t_0|) \xrightarrow{h\to 0} 0$, t pevné.

Poznámka. (i) $x' = f(t, x, \lambda)$

parametr $\in \mathbb{R}^n$

$x(t_0) = x_0$

$\varphi = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$

$x' = f(t, x, z)$

$z' = 0$

$z(t_0) = \lambda$ $\quad z \equiv \lambda \quad\quad x(t_0) = x_0$

závislost na počáteční podmínce

(ii) Obecně platí

$f \in C^k \Rightarrow \varphi \in C^k$

f analytická* $\Rightarrow \varphi$ analytická

* lokálně lze rozvinout do moc. řady

5. Lineární ODR.

$$x' = A(t)x + b(t) \qquad (L)$$

$A: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^{2n}$ spojité
$b: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^{n}$

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(t)x_j + b_i(t) \qquad i=1,\dots,n$$

Věta 5.1. Nechť $t_0 \in (\alpha,\beta)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pak existuje právě jedno maximální řešení x rovnice (L) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$.
Řešení x je definované na intervalu (α,β).

Důkaz. 1) lokální existence na $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ plyne z Peanovy věty. ($f(t,x) = A(t)x + b$ je spojitá)

2) existence maximálního řešení na $(a,b) \subset (\alpha,\beta)$ plyne z Věty 3.1.

3) jednoznačnost plyne z Věty 2.2.
(f má být lokálně lipschitzovská v x:
$|f(t,x) - f(t,y)| = A(t)(x-y) \le \max_{t \in U(t_0)} A(t)\,|x-y|$)

4) zbývá dokázat, že $(a,b) = (\alpha,\beta)$
Sporem: Předpokládejme $b < \beta$. Platí:
$|b(t)| + |A(t)| \le c_1 \quad \forall t \in \langle t_0, b\rangle$.
spojité na kompaktu
Víme: x splňuje $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds =$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s) + b(s)\,ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds$$

$$|x(t)| \le \underbrace{|x_0| + (\underbrace{t-t_0}_{\le b-t_0})c_1}_{K} + \int_{t_0}^{t} c_1 |x(s)|\,ds$$

$$|x(t)| \le K + \int_{t_0}^{t} c_1|x(s)|\,ds$$

Gronwall: $|x(t)| \le K e^{c_1|t-t_0|} \quad \forall t \in \langle t_0, b)$.
$\le K e^{c_1(b-t_0)}$ nezávisí na t

Tedy $|x(t)| \le c_2$.

$\Rightarrow$ maximální řešení x nikdy neopustí kompaktní množinu $\langle t_0, b\rangle \times \overline{B}(0,c_2)$ ↯
(spor s maximalitou řešení x).

Tedy $b = \beta$. Podobně $a = \alpha$. □

Definice. Rovnici (L) nazveme homogenní, pokud $b \equiv 0$.

(H) $\quad x'(t) = A(t)x(t)$.

Věta 5.2. Množina všech řešení problému (H) je vektorový prostor dimenze n.

Důkaz. $M := \{\varphi: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^n;\ \varphi \text{ řeší } (H)\}$.
Zřejmě M je vektorový prostor:
$x_1, x_2 \in M \Rightarrow a x_1 + b x_2 \in M;\ a, b \in \mathbb{R}$.
Zvolme $t_0 \in (\alpha,\beta)$ pevně. Uvažujme řešení φ_k problému (H) s poč. podmínkou $\varphi_k(t_0) = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$
k-tá souřadnic
$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ - ukážeme, že tvoří bázi M.
Lineární nezávislost: Pokud $\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k = 0 \overset{\text{speciálně}}{\Longrightarrow} \sum c_k \varphi_k(t_0) = 0$
$\varphi_k(t_0) = e_k \Rightarrow c_k = 0 \ \forall k$.
generátory: Vezmeme $\varphi \in M$ libovolné.
$\varphi(t_0) = (d_1, d_2, \dots, d_n)$. Def. $\psi(t) = \sum_{k=1}^{n} d_k \varphi_k(t) \Rightarrow \psi \in M$
$\psi(t_0) = (d_1, \dots, d_n)$.
z jednoznačnosti řešení plyne $\psi(t) = \varphi(t)\ \forall t \in (\alpha,\beta)$,
$\varphi(t) = \sum d_k \varphi_k(t)$ □

Definice. Fundamentálním systémem rovnice (H) nazveme každou bázi prostoru řešení rovnice (H).

Fundamentální maticí nazveme

$$\Phi(t) = (\underbrace{\varphi_1(t), \dots \varphi_n(t)}_{\text{sloupcové vektory}}),$$

kde $\{\varphi_1, \dots \varphi_n\}$ je fund. systém.

Poznámka. Platí $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$.

Definice. Wronského determinant rovnice (H) je

$$w(t) = \det(\Phi(t)).$$

Věta 5.3. (Liouvilleova)

$$w(t) = w(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))\, ds},$$

kde $tr(A(s)) = \sum_{k=1}^{n} A_{kk}(s)$.

Důkaz. Chceme: $w'(t) = tr(A(t)) \cdot w(t)$.

Nechť $\{\varphi_k\}$ je FS (H).

$W(t) = \det(\Phi(t)) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1^1 & \cdots & \varphi_n^1 \\ \vdots & & \\ \varphi_1^n & \cdots & \varphi_n^n \end{pmatrix}$, kde φ_j^i = i-tá složka φ_j.

(*) $W'(t) = D_1(t) + \dots + D_n(t)$, kde $D_l(t)$ je det $\Phi(t)$, ve které zderivujeme l-tý řádek.

$\varphi_j'^{\,l} = \sum_{k=1}^{n} A_{lk}(t)\varphi_j^k$ φ_j je řešení $\Rightarrow \varphi_j'(t) = A(t)\varphi_j(t)$

$D_l(t) = A_{ll}(t) \cdot \det(\Phi(t))$ (řádek derivací je LK řádků matice $\Phi(t)$.)

Z (*) dostáváme $w'(t) = \sum_{l=1}^{n} A_{ll}(t) \det(\Phi(t)) = tr(A(t))\, W(t)$. □

Poznámka. $W(t) \equiv 0 \iff \exists t_0 \in (\alpha, \beta);\ W(t_0) = 0$.

$\det(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n)$ je objem rovnoběžnostěnu tvořeného vektory $v_1, \dots v_n$.

Pokud $tr(A(t)) = 0\ \forall t \Rightarrow$ rovnice zachovává objem:

$$[\![\varphi_1(t_0), \dots \varphi_n(t_0)]\!] = [\![\varphi_1(t), \dots \varphi_n(t)]\!]$$

Poznámka. $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$ (A) autonomní rovnice.

Jak se transformuje objem?

Řešící operátor: $\varphi = \varphi(t, x_0) := x(t)$

↑ řešení (A) s p.p. $x(t_0) = x_0$

$M \subset \mathbb{R}$; $M_t := \{\varphi(t, x_0) : x_0 \in M\}$

Tvrzení. Nechť $(t, \xi) \in \mathcal{D}(\varphi)\ \forall \xi \in M$.

Potom $\varphi(t, \cdot)$ je difeomorfismus.

Důkaz. Bijekce: z jednoznačnosti.

C^1: $D_\xi \varphi(t, \xi)$ derivace (podle ξ) existuje

V. 4.3.: $\psi(t) := D_\xi \varphi(t, \xi)$, potom: $\psi'(t) = A(t)\psi(t)$, $\psi(0) = id$

Liouville: $J \neq 0$. □

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{míra množiny}}}{|M_t|} = \int_{M_t} dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{věta o substituci}}}{=} \int_{(\varphi(t))^{-1}(M)} |J|\, d\xi = \int_M \underbrace{|\det D_\xi \varphi(t, \xi)|}_{\text{pokud } = 1} d\xi = \int_M d\xi = |M|$$

Protože $D_\xi \varphi(t, \xi) = \psi(t)$ $\psi'(t) = A(t)\psi(t)$

det( ) $= w(t)$ $w'(t) = \underbrace{tr(A(t))}_{\text{pokud } = 0} w(t) \Rightarrow w = \text{konst}$

$w(0) = 1$ ($\det[id] = 1$)

$A(t) = \nabla_x f(\varphi(t, \xi))$

$tr(A(t)) = tr(\nabla_x f(\varphi(t, \xi))) = \underbrace{[div_x f](\varphi(t, \xi))}_{=0}$

Závěr: Pokud $= 0\ \forall t$, zachovává se objem.

(L) $x' = A(t)x + b(t)$ $\qquad$ $A(t), b(t)$ spoj. na (α, β)

$\quad x(t_0) = x_0$ $\qquad$ $t_0 \in (\alpha, \beta)$

$\exists!$ řešení na (α, β)

(H) $b(t) \equiv 0$ homogenní úloha

fundamentální matice $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{2n}$

$\Phi' = A(t)\Phi$

$\Phi(t)$ je regulární pro $\forall t$

obecné řešení (H) má tvar $\Phi(t)c$; $c \in \mathbb{R}^n$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Věta 5.4. (variace konstant)

Řešení úlohy (L) lze zapsat ve tvaru

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\, b(s)\, ds,$$

kde $\Phi(t)$ je libovolná fundamentální matice.

Důkaz. Idea: $x(t) = \Phi(t)c(t)$; $c(t) \in \mathbb{R}^n$

$\overset{?}{} \; x' = A(t)x + b(t)$

$$\underbrace{\cancel{\Phi'(t)c(t)}}_{\substack{\| \\ A(t)\Phi(t)}} + \Phi(t)c'(t) = \cancel{A(t)\Phi(t)c(t)} + b(t)$$

$$c'(t) = \Phi^{-1}(t)\, b(t) \qquad \Big/ \int_{t_0}^{t}$$

$$c(t) = c_0 \quad + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\, b(s)\, ds$$

$\Rightarrow$ $x(t) := \Phi(t)\, c(t)$ řeší (L)

Počáteční podmínka: $x(t_0) = \Phi(t_0)\, c_0 = x_0$

$\Rightarrow c_0 = \Phi^{-1}(t_0)x_0$

$\square$

6. Lineární soustavy s konstantními koeficienty

(LKH) $\quad x' = Ax$; $A \in \mathbb{R}^{n^2}$ … konstantní matice.

$\quad x(t_0) = x_0$

Definice. Pro matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definujeme normu

$$\|A\| := \sup\{|Ax| \,;\, x \in \mathbb{R}^n,\ |x| \le 1\}.$$

Věta 6.1. (Vlastnosti normy matice.)

Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potom

(i) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \iff A = 0$

(ii) $\|\lambda A\| = |\lambda|\, \|A\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(iii) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$

(iv) $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$

(v) $|Ay| \le \|A\|\,|y| \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$

(vi) $|Ay| \geq \|A^{-1}\|^{-1}\, |y| \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$, je-li A regulární.

Důkaz. (i), (ii), (iii) cvičení

(v) $y = 0$ … jasné

$y \neq 0$ … položme $x := \frac{y}{\|y\|}$, tj. $|x| = 1$

Potom $|Ay| = |A(|y|\, x)| = |y| \cdot \underbrace{|Ax|}_{\le \|A\|} \le \|A\|\,|y|$

(iv) nechť $|x| \le 1$.

