V 15.1.
V 16.1.
L 17.2.
L 17.7.
V 18.4.
V 18.8.
V 18.12.
V 19.5.

13. Úvod do dynamických systémů

Definice. Dynamický systém je (φ, Ω); $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (ot.);
$\varphi(t, x): \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$ spojité zobrazení, a platí:
(i) $\varphi(0, x) = x \ \forall x \in \Omega$,
(ii) $\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(s+t, x) \ \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in \Omega$
(semigrupová vlastnost)

Příklad. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ot., $f(x): \Omega \to \mathbb{R}^n$ spoj.

(1) $x' = f(x)$, $x(0) = x_0 \in \Omega$ definujeme $\varphi(t, x_0) \longmapsto x(t)$
„řešící funkce" $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0)$
$x(t_0) = x_0$
autonomní rovnice: $t_0 = 0$.

zjevně (i), (ii) platí

(φ, Ω) ... dyn. s. příslušný k rovnici (1).

$f \in Lip_{loc} \Rightarrow \varphi(t, x)$ je lokálně dobře definováno

Příklad. $x' = x^2$

$$\frac{x'}{x^2} = 1 \quad / \int_0^t ds$$

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = t$$

$$\frac{1}{x_0} - t = \frac{1}{x(t)} \Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{1 - t x_0}$$

$$\varphi: (t, x_0) \longmapsto \frac{x_0}{1 - t x_0}, \quad t x_0 < 1$$

$$\varphi(s, \varphi(t, x_0)) = \frac{\varphi(t, x_0)}{1 - s\varphi(t, x_0)} = \frac{\frac{x_0}{1 - t x_0}}{1 - s\frac{x_0}{1 - t x_0}} = \frac{x_0}{1 - (t+s)x_0}$$

Příklad. $x' = Ax$ ... $\varphi(t, x) = e^{tA}x$; $\forall t$
kanst. matice

Definice. (φ,Ω) dynamický systém, $x_0\in\Omega$.

$\gamma(x_0) := \{\varphi(t,x_0);\ t\in\mathbb{R}\}$ úplný orbit bodu x_0

$\gamma^+(x_0) := \{\varphi(t,x_0);\ t\geq 0\}$ dopředný orbit

$\gamma^-(x_0) := \{\varphi(t,x_0);\ t\leq 0\}$ zpětný orbit

Definice. $M\subset\Omega$ se nazve úplně invariantní, pokud $\forall x_0\in M: \gamma(x_0)\subset M$;

dopředně (pozitivně) invariantní: $\forall x_0\in M: \gamma_+(x_0)\in M$;

zpětně (negativně) invariantní: $\forall x_0\in M: \gamma_-(x_0)\in M$.

Definice. (φ,Ω) dynamický systém, $x_0\in\Omega$.
Omega-limitní množina bodu x_0 se definuje:

$\omega(x_0) := \{y\in\Omega,\ \exists t_k\to\infty,\ \varphi(t_k,x_0)\to y\}$

alfa-limitní množina:

$\alpha(x_0) := \{z\in\Omega;\ \exists t_k\to-\infty,\ \varphi(t_k,x_0)\to z\}$.

Poznámka. $y\in\omega(x_0) \iff \forall\varepsilon>0\ \varphi(t,x_0)\in\mathcal{U}(y,\varepsilon)$
pro libovolně velké t

Lemma 13.1. $\omega(x_0)=\bigcap\limits_{\tau\geq 0}\overline{\gamma_+(\varphi(\tau,x_0))}$,

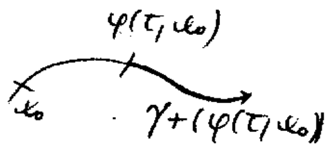
$\alpha(x_0)=\bigcap\limits_{\tau\leq 0}\overline{\gamma_-(\varphi(\tau,x_0))}$.

Důkaz. „$\subseteq$": $y\in\omega(x_0): \exists t_k\to\infty;\ \varphi(t_k,x_0)\to y$.

$\tau\geq 0$ libovolné pevné.

$\gamma_+(\varphi(\tau,x_0)) = \{\varphi(t,\varphi(\tau,x_0));\ t\geq 0\}$

$= \{\varphi(t+\tau,x_0);\ t\geq 0\}$



$\varphi(t_k,x_0)\in\gamma_+(\varphi(\tau,x_0))$ pro $t_k\geq\tau$

$\Rightarrow\ y\in\overline{\gamma_+(\varphi(\tau,x_0))}$

$\tau\geq 0$ libovolné $\Rightarrow y\in\bigcap\limits_{\tau\geq 0}\overline{\gamma_+(\varphi(\tau,x_0))}$.

„$\supseteq$". $y\in\bigcap\limits_{\tau\geq 0}\overline{\gamma_+(\varphi(\tau,x_0))}$.

$\forall k\in\mathbb{N}: y\in\overline{\gamma_+(\varphi(k,x_0))}$

$\exists z_k\in\gamma_+(\varphi(k,x_0)),\ |y-z_k|<\frac{1}{k}$

$z_k=\varphi(t_k,x_0);\ t_k\geq k$.