$|ABx| \overset{(v)}{\le} \|A\|\,|Bx| \overset{(v)}{\le} \|A\|\,\|B\|\, \underbrace{|x|}_{\le 1}$

přechod k $\sup_{|x| \le 1}$: $\|AB\| < \|A\|\|B\|$

(vi) plyne z (v) (cv.)

$\square$

Poznámky. (i) $\|A\|$ je norma v $\mathbb{R}^{n\times n}$.

$$\|A\|_\infty := \max_{i,j} |A_{ij}| \ \dots \text{ norma v } \mathbb{R}^{n\times n}$$

normy v $\mathbb{R}^n$ jsou ekvivalentní

$$\Rightarrow \exists\, c_1, c_2 > 0: \ c_1\|A\| \le \max_{i,j} |A_{ij}| \le c_2 \|A\|$$

$$A_n \longrightarrow A \ (\text{v normě } \|.\|) \iff A_n \xrightarrow{\|\,\|_\infty} A \iff$$

$$\iff A_n \longrightarrow A \text{ v každé složce.}$$

(ii) $\sum_k \|B_k\|$ kvg. $\Rightarrow \sum_k B_k$ kvg. $\left(\exists B: \sum_{k=1}^{n} B_k \xrightarrow[\|\cdot\|]{n\to\infty} B\right)$

Toto tvrzení platí v každém Banachově prostoru.

Věta 6.2. Funkce $U(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$; $t \in \mathbb{R}$

$(A^0 = I,\ t^0 = 1)$

je fundamentální matice problému (LKH) a platí

$U(0) = I$.

Důkaz. ? konvergence: $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} A^k t^k \right\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \underbrace{\|A^k\|}_{\le \|A\|^k} \le$

$\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (|t| \cdot \|A\|)^k$ kvg. (podílové kritérium)

$\Rightarrow$ konverguje dle předchozí poznámky.

? derivace: $U(t) \dots$ mocninná řada (poloměr konvergence $= \infty$) s maticovými koeficienty

$\Rightarrow$ lze derivovat „člen po členu":

$U(t) = I + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + \dots$

$U'(t) = \quad A + tA^2 + \frac{t^2}{2} A^3 + \dots = A\,U(t).$

$U(0) = I$ zjevné. $\square$

Věta 6.3. (Exponenciální funkce matice.)

Pro $A \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ definujeme funkci

$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$. (konverguje: $t = 1$ ve Větě 6.2.)

Potom platí:

(i) $e^{\lambda I} = e^{\lambda} \cdot I$; $\lambda \in \mathbb{R}$

(ii) $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A \cdot e^B$

(iii) $e^{C^{-1}AC} = C^{-1} e^A C$, C je regulární

(iv) $e^{-A} = (e^A)^{-1}$, speciálně e^A vždy regulární.

Důkaz. (i) snadné.

(ii) trik: tvrdíme: $AB = BA \Rightarrow B e^{At} = e^{At} B$

$$B e^{At} = B \sum_k \frac{1}{k!} A^k t^k \underset{\text{linearita sumy}}{=} \sum_k \frac{1}{k!} B A^k t^k = \left(\sum_k \frac{1}{k!} A^k t^k\right) B = e^{At} B.$$

$$(e^{At} \cdot e^{Bt})' = (e^{At})' e^{Bt} + e^{At} (e^{Bt})' \overset{V.6.2.}{=} A e^{At} e^{Bt} + e^{At} B e^{Bt} =$$

$$= (A+B)\, e^{At} e^{Bt}.$$

Tedy: $U(t) = e^{At} e^{Bt}$ řeší $U' = (A+B)U$; $U(0) = I$

$\tilde{U}(t) = e^{(A+B)t}$ řeší týž problém (V.6.2.)

jednoznačnost řešení $\Rightarrow \tilde{U} = U$, pro $t = 1$ máme hledaný závěr.

(iii) $e^{C^{-1}AC} = \sum_k \frac{1}{k!} (C^{-1}AC)^k$;

$(C^{-1}AC)^k = C^{-1}ACC^{-1}ACC^{-1}AC \dots = C^{-1}A^k C$

$\Rightarrow e^{C^{-1}AC} = \sum_k \frac{1}{k!} C^{-1} A^k C = C^{-1} e^A \cdot C$

(iv) $A, (-A)$ komutují $\overset{(ii)}{\Longrightarrow} e^A \cdot e^{-A} = e^{-A} \cdot e^A = e^0 = I$, neboli $e^{-A} = (e^A)^{-1}$

$\square$

Jak spočítat e^{At}… prakticky:

(1) $A = C^{-1}JC$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = C^{-1} e^{Jt} C$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & & \\ & e^{J_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_k t} \end{pmatrix}$$

Stačí uvažovat $e^{J_1 t}$, kde J_1 je Jordanova buňka

$$J_1 = \lambda I + L \; ; \; L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

komutují

$$e^{Jt} = \underbrace{e^{\lambda I t}}_{e^{\lambda t} I} \cdot e^{Lt}$$

$$L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$L^k = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \cdots 0}^{\text{k sloupců}} & 1 & \\ \vdots \quad \vdots & 0 & \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

je-li rozměr matice L roven m, pak $L^m = 0$.

$$e^{Lt} = I + tL + \frac{t^2}{2} L^2 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} L^{m-1} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

závěr: $$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} P_1(t) & & & \\ & e^{\lambda_2 t} P_2(t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_k t} P_k(t) \end{pmatrix}$$

prvky $P_i(t)$… polynomy st $\leq m_i - 1$.

m_i… řád buňky čísla λ_i

$\triangle$

Věta 6.4. (variace konstant pro systém s konstantní maticí.)

Řešení úlohy

$$x' = Ax + b(t),$$
$$x(t_0) = x_0,$$

($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ konst. matice

$b(t)$ spoj. v I, $t_0 \in I$)

lze napsat ve tvaru

$$x(t) = e^{tA}\left[e^{-t_0 A} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-As} b(s)\,ds\right]$$

Důkaz. V. 5.4.: $x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) b(s)\,ds$

$\Phi(t)$… fund. matice (libovolná)

položíme $\Phi(t) := e^{tA}$

$\square$

Opakování:

$A = C^{-1} BC$

$$B = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \ddots \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = C^{-1} e^{tB} C \qquad e^{tJ} = e^{\lambda t} P_m(t)$$

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & e^{tJ_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \qquad P_m(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & t & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$(\cdot): \; \|e^{tJ}\| = \underbrace{|e^{\lambda t}|}_{e^{(\mathrm{Re}\lambda)t}} \cdot \|P_m(t)\|$$

$\lambda \in \mathbb{C}$

$$c_1 \leq \|P_m(t)\| \leq c_2(1 + |t|^{m-1}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Značení. $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} ;\ \lambda \text{ vl. č. } A\}$

$\sigma_+ := \{\lambda \in \sigma(A) ;\ \mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$

$\sigma_- := \{\lambda \in \sigma(A) ;\ \mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$

$\sigma_c := \{\lambda \in \sigma(A) ;\ \mathrm{Re}\,\lambda = 0\}$

$X^+ := \mathrm{Lin}\{v ;\ v$ je (zobecněný) vl. v. pro $\lambda \in \sigma_+\}$

X^-, X^c ... analogicky.

Platí: $\mathbb{R}^n = X^+ \oplus X^- \oplus X^c$

invariance: $AX^+ \subset X^+$, stejné pro X^-, X^c.

Věta 6.5. (asymptotické chování řešení (LKH).)

Při výše uvedeném značení platí:

(1) [stabilní směry] $\exists c>0, \alpha>0\ \forall x_0 \in X^-$:
$|e^{tA}x_0| \le c \cdot e^{-\alpha t}|x_0| \quad \forall t \ge 0.$

(2) [nestabilní] $\exists c>0, \beta>0\ \forall x_0 \in X^+$:
$|e^{tA}x_0| \ge c \cdot e^{\beta t}|x_0| \quad \forall t \le 0.$

(3) [centrální] $\forall \varepsilon>0\ \exists c>0\ \forall x_0 \in X^c$:
$|e^{tA}x_0| \le c \cdot e^{\varepsilon|t|} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

Důkaz. (1) $A : X^- \to X^-$; def. $A^- := A|_{X^-}$, búno $A^- \sim B^- \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

$x_0 \in X^-$: $e^{tA}x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \underbrace{A^k x_0}_{[A^-]^k x_0} = e^{tA^-}x_0$

$e^{tA^-} = C^{-1}e^{tB^-}C$

$e^{tB^-} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & e^{tJ_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad e^{tJ_k} = e^{\lambda t} \cdot P_m(t)$

$\|e^{tJ_k}\| \le e^{(\mathrm{Re}\,\lambda)t} \underbrace{\|P_m(t)\|}_{c_1(1+|t|^m)}$

$\lambda_k \in \sigma^- \Rightarrow \mathrm{Re}\,\lambda_k \le -\alpha < 0$

$\Rightarrow \|e^{tA^-}x_0\| \le c_1 e^{-\alpha t}(1+|t|^n) \le c_2 e^{-(\alpha-\varepsilon)t} \quad \forall t \ge 0$

$\varepsilon > 0$ lib.; $c_2 = c_2(\varepsilon)$.

(2) analogicky

(3)

$$A^c \sim \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$e^{tJ} = e^{\lambda t} P_m(t)$; $\lambda \in \sigma^c \Rightarrow \mathrm{Re}\,\lambda = 0$

$\|e^{tJ}\| = \|P_m(t)\| \le c_1(1+|t|^n) \le c_2 e^{\varepsilon|t|} \quad \forall t \in \mathbb{R}$ $\square$

Dodatek. Pokud $\mathrm{Re}\,\lambda < 0\ \forall \lambda \in \sigma(A)$, máme odhad
$\|e^{tA}\| \le c \cdot e^{-\alpha t} \quad \forall t \ge 0,\ \alpha > \max_{\lambda \in \sigma(A)} \mathrm{Re}\,\lambda$

7. Stabilita řešení.

$x' = f(t,x)$; f je lipschitzovská

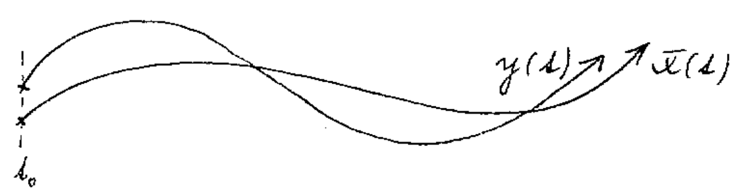
L 4.1.: $|x(t) - y(t)| \le |x(t_0) - y(t_0)| \cdot \exp(L|t-t_0|)$

Experimentálně: $|x(t_0) - y(t_0)| \sim 10^{-5}$

$L = 5$

pravá strana je řádu 1 už pro $|t - t_0| \ge 2.3$

Stabilita ... malá porucha počáteční podmínky se příliš nezvětší (nebo dokonce zmizí) pro $t \to \infty$.



Poznámka. $\bar{x}(t)$ ... řešení $x' = f(t,x)$

$y(t)$ ... jiné řešení

$u(t) := y(t) - \bar{x}(t)$

$u' = y' - \bar{x}' = \underbrace{f(t, u+\bar{x}) - f(t,\bar{x})}_{g(t,u)}$

stabilita $\bar{x} \Leftrightarrow$ stabilita $u \equiv 0$.

BÚNO: studujeme vždy stabilitu nulového řešení.

<u>Definice</u>. $f(t,x)$... spojitá v $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$I = \langle \tau, \infty)$; $f(t,0) = 0 \;\; \forall t \in I$

Potom řešení rovnice $x' = f(t,x)$ se nazývá

(i) <u>stabilní</u>: $\forall t_0 \in I \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tak, že

$|x_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon \;\; \forall t \geq t_0$

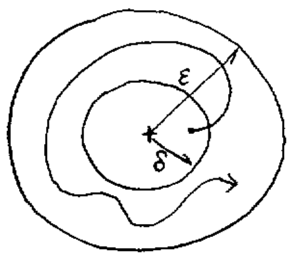
($\varphi(t, t_0, x_0)$... řešící funkce)

(ii) <u>nestabilní</u>, pokud není stabilní

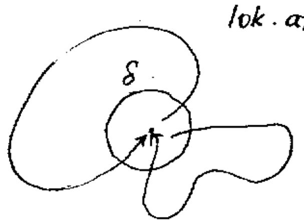
(iii) <u>lokální atraktor</u>: $\forall t_0 \in I \; \exists \eta > 0$:

$|x_0| < \eta \Rightarrow \varphi(t, t_0, x_0) \xrightarrow{t \to \infty} 0$

stabilita



lok. atraktor



(iv) <u>asymptoticky stabilní</u>, platí-li (i) & (iii).

(v) <u>uniformně stabilní</u>: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall t_0 \in I$:

$|x_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon \;\; \forall t > t_0$

(vi) <u>uniformně asymptoticky stabilní</u>; pokud je uniformně stabilní a navíc (iii) platí stejnoměrně vůči t_0, tj.

$\exists \eta > 0 \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists T > 0 \; \forall t_0 \in I$: (*)

$|x_0| < \eta \Rightarrow |\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon \;\; \forall t \geq t_0 + T$.

<u>Poznámka</u> (1) Stabilita $\Leftrightarrow$ spojitost $\varphi(t, t_0, x_0)$ v $x_0 = 0$, t_0-pev.,

stejná vůči $t \geq t_0$

uniformní: stejnoměrná vůči t_0

(2) Lokální atraktor neimplikuje spojitost.

(3) Autonomní rovnice: $x' = f(x)$:

stabilita $\Leftrightarrow$ uniformní stabilita

a. st. $\Leftrightarrow$ u. a. st.

Lineární rovnice: $x' = A(t)x + b(t)$; (L)

$\bar{x}$ řešení

y perturbované řešení

$u := y - \bar{x}$

$u' = A(t)u$ (LH)

$\bar{x}$ stabilní řešení (L) $\Leftrightarrow$ $u \equiv 0$ st. ř. (LH)

<u>Věta 7.1.</u> $A(t)$ spojitá v $I = \langle \tau, \infty)$, $\Phi(t)$... lib. fund. matice úlohy $x' = A(t)x$. Potom nulové řešení je

(1) stabilní $\Leftrightarrow$ $\|\Phi(t)\|$ je omezená v I

(2) uniformně stabilní $\Leftrightarrow$ $\exists C > 0 \; \forall s \leq t \in I$:

$\|\Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(s)\| \leq C$

(3) asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow$ $\|\Phi(t)\| \xrightarrow{t \to \infty} 0$

(4) uniformně asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \alpha, C > 0 \; \forall s \leq t \in I$: $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| < C e^{-\alpha(t-s)}$

Důkaz. $\varphi(t,t_0,x_0)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$

(1) „<=" $t_0\in I$ dáno. $|\varphi(t,t_0,x_0)|\le\underbrace{\|\Phi(t)\|}_{<K}\cdot\|\Phi^{-1}(t_0)\|\cdot|x_0|$

$\varepsilon>0$ dáno. Zvolme $\delta:=\frac{\varepsilon}{2K\|\Phi^{-1}(t_0)\|}$

$|x_0|<\delta\Rightarrow|\varphi(t,t_0,x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall t$

„=>" $\varepsilon=1$; $t_0=\tau\ldots\exists\delta>0:|x_0|\le\delta\Rightarrow|\varphi(t,t_0,x_0)|<1$

Tedy $|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0|<1$

y... libovolné; $|y|\le 1$

$x_0:=\delta y$;

$|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y|\le\frac{1}{\delta}$, přechod k sup y

$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\|\le\frac{1}{\delta}$;

$\|\Phi(t)\|=\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\Phi(t_0)\|\le\underbrace{\frac{1}{\delta}\|\Phi(t_0)\|}_{=:K}\quad\forall t\in I$

(2) cvičení

(3) „<=". $\|\Phi(t)\|\le 1$; $t\in\langle T,\infty)$

$\|\Phi(t)\|\le c$; $t\in\langle\tau,T\rangle$ ... spojitost na kompaktu

$\|\Phi(t)\|$ omezená $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ stabilita

$x(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$

$|x(t)|\le\underbrace{\|\Phi(t)\|}_{\to 0}\cdot\underbrace{\|\Phi^{-1}(t_0)x_0\|}_{\text{pevné}}\Rightarrow$ lokální (dokonce globální) atraktor

„=>" nechť 0 je lok. atraktor. Potom $\exists\eta>0$:

$|x_0|<\eta\Rightarrow|\varphi(t,\tau,x_0)|\xrightarrow{t\to\infty}0$

$\varepsilon>0$ dáno. $\exists T:|\varphi(t,\tau,x_0)|<\varepsilon$; $t>T$.

$|\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)x_0|<\varepsilon$; $t>T$, $\forall|x_0|\le\eta$

$\Rightarrow\|\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\|\le\frac{\varepsilon}{\eta}$

odtud dostáváme

$\|\Phi(t)\|\le\varepsilon\cdot\frac{1}{\eta\|\Phi(\tau)\|}$; $\forall t>T=T(\varepsilon)$.

libovolné pevné

Tedy $\|\Phi(t)\|\xrightarrow{t\to\infty}0$.

(4) „<=". $x(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$

$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\|\le C\quad\forall t\ge s\Rightarrow$ unif. stabilita dle (2)

$|x(t)|\le\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\|\cdot|x(t_0)|$

$|x(t)|\le C e^{-\alpha(t-t_0)}|x(t_0)|$;

$\eta=1$, $\varepsilon>0$ dáno

volba $T>0$: $c\cdot e^{-\alpha T}<\varepsilon$

$\Rightarrow|x(t)|<\varepsilon\ \forall t\ge T+t_0$

„=>". (*): $\exists\delta>0\ \forall\varepsilon>0\ \exists T\ \forall t_0\in I:|x(t_0)|<\delta\Rightarrow$

libovolné

$\Rightarrow|x(T+t_0)|<\varepsilon$

$|\Phi(T+t_0)\Phi^{-1}(t_0)x(t_0)|<\varepsilon$

$\Rightarrow\|\Phi(T+t_0)\Phi^{-1}(t_0)\|<\frac{\varepsilon}{\delta}=:\theta\in(0,1)$

δ dáno: fixujeme $\varepsilon\in(0,\delta)$, T.

$t\ge s$ libovolné

$s+T\quad s+2T\quad s+3T\quad s+mT\quad t\quad s+(m+1)T$

$\Phi(t)\Phi^{-1}(s)=\Phi(t)\Phi^{-1}(s+mT)\Phi(s+mT)\Phi^{-1}(s+(m-1)T)\ldots\Phi^{-1}(s+T)\Phi(s+T)\Phi^{-1}(s)$

$=\underbrace{\Phi(t)\Phi^{-1}(s+mT)}_{\|\ \|\le c_0}\cdot\prod_{j=1}^{m}\underbrace{\Phi(s+jT)\Phi^{-1}(s+(j-1)T)}_{\|\ \|\le\theta}$

$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\|\le c_0\cdot\theta^m=c_0e^{-m\alpha T}$, $\alpha:=-\frac{1}{T}\ln\frac{1}{\theta}$

$=c_0e^{-\alpha(t-s-T)}\le\underbrace{c_0e^{\alpha T}}_{C}\cdot e^{-\alpha(t-s)}$. □

Věta 7.2. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ... konstantní matice. Potom nulové řešení rovnice $x' = Ax$ je

(1) (uniformně) stabilní;
$\Leftrightarrow \operatorname{Re}\lambda \le 0 \;\forall \lambda \in \sigma(A)$, navíc pokud $\operatorname{Re}\lambda = 0$, příslušné jordanovy buňky jsou diagonální;

(2) (uniformně) asymptoticky stabilní
$\Leftrightarrow \operatorname{Re}\lambda < 0 \;\forall \lambda \in \sigma(A)$.

Důkaz. V. 7.1.: stabilita $\sim \|\Phi(t)\| = \|e^{tA}\|$

$A = CBC^{-1}$

$e^{tA} = Ce^{tB}C^{-1}$

$\|e^{tB}\|\, k_1 \le \|e^{tA}\| \le k_2 \|e^{tB}\|$, $k_{1,2}$ závisí na C, C^{-1}.

(1) stabilita $\Leftrightarrow \|e^{tA}\|$ ... omezená $t \in \langle 0, \infty)$

$\Leftrightarrow \|e^{tB}\|$ ... omezená

$\Leftrightarrow \|e^{tJ}\|$ ... omezená $\forall J$

$e^{tJ} = e^{\lambda t} \cdot \underbrace{P(t)}_{\text{polynomy, st = počet mimodiagonálních prvků}}$

$|e^{\lambda t}| = e^{\operatorname{Re}\lambda \cdot t}$

(2) asymptotická stabilita $\Leftrightarrow \|e^{tA}\| \to 0$

$\Leftrightarrow \|e^{tJ}\| \to 0 \;\forall J \Leftrightarrow e^{\lambda t} \to 0 : \operatorname{Re}\lambda < 0$

$e^{tJ} = e^{\lambda t} \cdot P_m(t) \qquad P_m \not\to 0$ $\square$

Poznámka. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\operatorname{Re}\lambda < 0 \;\forall \lambda \in \sigma(A)$: „hurwitzovská matice";
platí $\|e^{tA}\| < c \cdot e^{-\alpha t} \;\forall t \ge 0$, kde $\alpha < \gamma$,
$-\gamma := \max\{\operatorname{Re}\lambda, \lambda \in \sigma(A)\}$.

Lemma 7.1. Je dána rovnice $x' = Ax + g(t,x)$. Nechť platí $\|e^{tA}\| \le K \cdot e^{-\alpha t}$, $\forall t \ge 0$, nechť $g(t,x)$ je spojitá v $\mathbb{R}^{n+1}$ a platí
$|g(t,x)| \le \gamma |x| \;\forall t, x$, přičemž $\gamma < \frac{\alpha}{K}$.
Potom $x \equiv 0$ je uniformně asymptoticky stabilní.

Důkaz. $x(t)$ ... libovolné řešení, $x(t_0) = x_0$.
Búno $t_0 = 0$.
$x(t)$ řeší rovnici $x' = Ax + b(t)$, kde $b(t) = g(t, x(t))$.
variace konstant:

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} b(s)\, ds \;\forall t > 0.$$

$$|x(t)| \le |e^{tA} x_0| + \int_0^t |e^{(t-s)A} b(s)|\, ds \le \underbrace{\|e^{tA}\|}_{\le Ke^{-\alpha t}} \cdot |x_0| + \int_0^t \underbrace{\|e^{(t-s)A}\|}_{\le Ke^{-\alpha(t-s)}} |b(s)|\, ds$$

$$|x(t)| \le Ke^{-\alpha t}|x_0| + K\gamma \int_0^t e^{-\alpha t} e^{\alpha s} |x(s)|\, ds.$$

def $y(t) := |x(t)| e^{\alpha t}$

$$y(t) \le K|x_0| + \gamma K \int_0^t y(s)\, ds \;\forall t \ge 0$$

Gronwall: $y(t) \le K|x_0| \cdot e^{\gamma K t} \Rightarrow |x(t)| \le K|x_0| e^{(\alpha - \gamma K)t} =$
$= Ke^{-\beta t} \cdot |x_0|$
$\Rightarrow$ asymptotická stabilita. $\square$

Věta 7.3. (O linearizované stabilitě.)

Je dána rovnice $x' = f(x)$. Nechť $f(x_0) = 0$, f je C^1 na okolí x_0. Nechť $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ $\forall \lambda \in \sigma(A)$, kde $A = \nabla f(x_0)$. $(\in \mathbb{R}^{n\times n})$.

Potom x_0 je (uniformně) asymptoticky stabilní.

Důkaz. $A = df(x_0)$. Búno $x_0 = 0$

tj. $f(x) = \underbrace{Ax}_{\text{linearizace}} + \underbrace{g(x)}_{\text{malá porucha}}$; $\frac{g(x)}{|x|} \xrightarrow{x\to 0} 0$

V.6.5.: $\exists K, \alpha > 0$, $\|e^{tA}\| \le K e^{-\alpha t}$ $\forall t \ge 0$.

Zvolíme $\gamma < \frac{\alpha}{K}$, $\Delta > 0$: $|g(x)| \le \gamma |x|$ $\forall |x| \le 2\Delta$.

„seříznutý problém":

(M) $x' = Ax + \tilde{g}(x)$; $\tilde{g}(x) := \begin{cases} \eta(x) g(x); & |x| \le 2\Delta \\ 0 & ; \text{jinak}. \end{cases}$

$\eta(x)$ spojitá, $0 \le \eta \le 1$;

$\eta(x) = \begin{cases} 1; & |x| \le \Delta \\ 0; & |x| \ge 2\Delta \end{cases}$.

zjevně $|\tilde{g}(x)| \le \gamma |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$

L.7.1.: $\forall$ řešení (M) splňuje $|x(t)| \le K |x_0| e^{-\beta t}$ $\forall t \ge 0$.

nechť $|x_0| = |x(0)| \le \eta := \frac{\Delta}{K}$

$x(t)$ ... řešení (M) s touto počáteční podmínkou.

$|x(t)| \le K |x_0| e^{-\beta t} \le \Delta$ $\forall t \ge 0$.

$\Rightarrow \tilde{g}(x, t) = g(x, t)$, tj. $x(t)$ je zároveň řešení (neseříznuté) původní úlohy $x' = f(x)$ (jednoznačně určené, neboť $f(x) \in C^1$).

$(*) \Rightarrow$ asymptotická stabilita. $\square$

Věta 7.4. (O linearizované nestabilitě.)

Rovnice $x' = f(x)$, $f(x_0) = 0$, $f \in C^1(\mathcal{U}(x_0))$.

Nechť $\exists \lambda \in \sigma(A)$, $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, kde $A = \nabla f(x_0)$.

Potom x_0 je nestabilní.

Důkaz. Búno $x_0 = 0$. $x' = Ax + g(x)$, $\frac{g(x)}{|x|} \longrightarrow 0$ pro $|x| \longrightarrow 0$

$$A \sim \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & \eta & & \\ & \lambda & \eta & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \eta \ne 0 \text{ libovolné}$$

matice přechodu: $\begin{pmatrix} \eta & & & \\ & \eta^2 & & \\ & & \eta^3 & \\ & & & \ddots \; \eta^\ell \end{pmatrix}$

$$C^{-1} A C = B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \eta & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_2 & \eta \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Označme $y(t) = C^{-1} x(t)$ nestabilita $x(t)$

$x(t) = C y(t)$ $\Updownarrow$ nestabilita $y(t)$

$C y' = A C y + g(Cy)$ $/ \, C^{-1}$

$y' = By + f(y)$

$f(y) = C^{-1} g(Cy)$

$\frac{|f(y)|}{|y|} \longrightarrow 0$; $y \longrightarrow 0$.

$y_i' = \lambda_i y_i (+ \eta y_{i+1}) + f_i(y)$

$|y|^2 = \sum_i |y_i|^2 = \sum_j |y_j|^2 + \sum_k |y_k|^2$

j ... indexy, kde $\mathrm{Re}\,\lambda_j > 0$

k ... —"— $\mathrm{Re}\,\lambda_k \le 0$

def. kužel $K := \{ y ;\ \sum_j |y_j|^2 > \sum_k |y_k|^2 \}$.

Volme $\eta > 0 :\ 0 < 6\eta < \mathrm{Re}\,\lambda_j \quad \forall j$

$\delta > 0 :\ |f(y)| \le \eta |y| \quad \forall |y| < \delta$

$y(t)$ … řešení na $\langle t_0, t_0+a)$ takové, že

$|y(t)|^2 < \delta$; $\varphi(t) := \sum_j |y_j(t)|^2$

$\psi(t) := \sum_k |y_k(t)|^2$

nechť $\varphi(t) > \psi(t)$ na $\langle t_0, t_0+a)$.

obecně $y(t) \in \mathbb{C}^n$

platí: $(|z(t)|^2)' = (z \cdot \bar{z})' = z'\bar{z} + z\bar{z}' = 2\mathrm{Re}(z'\bar{z})$.

$$\frac{1}{2}\varphi' = \sum_j \mathrm{Re}(y_j' \bar{y}_j) =$$

$$= \sum_j \Big[\underbrace{\mathrm{Re}(\lambda_j y_j \bar{y}_j)}_{(1)} + \underbrace{\mathrm{Re}\,\eta\, y_{j+1}\bar{y}_j}_{(2)} + \underbrace{\mathrm{Re}(f_j(y)\bar{y}_j)}_{(3)}\Big]$$

$(1) = \sum_j (\mathrm{Re}\,\lambda_j)\cdot|y_j|^2 > 6\eta\varphi$ (ostrá, neboť $\varphi > 0$)

$$|(2)| \le \eta \sum_j (|y_j||y_{j+1}|) \overset{C-S}{\le} \eta \Big(\sum_j |y_j|^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_j |y_{j+1}|^2\Big)^{\frac12} \le \eta\varphi$$

$$|(3)| \le \sum_j |f_j(y)|\cdot|y_j| \le |f_j(y)|\cdot\varphi^{\frac12} \le \eta|y|\varphi^{\frac12} \le$$

$$\le \eta(\sqrt{\varphi}+\sqrt{\psi})^{\frac12} \le 2\eta\varphi$$

celkem:

$$\frac{1}{2}\varphi' > 6\eta\varphi - \eta\varphi - 2\eta\varphi > 3\eta\varphi. \qquad (\oplus)$$

Podobně

$$\frac{1}{2}\psi = \sum_k \Big[\mathrm{Re}(y_k\lambda_k\bar{y}_k) + \mathrm{Re}(\eta\, y_{k+1}\bar{y}_k) + \mathrm{Re}(f_k(y)\bar{y}_k)\Big] \le$$

$$\le \quad 0 \quad + \quad \eta\psi \quad + 2\eta\varphi^{\frac12}\psi^{\frac12} \le$$

$$\le \eta\psi + 2\eta\varphi.$$

trik: položme $\omega(t) := 4\eta\varphi(t)$.

$$\varphi'(t) > 6\eta\varphi(t) = 2\eta\varphi(t) + \omega(t)$$

$$\psi'(t) \le 2\eta\psi + 4\eta\varphi = 2\eta\psi(t) + \omega(t). \qquad (*)$$

$K := \overline{K \cap B(0,\delta)}$ — opustí hlavně díky nerovnosti $(\oplus)$, vzdálenost stále roste

$y(t): \langle t_0, t_1) \to \mathbb{R}^n$ řešení

$y(t_0) \in K$; t_1 … první čas opuštění K … kompakt.

ovšem ne po straně:

?? $\varphi(t_1) = \psi(t_1)$

$(*) \Rightarrow \varphi'(t_1) \ge \psi'(t_1) \Rightarrow \varphi(t) < \psi(t)$ nalevo od t_1 ↯

(spor s tím, že šlo o první čas opuštění)

$\Rightarrow |y(t_1)| = \delta$; přitom $y(t_0)$ … libovolně blízko $0 \Rightarrow$ nestabilita. □

Poznámka. (i) $x' = f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linearizovaná} \\ \text{část rovnice}}}{Ax} + g(x) \longleftarrow$ porucha (vyššího) (nižšího) řádu

- $\mathrm{Re}\,\lambda < 0 \ \ \forall \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow$ stabilita
- $\exists \lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Re}\,\lambda > 0 \Rightarrow$ nestabilita

nepřímá Ljapunovova metoda (princip linearizované (ne)stability)

(ii) Co když $\mathrm{Re}\,\lambda \le 0 \ \ \forall\lambda$
$\exists \lambda ;\ \mathrm{Re}\,\lambda = 0$
$\Rightarrow$ obecně nelze nic říci.

(iii) Existuje těsnější souvislost mezi řešeními $x' = f(x)$ a $u' = Au$?

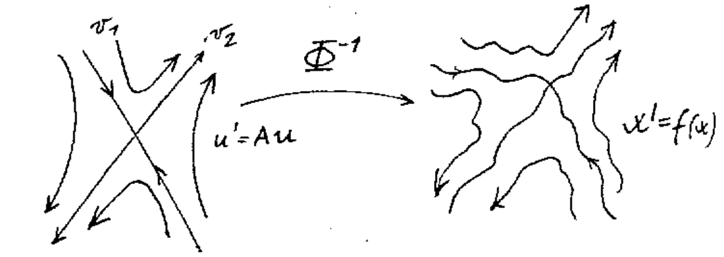
Věta. (Hartman-Grobmanova.)

Definice. x_0 se nazývá hyperbolický stacionární bod rovnice $x'=f(x)$,
pokud $f(x_0)=0$ a $\mathrm{Re}\,\lambda\neq 0$ $\forall\lambda\in\sigma(A)$, kde
$A=\nabla f(x_0)$.

Znění věty: Nechť x_0 je hyperbolický stacionární bod rovnice $x'=f(x)$. Potom $\exists\ \mathcal{U}$ okolí x_0, $\mathcal{V}$ okolí 0 a homeomorfismus $\Phi:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ přiřazující řešení rovnice $x'=f(x)\longmapsto$ řešení linearizované úlohy $u'=Au$.

Příklad. $A=\nabla f(x_0)\sim\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

$\lambda_1<0<\lambda_2$



Věta. (O stabilní varietě.)

$x'=f(x)$, $f(x_0)=0$, $f\in C^1(\mathcal{U}(x_0))$; $A=\nabla f(x_0)$.

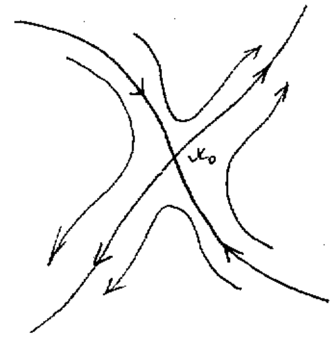
$X^-=\mathrm{Lin}\{v;\ v$ vlastní vektor pro $\lambda\in\sigma^-(A)\}=$

$=\{v;\ e^{tA}v\to 0,\ t\to\infty\}$; $m=\dim X^-$

$W^s(x_0):=\{y;\ \varphi(t,0,y)\to x_0,\ t\to\infty\}$, φ je řešící funkce pro $x'=f(x)$.

Potom $\exists\,\delta>0$: $W^s(x_0)\cap\mathcal{U}(x_0,\delta)$ je C^1-plocha dimenze m a navíc X^- je tečný prostor k $W^s(x_0)$ v bodě x_0.

Příklad. zpřesnění obrázku:



analogické tvrzení platí pro nestabilní varietu

$W^u(x_0)=\{y;\ \varphi(t,0,y)\longrightarrow x_0$ pro $t\longrightarrow-\infty\}$

8. První integrál.

(R) $x'=f(x)$; $\Omega\in\mathbb{R}^n$ ot.; $f:\Omega\xrightarrow{\text{spoj.}}\mathbb{R}^n$.

Definice. Funkce $U(\cdot):\Omega\to\mathbb{R}$ se nazve první integrál rovnice (R) v Ω, jestliže

(i) U je C^1 a nekonstantní

(ii) $U(x(t))=$ konst pro $\forall x(t)$ řešení R v Ω.

Příklad. (1) $x''+f(x)=0$ $\quad x'=y$, $y'=-f(x)$

$V=\frac{1}{2}y^2+F(x)$ je první integrál $F=\int f\,dx$.

(2) morová epidemie:

$S'=-aSI$ $\quad a,b>0$
$I'=aSI-bI$ $\quad S(t)\ldots$ zdraví
$R'=bI$ $\quad I(t)\ldots$ infekční
$R(t)\ldots$ neexistentní (mrtví)

$S'+I'+R'=0$

$S+I+R\ldots$ je 1. integrál

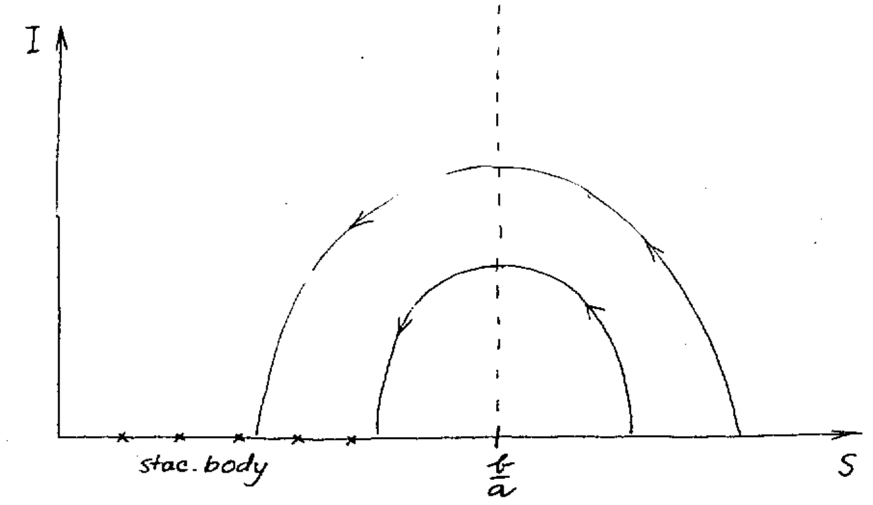
podělením rovnic:

$\frac{dI}{dS}=\frac{aSI-bI}{-aSI}=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{S}-1$; $I=I(S)$

$I=\frac{b}{a}\ln S-S+\text{konst}$

$\Rightarrow I+S-\frac{b}{a}\ln S$ je 1. integrál

$S' = -aSI$
$I' = I(aS-b)$



$I = C + \frac{b}{a}\ln S - S$

konkávní, $\longrightarrow -\infty$ pro $S \to 0+$

Věta 8.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ot., $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ spoj., $U: \Omega \to \mathbb{R}^n$ je C^1.
NPJE:
(i) $\forall x(t)$ řešení (R) v Ω je $U(x(t)) = \text{konst.}$
(ii) $\underbrace{\nabla U(\xi) \cdot f(\xi)}_{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} U(\xi) f_j(\xi)} = 0 \quad \forall \xi \in \Omega$.

Důkaz. $\frac{d}{dt} U(x(t)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} U(x(t)) \underbrace{x_j'(t)}_{f_j(x(t))} = \nabla U(x(t)) \cdot f(x(t))$

(ii) $\Rightarrow$ (i) $x(t): I \to \Omega$ řešení (R) ... $\frac{d}{dt} U(x(t)) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow U(x(t)) = \text{konst.}$

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\xi \in \Omega$ libovolné. V 1.1.: $\exists x(t): (-\delta, \delta) \to \Omega$
řešení (R), $x(0) = \xi$.
$U(x(t)) = \text{konst.}$
$0 = \frac{d}{dt} U(x(t)) = \nabla U(\underbrace{x(t)}_{\xi}) \cdot f(\underbrace{x(t)}_{\xi})$; $t = 0$

□

Poznámka. $\Gamma := \{y \in \mathbb{R}^n;\ U(y) = K\}$; $U: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je C^1
↑
nadplocha dimenze $(n-1)$
$y_0 \in \Gamma$, $\nabla U(y_0) \neq 0$
VIF: $\exists \delta > 0 \ldots \mathcal{U}(y_0, \delta) \cap \Gamma$ je graf C^1 fce $\Phi: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$.

Definice. První integrály $U_1, \ldots U_k$ jsou nezávislé v bodě x_0, jestliže matice

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{i=1,..k \\ j=1,...n}}$$

má hodnost k, neboli $\nabla U(x_0)$ jsou LN vektory.

Pozorování. Nechť x_0 není stacionární bod rovnice $x' = f(x)$. Potom na okolí x_0 existuje nejvýše $(n-1)$ prvních integrálů, které jsou nezávislé v x_0.

Důkaz. Sporem nechť $U_1, \ldots U_n$ jsou nezávislé 1. integrály v x_0
V. 8.1.: $\underbrace{\nabla U_i(x_0)}_{\text{generují } \mathbb{R}^n} \cdot f(x_0) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots n$.
$\Rightarrow f(x_0) = 0$ ↯

□

Věta 8.2. (O snížení řádu.)
$U_1, \ldots U_k$ jsou 1. integrály rovnice $x' = f(x)$, nezávislé v x_0. Potom řešení procházející bodem x_0 lze popsat systémem $(n-k)$ rovnic.

Důkaz. Označme $K_i := U_k(x_0)$, $\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^n;\ U_i(x) = K_i;\ i = 1, .. k\}$
nezávislost U_i ... búno $\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{i,j=1,...k}$ je regulární.
$\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{x}} = (x_1, \ldots x_k, \underset{\mathbb{R}^{n-k}}{\underset{\cap}{y}})$

VIF: $\exists\, C^1$ funkce $\varphi_j : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}$:

$\exists\, \delta > 0 : x \in \Gamma \cap \mathcal{U}(x_0, \delta) \iff x_j = \varphi_j(y);\ j = 1, \dots k.$

nechť $x(t)$ řeší $x' = f(x)$, $x : I \to \mathcal{U}(x_0, \delta)$, $x(0) = x_0$.

$\Rightarrow x(t) \in \Gamma \cap \mathcal{U}(x_0, \delta)\ \ \forall t \in (-\eta, \eta)$

$x_j(t) = \varphi_j(y) \quad j = 1, \dots k$

$x_l' = f_l(\varphi_1(y), \dots \varphi_k(y), x_{k+1}, \dots x_n) \quad l = k+1, \dots n$ $\square$

Příklad. $x'' = \frac{1}{2} e^x$

$x(0) = x'(0) = 0$

$T = ?\ ;\ x(T) = \ln 5$

úloha má smysl: $x'' > 0$

$\Rightarrow x$ je konvexní, $t = 0$ je globální minimum

$x'' \cdot x' = \frac{1}{2} e^x \cdot x' \quad ; \quad y = x'$

$y' y = \frac{1}{2} e^x \cdot x'$

$\left(\frac{1}{2} y^2\right)' = \left(\frac{1}{2} e^x\right)'$

$y^2 = e^x + C$

$V(x, y) = y^2 - e^x$ je 1. integrál

$x(0) = x'(0) = 0 \Rightarrow C = -1$

$y = x' = \underset{\substack{\uparrow \\ t > 0}}{+}\sqrt{e^x - 1}$

Barrow: $T = \int_0^{\ln 5} \frac{du}{\sqrt{e^u - 1}} = 2 \operatorname{arctg} 2.$

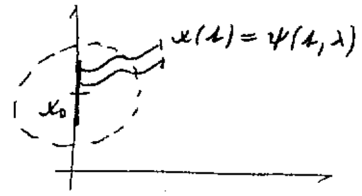
Věta 8.3. Nechť $f \in C^1(\mathcal{U}(x_0))$; $f(x_0) \neq 0$. Potom rovnice $x' = f(x)$ má na okolí x_0 $(n-1)$ 1. integrálů nezávislých v x_0.

Důkaz. Bůno $f_n(x_0) \neq 0$, $\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{x}} = (\underset{\mathbb{R}^{n-1}}{\underset{\cap}{y}}, x_n)$, $x_0 = (y_0, a)$

$\varphi = \varphi(t, t_0, x_0) \dots$ řešící funkce

$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$(t, \lambda_1, \dots \lambda_{n-1}) \mapsto \varphi(t, 0; \lambda_1, \dots \lambda_{n-1}, \alpha)$



ψ je C^1 na $(-\delta, \delta) \times \mathcal{U}(y_0, \delta)$ (4.2., 4.3.)

$\nabla \psi(0, y_0) = ?$

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \lambda_1}, \dots \frac{\partial}{\partial \lambda_{n-1}}\right)$

$\frac{\partial}{\partial t} \psi = f(\psi)\ ;\ \frac{\partial}{\partial t} \psi(0, y_0) = f(\underbrace{\psi(0, y_0)}_{x_0}) = f(x_0)$

$\psi(0, \lambda) = (\lambda_1, \dots \lambda_{n-1}, a)$

$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_j}(0, \lambda) = (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-tá pozice}}}{1}, 0, \dots 0)^T$

$$\nabla \psi(0, y_0) = \begin{pmatrix} f_1(x_0) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ f_n(x_0) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\det \nabla \psi(0, y_0) = (-1)^n f_n(x_0) \neq 0$

věta o inverzním zobrazení:

$\exists\, \delta > 0 : \psi : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U}(y_0, \delta) \longleftrightarrow V$ ot., $x_0 \in V$

$\psi^{-1} \in C^1(V)$. $\psi^{-1} : \xi \mapsto (t, \lambda_1, \dots \lambda_{n-1})$

Označení: $U_1(\xi), \dots U_n(\xi)$ … složky ψ^{-1}.

Tvrdíme: $U_2, \dots U_n$ jsou 1. integrály rovnice $x' = f(x)$ ve V; LN v x_0.

$(\cdot)$: $U_1(x(t)) = t$

$U_j(x(t)) = \lambda_{j-1} \quad \forall j = 2, \dots n$

pro $x(t)$ řešení rovnice s p.p.

$x(0) = (\lambda_1, \dots \lambda_{n-1}, a)$

$\Rightarrow U_j(x(t)) = \text{konst.}, \; j = 2, \dots n.$

$\nabla[\psi^{-1}(x_0)] = [\nabla\psi(0, y_0)]^{-1} \Rightarrow \nabla U_j(x_0)$ jsou LN,

spec. $\nabla U_j(x_0) \neq 0$; tj. U_j … nekonstantní. $\square$

Poznámka. U je 1. integrál rovnice $x' = f(x)$

$$\Rightarrow \sum \frac{\partial U}{\partial x_j} f_j = 0$$

Poznámka. Zobecnění: metoda charakteristik

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_j} f_j(x, U) = g(x, U); \\ &x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n; \; \underset{\text{neznámá funkce}}{U : \Omega \to \mathbb{R}} \\ &U|_{\Gamma} = u_0 \end{aligned}\right] \quad (PDR)$$

$\Gamma = \{(\lambda_1, \dots \lambda_{n-1}, a); \lambda \in \mathcal{U}(y_0, \delta)\}$

$$(S) \quad \begin{aligned} x_j' &= f(x, u) \\ u' &= g(x, u) \end{aligned} \qquad (\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{x(t)}}, u(t)) \in \mathbb{R}^{n+1} \qquad \begin{aligned} x(0) &= (\lambda_1, \dots \lambda_{n-1}, a) \\ u(0) &= u_0(\lambda_1, \dots \lambda_{n-1}, a) \end{aligned}$$

Řešící operátory: $\psi : (t, \lambda) \longmapsto x(t)$

$\chi : (t, \lambda) \longmapsto u(t)$

ψ, χ jsou C^1, ψ vyplní nějaké V..okolí x_0

$\psi^{-1} \in C^1$

pro $\xi \in V$ def. $U(\xi) := \chi(\psi^{-1}(\xi))$

Tvrdíme: $U \in C^1(V)$ a řeší (PDR)

Klíčové pozorování: $U(x(t)) = u(t)$

pro $\forall (x(t), u(t))$ řešení S ve V

$$\frac{d}{dt}: \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} U(x(t)) \underset{\underset{\underset{U(x(t))}{\shortparallel}}{f_j(x(t), u(t))}}{\underbrace{x_j'(t)}} = u'(t) = g(x(t), u(t)) = U(x(t))$$

$\xi \in V$ libovolné

$(x(t), u(t))$ řešení takové, že $x(t_j) = \xi$

$\Rightarrow$ splnění (PDR) v ξ.

také: $\underset{(t=0)}{U(\xi) = u_0(\xi)} \; \forall \xi \in \Gamma$

Poznámka. Γ může obecně být část C^1 plochy dim $(n-1)$, klíčová podmínka: $f(x_0)$ není sečný směr ke Γ v bodě x_0.

9. Rovnice vyššího řádu.

(1) $y^{(n)} = g(t, y, y', \dots y^{(n-1)})$

$y(t_0) = \xi_1$

$y'(t_0) = \xi_2$

$\vdots$

$y^{(n-1)}(t_0) = \xi_n$

D'Alembert (1790):

$$x_1(t)=y(t)$$
$$x_2(t)=y'(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n(t)=y^{(n-1)}(t)$$

(2) $x'=f(t,x)$, $x(t_0)=\xi$ $\qquad f(t,x)=\begin{pmatrix} x_2\\ \vdots \\ x_{n-1} \\ g(t,x)\end{pmatrix}$

$y(t)$ řeší (1) <=> $x(t)$ řeší systém (2)

Věta 9.1. $(t_0,\xi)\in\mathbb{R}^{n+1}$; $g(t,x)$ spojitá na okolí (t_0,ξ) $\Rightarrow \exists\,\delta>0$, $y(t):(t_0-\delta,t_0+\delta)\to\mathbb{R}$ třídy C^n řešící úlohu (1).

Důkaz. $f(t,x)$ spoj.; V 1.1.: $\exists\, x(t)$ řešení (2) (lokální); $x(t)\in C^1$

$y^{(n-1)}(t)=x_n(t)\in C^1 \Rightarrow y^{(n)}$ spoj., tj. $y\in C^n$. □

Věta 9.2. Je-li navíc $g(t,x)$ lokálně lipschitzovská vůči x, platí lokální (a tedy globální) jednoznačnost řešení a máme spojitou závislost na poč. podmínkách.

Důkaz. $g(t,x)$ lok. lip. $\Rightarrow f(t,x)$ lok. lip., V 2.1., V 2.2.
Spojitá závislost: malá změna $(t_0,\xi_1,\dots\xi_n)\Rightarrow$
$\Rightarrow$ malá změna $y(t), y'(t),\dots y^{(n-1)}(t)$. □

Lineární ODR n-tého řádu.

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(t)\,y^{(n-j)}=b(t);\quad a_j(t),\ b(t)\in C(\alpha,\beta);\ a_0(t)\neq 0 \qquad (3)$$

Věta 9.3. Nechť $t_0\in(\alpha,\beta)$, $\xi\in\mathbb{R}^n$. Pak $\exists!\, y(t)\in C^n(\alpha,\beta)$ řešení (3) s p.p. $y^{(j-1)}(t_0)=\xi_j$; $j=1,\dots n$.

Důkaz. BÚNO $a_0\equiv 1$ (vydělíme rovnici)

$$y^{(n)}=-\sum_{j=1}^{n} a_j(t)\,y^{(n-j)}+b(t)$$

D'Alembert:

$$\begin{pmatrix} x_1'\\ \vdots\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 0&1&0&\dots\\ 0&0&1&\dots\\ &&&1\\ -a_n(t)&\dots&\dots&-a_1(t)\end{pmatrix}}_{A(t)}\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ b(t)\end{pmatrix}}_{B(t)} \qquad (4)$$

$A(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$; $B(t)\in\mathbb{R}^n$ spojité v (α,β).

V 5.1. $\Rightarrow \exists!\, x(t)\in C^1(\alpha,\beta)$: řešení (4); $x(t_0)=\xi$

$\Rightarrow y(t):=x_1(t)\in C^n(\alpha,\beta)$… hledané řešení (3). □

Věta 9.4. Řešení homogenní úlohy

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(t)\,y^{(n-j)}=0 \qquad (5)$$

tvoří n-dimenzionální podprostor v $C^n(\alpha,\beta)$.

Důkaz. Def. zobrazení $F:\mathbb{R}^n\to C^n(\alpha,\beta)$
(volme $t_0\in(\alpha,\beta)$) $\qquad \xi\longmapsto y(t)$… řešení (5) splňující $y^{(j-1)}(t_0)=\xi_j$ $j=1,\dots n$

F je lineární bijekce $\Rightarrow \dim \underbrace{F(\mathbb{R}^n)}_{\text{množina řešení (5)}}=n$ □

Věta 9.5. (Variace konstant.)

Daná rovnice (3). Nechť pro $s \in (\alpha, \beta)$ první značí $\psi(t,s)$ řešení homogenní úlohy (5) splňující $y^{(j-1)}(s) = 0$, $j = 1, \dots n-1$

$$y^{(n-1)}(s) = 1.$$

Potom funkce

$$y_r(t) := \int_{t_0}^{t} \psi(t,s) \frac{b(s)}{a_0(s)} ds \text{ je řešení (3)}$$

splňující $y_r^{(j-1)}(t_0) = 0 \;\; \forall j = 1, \dots n.$

Lemma 9.1. Nechť $F(t) := \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)\, ds$, kde $\Phi \in C^1_{(s)}$

Potom $F'(t) = \Phi(t,t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t,s) ds.$

Bez důkazu.

Důkaz. (věty 9.5.)

$$y_r' \underset{\text{Lemma}}{=} \underbrace{\psi(t,t)}_{=0} \frac{b(t)}{a_0(t)} + \int_{t_0}^{t} \psi'(t,s) \frac{b(s)}{a_0(s)} ds$$

$$\left(\psi^{(j)}(t,s) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \psi(t,s)\right)$$

$$y_r'' = \underbrace{\psi'(t,t)}_{=0} \frac{b(t)}{a_0(t)} + \int_{t_0}^{t} \psi''(t,s) \frac{b(s)}{a_0(s)} ds$$

$$\vdots$$

$$y_r^{(n)} = \underbrace{\psi^{(n-1)}(t,t)}_{=1} \frac{b(t)}{a_0(t)} + \int_{t_0}^{t} \psi^{(n)}(t,s) \frac{b(s)}{a_0(s)} ds$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(t) y_r^{(n-j)}(t) = \cancel{a_0(t)} \cdot \frac{b(t)}{\cancel{a_0(t)}} + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\sum_j a_j(t) \psi^{(n-j)}}_{=0, \text{ neboť } \psi(\cdot, s)} b(s) ds$$

p.p.: $y^{(j-1)}(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} \psi^{(j-1)}(t_0,s) \frac{b(s)}{a_0(s)} ds = 0.$ řeší hmg. úlohu.

$j = 1, \dots n$

$\square$

Příklad. $y'' + a^2 y = f(t)$

FSŘ: $\{\cos at, \sin at\}$

$\psi(t,s) := \frac{1}{a} \sin a(t-s)$ $\quad \psi(s, s) = 0$; $\psi'(s,s) = 1$

$$y_r(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{a} \sin(a(t-s)) f(s) ds$$

10. Stabilita podruhé.

- nepřímá metoda (linearizace)
- přímá metoda (Ljapunovské funkce)

(1) $x' = f(t,x)$, $f: I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ spoj.; $I = \langle t_0, \infty)$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $0 \in \Omega$.

$f(t,0) = 0 \;\; \forall t \in I.$

Definice. $\omega: \Omega \to \langle 0, \infty)$ se nazve pozitivně definitní, pokud je spojitá, $\omega(0) = 0$ a $\omega(x) > 0 \;\; \forall x \in \Omega \setminus \{0\}$.

Definice. Funkce $V(t,x): I \times \Omega \to \langle 0, \infty)$ se nazve Ljapunovská funkce pro (1) v Ω, jestliže

(i) V je spojitá; $V(t,0) = 0 \;\; \forall t \in I$;

(ii) $t \mapsto V(t, x(t))$ je nerostoucí $\forall x(t)$ řešení (1)

(iii) $\exists\, \omega$ pozitivně definitní v Ω taková, že $V(t,\xi) \geq \omega(\xi)$ pro $\forall \xi \in \Omega$.

Věta 10.1. Nechť (1) má v Ω Ljapunovskou funkci; potom nulové řešení je stabilní.

Důkaz. $t_0 \in I$, $\varepsilon > 0$ dáno $\overset{?}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0 \dots |x(t_0)| < \delta \Rightarrow |x(t)| < \varepsilon$ pro $\forall t \geq t_0$.

Buno $S_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| = \varepsilon\} \subset \Omega$.

$$\alpha := \min_{\substack{x \in S_\varepsilon \\ \uparrow \\ \text{kompakt}}} \omega(x) = \omega(x_0) > 0$$

$V(t_0, 0) = 0$ & V spojitá $\Rightarrow \exists \delta > 0 : V(t, y) < \alpha$ pro $\forall y \in U(0, \delta)$

(Buno $\delta < \varepsilon$.)

$x(t) \dots$ libovolné řešení, $|x(t_0)| < \delta$

$$\alpha > V(t, x(t_0)) \geq V(t, x(t)) \geq \omega(x(t)) \quad \forall t \geq t_0$$

Tvrdíme: $|x(t)| < \varepsilon \quad \forall t > t_0$

Sporem: $\exists t_1 > t_0 \dots |x(t_1)| = \varepsilon \Rightarrow \omega(x(t_1)) \geq \alpha$ ↯ $\square$

Poznámka. Pokud… $V \in C^1 \dots \frac{d}{dt} V(t, x(t)) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t)) + \sum_j \frac{\partial V}{\partial x_j}(t, x(t)) \cdot \underbrace{x_j'(t)}_{f_j(t, x(t))}$

$V(t, x(t))$ nerostoucí podél řešení (1) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j \leq 0 \quad \forall (t, \xi) \in I \times \Omega$.

(Důkaz podobně jako V. 8.1.)

Příklad.
$$\begin{cases} x' = -y - xy \\ y' = x + xy \end{cases}$$

linearizace …. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma(A) = \{\pm i\}$

$\Rightarrow$ V. 7.3., 7.4. nelze použít

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + xy}{-y - xy} = \frac{x(1+y)}{-y(1+x)}$$

$$y' \frac{y}{1+y} = -\frac{x}{1+x}$$

$$y - \ln(1+y) = -x + \ln(1+x) + C$$

! $y - \ln(1+y) + x - \ln(1+x)$ je 1. integrál v $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$.

$V \dots$ kandidát na Ljapunovskou funkci

? V poz. definitní:

$\varphi(t) = t - \ln(1+t) \geq 0$; $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

tedy $V(x, y) \geq 0$, $V(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$.

V. 10.1. $\Rightarrow$ stabilita počátku.

Věta 10.2. Nechť (1) má v Ω Ljapunovskou funkci V, která splňuje následující zesílené podmínky:

$\exists$ funkce ω, λ, η poz. definitní v Ω tak, že

$\lambda(\xi) \geq V(t, \xi) \geq \omega(\xi) \quad \forall \xi \in \Omega,\ t \in I$ a navíc

$\frac{d}{dt} V(t, x(t)) \leq -\eta(x(t)) \quad \forall\ x(t)$ řešení (1) v Ω.

Potom 0 je asymptoticky stabilní.

Lemma 10.1. Nechť ω je pozitivně definitní v Ω, $\varepsilon > 0 \dots \overline{\mathcal{U}(0,\varepsilon)} \subset \Omega$; $x_n \in \mathcal{U}(0,\varepsilon)$ a platí $\omega(x_n) \longrightarrow 0$. Potom $x_n \longrightarrow 0$.

Důkaz. Sporem.

$x_n \not\to 0 : \exists\, \delta > 0$, $\{x_n'\} \subset \{x_n\}$ podposloupnost, $|x_n'| \geq \delta$.

$\beta := \min\{\omega(x);\ \underbrace{\delta \leq |x| \leq \varepsilon}_{\text{kompakt}}\} > 0$

tedy $\omega(x_n') \geq \beta$ & $\omega(x_n') \longrightarrow 0$ ↯ $\square$

Důkaz (Věty 10.2.)

$0 \dots$ stabilní (V. 10.1., slabší předpoklady)

je 0 lokální atraktor?

Ze stability: $\exists\, 0 < \delta < \varepsilon;\ |x(t_0)| < \delta \Rightarrow |x(t)| < \varepsilon\ \forall t \geq t_0$.

Chceme: $x(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$.

1) $V(t, x(t)) \geq 0$, neroste $\Rightarrow V(t, x(t)) \xrightarrow{t\to\infty} a \in \mathbb{R}$

2) Integrací nerovnosti z předpokladů máme

$$\int_{t_0}^{t} \underbrace{\eta(x(s))}_{\geq 0}\, ds \leq V(t_0, x(t_0)) - \underbrace{V(t, x(t))}_{\to a};\quad t \to \infty$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \eta(x(s))\, ds < \infty.$$

Odtud ne nutně $\eta(x(t)) \longrightarrow 0$, ale $\exists\, t_n \to \infty$, $\eta(x(t_n)) \longrightarrow 0$.

Lemma 10.1.: $x(t_n) \longrightarrow 0$

3) $\lambda(\xi) \geq V(t, \xi) \Rightarrow \underbrace{\lambda(x(t_n))}_{\to 0} \geq V(t_n, x(t_n)) \geq 0$

$\Rightarrow V(t_n, x(t_n)) \longrightarrow 0$

Z kroku 1): $\lim_{t\to\infty} V(t, x(t))$ existuje, je tedy 0.

4) $V(t, x(t)) \geq \omega(x(t)) \geq 0 \Rightarrow \omega(x(t)) \longrightarrow 0 \xRightarrow{L.10.1.}$

$\Rightarrow x(t) \longrightarrow 0.$ $\square$

Poznámka. Dokázaná stabilita je uniformní. (nezávisí na t_0)

Věta 10.3. Je dána rovnice $x' = Ax$; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konst. Potom je ekvivalentní:

(i) 0 je uniformně asymptoticky stabilní;

(ii) $\operatorname{Re}\lambda < 0\ \forall \lambda \in \sigma(A)$;

(iii) $\exists\, \alpha, C > 0 : \|e^{tA}\| \leq C e^{-\alpha t}\ \forall t \geq 0$

(iv) $\exists\, B$ sym. poz. def. matice taková, že

$$A^T B + BA = -I \text{ (Ljapunovova rovnice.)}$$

Důkaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) V. 7.2.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) V. 7.1. (4)

(iii) $\Rightarrow$ (iv). $B := \int_0^\infty e^{tA^T} e^{tA}\, dt$

- Konvergence integrálu: $\|e^{tA^T} e^{tA}\| \leq \|e^{tA^T}\| \underbrace{\|e^{tA}\|}_{\leq Ce^{-\alpha t}}$

  $e^{tA^T} = (e^{tA})^T$, $\|D\| = \|D^T\|$;
- $B = B^T \dots$ cvičení;
- $\langle Bx, x\rangle = \langle (\int_0^\infty \dots) x, x\rangle = \int_0^\infty \langle e^{tA^T} e^{tA} x, x\rangle =$

  $= \int_0^\infty \|\underbrace{e^{tA}}_{\text{reg.}\,\forall t} x\|^2\, dt > 0\quad \forall x \neq 0$
- $A^T B = A^T \int_0^\infty (\dots)\, dt = \int_0^\infty \underbrace{A^T e^{tA^T}}_{v'} \underbrace{e^{tA}}_{u}\, dt = \left[e^{tA^T} e^{tA}\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{tA^T} e^{tA} A\, dt =$

  $v = e^{tA^T}$, $u' = Ae^{tA} = e^{tA}A$

  $= -I - BA.$

Poznámka. $A^TB + BA = -C$, C poz. def.

$$B := \int_0^\infty e^{tA^T} C e^{tA}\, dt.$$

(iv) $\Rightarrow$ (i). $V(x) := \langle Bx, x\rangle$ ... Ljapunovská funkce pro rovnici $x' = Ax$ (předpoklady V 10.2.)

$\sigma(B) \subset \langle \lambda, \mu\rangle$; $0 < \lambda \le \mu$

$\mu|x|^2 \ge \langle Bx, x\rangle \ge \lambda |x|^2$

$x(t)$ ... řešení:

$$\frac{d}{dt}\langle Bx(t), x(t)\rangle = \langle Bx', x\rangle + \langle Bx, x'\rangle =$$

$$= \langle BAx, x\rangle + \langle Bx, Ax\rangle = \langle \underbrace{(BA + A^TB)}_{-I} x, x\rangle = -|x|^2$$

neg. def.

$\square$

11. Sturmova srovnávací věta.

(1) $a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$

$a_i(t)$ spojité v $I = (\alpha, \beta)$

$a_0 \neq 0$

Věta 9.3.: $t_0 \in I$; η_0, η_1 dáno $\Rightarrow \exists!$ řešení $x(t) \in C^2(I)$,
$x(t_0) = \eta_0$,
$x'(t_0) = \eta_0$

Problém: rozložení nulových bodů netriviálního řešení.

Lemma 11.1. Nechť $x(t)$ je netriviální řešení rovnice (1). Potom

(i) je-li $x(t_0) = 0$, je $x'(t_0) \neq 0$.

(ii) je-li $x(t_0) = 0$ a $y(t)$ je jiné řešení (1), pro které též $y(t_0) = 0$, pak $y(t) = \lambda x(t)$ v I pro vhodné $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) množina $N(x) = \{t_0 \in I,\ x(t_0) = 0\}$ nemá v I hromadný bod.

Důkaz. (i) $x(t_0) = x'(t_0) \overset{\text{z jednoznačnosti řešení}}{\Rightarrow} x(t) \equiv 0$.

(ii) Položme $\tilde{y}(t) := \lambda x(t)$, kde $\lambda := \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$

$\tilde{y}(t)$ ... řeší (1); $\tilde{y}(t_0) = 0 = y(t_0)$
$\tilde{y}'(t_0) = \lambda x'(t_0) = y'(t_0)$

z jednoznačnosti: $y = \tilde{y} = \lambda x(t)$.

(iii) nechť $t_0 \in I$ je hromadný bod $N(x)$:

$\forall \delta > 0 : P(t_0, \delta) \cap N(x) \neq \emptyset$

$\exists t_n \to t_0$; $t_n \neq t_0$; $t_n \in N(x)$.

spojitost $\Rightarrow x(t_n) \to x(t_0) = 0$

dle (i): $x'(t_0) \neq 0 \Rightarrow x(t) \neq 0$ na nějakém $P(t_0, \delta)$ ↯

$\square$

Poznámky. (1) Důsledek. $N(x) \cap K$ je konečná pro $\forall K \subset I$ kompaktní.

$\Rightarrow$ má smysl hovořit o sousedním nulovém bodu.

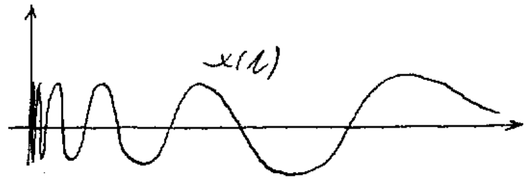
(2) $N(x)$ může být nekonečná s hromadnými body α, β (kraje I.)

Příklad. $t^2x'' + tx' + x = 0$ Eulerova rovnice

$x = t^\lambda$: $\lambda(\lambda-1)+\lambda+1=0$

$\lambda^2+1=0$

$t^i = e^{i\ln t} = \cos(\ln t) + i\sin(\ln t)$



Lemma 11.2. Rovnice (1) je vzájemně převoditelná na tvar

$$(p(t)x')' + q(t)x = 0, \qquad (2)$$
$$p, p', q \in C(I),\ p \neq 0$$

Důkaz. Derivováním (2):

$p(t)x'' + p'(t)x' + q(t)x = 0$ ... spec. tvar (1).

naopak, je-li (1) dána:

Búno $a_0 \equiv 1$, substituce: $x(t) = u(t)y(t)$, u vhodná funkce.

$x'(t) = u'(t)y(t) + u(t)y'(t)$

$x''(t) = u(t)y''(t) + 2u'(t)y'(t) + u''(t)y(t)$.

Dosazením do (1):

[(1) má tvar: $x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$]

$$uy'' + \underbrace{[2u' + Pu]}_{\text{chceme, aby } = 0}y' + \underbrace{[u'' + Pu + Qu]}_{\text{dělíme } u \neq 0}y = 0$$

$u' = -\frac{1}{2}Pu$ $\qquad y'' + \overbrace{\left[\frac{u''}{u} + P\frac{u'}{u} + Q\right]}^{R(t)}y = 0$

$u = \exp(-\frac{1}{2}\int P)$ $\qquad R(t) = -\frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}P' + Q$

$(y')' + R(t)y = 0$ ... spec. tvar (2). □

Poznámka. $u \neq 0 \Rightarrow$ přechod $x \to y$ zachová nulové body.

Věta 11.1. (Srovnávací.)

Nechť $x(t)$ je netriviální řešení (2)

$(p(t)x')' + q(t)x = 0$,

kde $p(t)$, $p'(t)$, $q(t)$ jsou spojité a $p(t) > 0$.

Nechť $y(t)$ je řešení rovnice (3):

$(p(t)y')' + q_2(t)y = 0$,

nechť t_1, t_2 jsou sousední nulové body funkce $x(t)$ a nechť (klíčový předpoklad): $q_2(t) \geq q_1(t)$ v $\langle t_1, t_2\rangle$. Potom

buď (i) $y(t)$ má v (t_1, t_2) nulový bod,

nebo (ii) $q_1 \equiv q_2$ v $\langle t_1, t_2\rangle$ a $y(t) = \lambda x(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Fyzikální náhled: kmitání pružin

$p(t) = m$ ... hmotnost

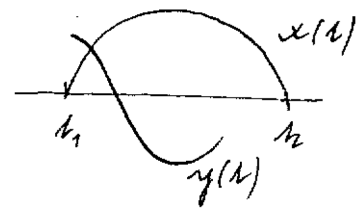
$x(t), y(t)$ ... vychýlení

q_1, q_2 ... tuhosti

$mx'' = -q_1x$

$my'' = -q_2y$

větší tuhost
⇒ kmitá rychleji



Důkaz. (Věty 11.1.)

$x(t) \neq 0$ v (t_1, t_2).

Bůno $x>0$.

$x(t_1)=0$.

Lemma (i): $x'(t_1)\neq 0$, zjevně $x'(t_1)>0$,

podobně $x'(t_2)<0$.

Cíl: $\neg$(i) $\Rightarrow$ (ii).

nechť $y(t)\neq 0$, bůno $y(t)>0$, v (t_1,t_2).

Spojitost $\Rightarrow$ $y(t)\ge 0$ na celém $\langle t_1,t_2\rangle$.

Trik: (2)·y − (3)·x:

$$(p^+x)'y - (p^+y)'x = [q_2-q_1]xy \quad \Big| \int_{t_1}^{t_2} dt$$

(LS): per partes:

$$[px'y - \underbrace{pxy'}_{0=x(t_1)=x(t_2)}]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}(\underbrace{px'y' - py'x'}_{0})\, dt =$$

$$= (*)\ \underbrace{p(t_2)}_{>0}\underbrace{x'(t_2)}_{<0}\underbrace{y(t_2)}_{\ge 0} - \underbrace{p(t_1)}_{>0}\underbrace{x'(t_1)}_{>0}\underbrace{y(t_1)}_{\ge 0} =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\underbrace{[q_2(t)-q_1(t)]}_{\ge 0}\underbrace{x(t)y(t)}_{\ge 0}\,dt$$

$\Rightarrow$ obě strany $=0$

$\Rightarrow$ $y(t_1)=y(t_2)=0$ (jinak $LS<0$)

$PS=0 \Rightarrow \underline{q_2\equiv q_1}$, jinak $q_2>q_1$ na $(c,d)\subset(t_1,t_2)$,

$x,y>0$ na (t_1,t_2) $\Rightarrow PS>0$ ↯.

$\Rightarrow$ $x(t), y(t)$ řeší stejnou rovnici, $x(t_1)=y(t_1)=0$

$\Rightarrow$ (Lemma 11.1.(ii)) $\Rightarrow$ $y=\lambda x$. □

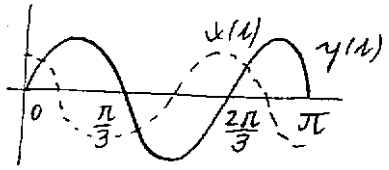
Příklad. (a) $x''+(9+\sqrt{t})x=0$; $t\in\langle 0,\pi\rangle$

(b) $y''+9y=0$

(·): (a) „kmitá rychleji"

(b) $\Rightarrow$ $y(t)=\sin 3t$ ... netriviální řešení.

$x(t)$ libovolné řešení (a) ... má v $\langle 0,\pi\rangle$ alespoň 3 nulové body



(Situace (ii) nenastává.)

Věta 11.2. (Sturmova.)

nechť $\{u(t), v(t)\}$ je libovolný fundamentální systém rovnice

(2) $(p(t)x')' + q(t)x = 0$, kde

p, p', q spojité, $p\neq 0$.

Označme $N(u), N(v)$ ... nulové body $u(t)$, resp. $v(t)$.

Potom $N(u)\cap N(v)=\emptyset$ a mezi každými dvěma sousedními prvky $N(u)$ leží právě jeden prvek $N(v)$.

Důkaz. $t_0\in N(u)\cap N(v) \overset{L.11.1.}{\Longrightarrow} u=\lambda v$ ↯ u,v LN (FSŘ).

$t_1<t_2\in N(u)$ ... sousední: V 11.1.:

situace $q_1\equiv q_2=q$; víme, že $u\neq\lambda v$, tedy musí nastat bod (i):

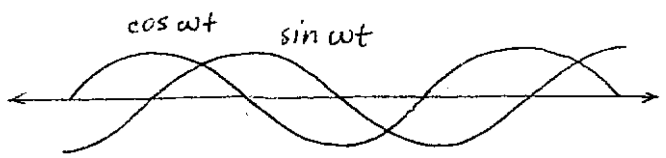
$\exists t_0\in N(v)\cap(t_1,t_2)$

je jediný, neboť vztah u,v je vzájemný. □

Příklad. $x'' + \omega^2 x = 0$

$\omega > 0$.

FSŘ: $\{\cos\omega t, \sin\omega t\}$



12. Floquetova teorie.

Uvažujeme lineární rovnici

$x' = A(t)x + b(t)$ (1)

$A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b(t) \in \mathbb{R}^n$, spojité, T-periodické v $\mathbb{R}$, $T>0$.

Otázky. (i) existence periodických řešení.

(ii) stabilita

Předběžné úvahy.

(i) $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dány, pak z v. 5.1.:
$\exists!$ řešení $x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x(t_0) = x_0$.

(ii) x řešení; $y(t) := x(t+T) \Rightarrow y$ je řešení.
Výpočet: $y'(t) = x'(t+T) = \underbrace{A(t+T)}_{A(t)}x(t+T) + \underbrace{b(t+T)}_{b(t)}$

(iii) řešení $x(t)$ je T-periodické $\Leftrightarrow x(T) = x(0)$.
Důkaz.
„$\Rightarrow$" zřejmé.
„$\Leftarrow$" polož $y(t) := x(t+T) \overset{(ii)}{\Rightarrow} y$ je řešení,
$y(0) = x(T) = x(0)$, takže řešení splňuje též počáteční podmínku.
Tedy z jednoznačnosti: $x(t) = y(t)$ $\forall t$,
ale $y(t) = x(t+T) \Rightarrow x(t) = x(T+t)$ □

Příklad. $x' = a(t)x$, $a(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-periodická.
Obecné řešení:
$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right)$
T-periodické $\overset{(iii)}{\Leftrightarrow} x(T) = x(0)$
$\Rightarrow \int_0^T a(s)\,ds = 0.$

Lemma 12.1. Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulární matice. Pak existuje matice B tak, že $e^B = A$. (B je obecně komplexní; není jednoznačně určena.)

Důkaz. Viz cvičení. □

Věta 12.1. (Floquetova.)
Nechť $\Phi(t)$ je fundamentální matice úlohy (1), nechť navíc $\Phi(0) = I$.
Potom existuje spojitá regulární T-periodická matice $Q(t)$ a konstantní matice B tak, že $\Phi(t) = Q(t)e^{Bt}$.

Důkaz. Položme $C := \Phi(t)$. Pak dle L. 12.1.: $\exists \tilde{B}: C = e^{\tilde{B}}$.
Definujeme $B := \frac{1}{T}\tilde{B}$, tedy $e^{TB} = C$.
Definujeme $Q(t) = \Phi(t)e^{-tB}$ ($\Leftrightarrow \Phi(t) = Q(t)e^{tB}$).
Zřejmě $Q(t)$ spojitá.
Periodicita: $Q(t+T) = \Phi(t+T)e^{-(t+T)B}$, $\Psi(t) := \Phi(t+T)$.
$(\cdot)$: $\Psi'(t) = A(t)\Psi(t)$; tedy $\Psi(t)$ je fundamentální matice soustavy (1). $\Psi(0) = \Phi(T) = C$.
$\overset{\text{jednoznačnost}}{\Rightarrow}$ $\Psi(t) = \Phi(t).C$. Tedy $Q(t+T) = \Phi(t).C\underbrace{e^{-TB}}_{C^{-1}}e^{-tB} =$
$\Phi(t)e^{-tB} = Q(t)$. □

Poznámka. Jinými slovy, Floquetova transformace $y(t) = Q^{-1}(t)x(t)$ převádí soustavu
$x' = A(t)x$
na soustavu
$y' = By$ (s konstantními koeficienty.)

Příklad. $x'(t) = a(t)x(t)$, $a(t)$ T-periodická.
(soustava 1×1)
$\Phi(t) = \exp(\int_0^t a(s)\,ds)$, $C = \exp(\int_0^T a(s)\,ds)$,
$B = \frac{1}{T}\int_0^T a(s)\,ds$,
$Q(t) = \exp(\int_0^t a(s)\,ds - \frac{t}{T}\int_0^T a(s)\,ds)$.

Definice. Matice C z předchozí věty se nazývá maticí monodromie (1).

C reprezentuje operátor řešení pro čas periody, C obsahuje všechny podstatné informace o soustavě ($\exists$-ce řešení, stabilita,...).

Věta 12.2. Daná soustava (1) $x' = A(t)x(t) + B(t)$, $A(t), b(t)$ spojité, T-periodické v $\mathbb{R}$.
Nechť C je matice monodromie.
Potom je ekvivalentní:
(i) (1) má právě jedno T-periodické řešení;
(ii) homogenní rovnice má pouze triviální T-periodické řešení.
(iii) $1 \notin \sigma(C)$.

Důkaz. (i)$\Leftrightarrow$(ii). Kdyby y_1, y_2 byla dvě různá řešení (1), potom $z := y_1 - y_2$ je netriviální řešení homogenní úlohy a naopak.
(ii)$\Leftrightarrow$(iii) $x(t)$ řešení $(1)_H$, tj. $x(t) = \Phi(t)x_0$, $x_0 = x(0)$.
Víme: x je T-periodické, takže $x(T) = x(0)$
$\Rightarrow \Phi(T)x_0 = x(T) = x(0) = x_0 \Rightarrow Cx_0 = x_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (C - I)x_0 = 0$.
Kdyby $x(t)$ bylo netriviální $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_0$ lze vzít $\neq 0 \Leftrightarrow 1 \in \sigma(C)$. $\square$