Tedy $z_k=\varphi(t_k,x_0)\xrightarrow{k\to\infty} y$

$t_k\to\infty \Rightarrow y\in\omega(x_0)$ dle definice. □

Věta 13.1. (Vlastnosti $\omega(x_0)$)

(i) $\omega(x_0)$ je uzavřená a invariantní.

(ii) Pokud $\gamma^+(x_0)\subseteq K$ kompaktní, pak $\omega(x_0)\neq\emptyset$, kompaktní, souvislá.

Důkaz. (i) Lemma 13.1. $\Rightarrow$ $\omega(x_0)$ je průnik uzávěrů $\Rightarrow$ je uzavřená.

nechť $y\in\omega(x_0)$; $t\in\mathbb{R}$ libovolné.

$\exists t_k\to\infty: \varphi(t_k,x_0)\to y$ $\quad/\ \varphi(t,\cdot)$ (spojité)

$\varphi(t+t_k,x_0)=\varphi(t,\varphi(t_k,x_0))\longrightarrow\varphi(t,y)$, (kvg. ze spojitosti φ)

$\varphi(t,y)\in\omega(x_0)$ dle definice.

Tedy: $y\in\omega(x_0);\ t\in\mathbb{R}\Rightarrow\varphi(t,y)\in\omega(x_0)$
$\Rightarrow$ úplná invariance.

(ii) nechť $\gamma^+(x_0)\subseteq K$ kompaktní.

$t_k\to\infty$ libovolná ($t_k\geq 0$), $\varphi(t_k,x_0)\in\gamma_+(x_0)$

$\exists$ podposloupnost $t'_k\to\infty$; $\varphi(t'_k,x_0)\to y\in\omega(x_0)$
$y\in K$.

$\omega(x_0)\subseteq K$ je uzavřená $\Rightarrow$ je kompaktní.

Souvislost sporem: nechť $\omega(x_0)$ není souvislá.

$\Rightarrow \exists\, G,H$ ot., disjunktní, neprázdné,

$\omega(x_0)\subset G\cup H$, $\omega(x_0)\cap G\neq\emptyset\neq H\cap\omega(x_0)$.

Zvolme $\overset{G}{y},\overset{H}{z}\in\omega(x_0)$. $\exists t_k\to\infty: \varphi(t_k,x_0)\to y$
& $s_k\to\infty: \varphi(s_k,x_0)\to z$. Buno $t_k<s_k<t_{k+1}$, $\varphi(t_k,x_0)\in G$,
$\varphi(s_k,x_0)\in H$.

$\psi_k := \{\varphi(t, x_0);\ t \in \langle t_k, s_k\rangle\}$ ... spojitá křivka

ψ_k protíná G i H, ale $\psi_k \not\subset G \cup H$.

$\Rightarrow \exists\, \tau_k \in (t_k, s_k);\ \varphi(\tau_k, x_0) \notin G \cup H$

$\tau_k \to \infty,\ \varphi(\tau_k, x_0) \to w$ (z kompaktnosti)

$w \in \omega(x_0)$ & $w \notin G \cup H$ $\lightning$ $\square$

<u>Poznámka</u>. Předpoklad kompaktnosti je podstatný.

<u>Tvrzení</u>. (φ, Ω) dynamický systém, $x_0 \in \Omega$.

Potom $\omega(x_0) = \{z\} \Leftrightarrow \varphi(t, x_0) \to z$ pro $t \to \infty$.

<u>Důkaz</u>. Dobrovolné cvičení. $\square$

<u>Definice</u>. $x' = f(x)$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ot., $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$.

$x_0 \in \Omega$ se nazývá ekvilibrium (singulární bod), pokud $f(x_0) = 0$.

$x_0 \in \Omega$ se nazývá regulární bod, pokud $f(x_0) \neq 0$.

<u>Poznámka</u>. x_0 je ekvilibrium $\Leftrightarrow \varphi(t, x_0) = x_0\ \forall t \in \mathbb{R}$.

<u>Definice</u>. (φ, Ω), (ψ, Θ) dynamické systémy se nazvou topologicky konjugované, existuje-li homeomorfismus $h: \Omega \to \Theta$ tak, že

$h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x))$ $(\Leftrightarrow \varphi(t, x) = h^{-1}(\psi(t, x)))$

<u>Poznámka</u>. Topologická konjugace zachovává „to podstatné" (periodicita řešení, stabilita ekvilibrií, ...)

<u>Věta 13.2.</u> (O rektifikaci.)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^r$, $r \geq 1$;

$f(x_0) \neq 0$ (x_0 je regulární bod).

Uvažujeme rovnici $x' = f(x)$ (1).

Potom $\exists\, V$ okolí x_0, W okolí 0 v $\mathbb{R}^n$ a homeomorfismus $g: V \to W$ tak, že je-li $x(t)$ řešení (1) ve V, je

$y(t) := g(x(t))$ řešení $y' = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ (2) ve W.

Jinak řečeno, (φ, V) a (ψ, W) jsou topologicky konjugované (φ, ψ jsou řešící funkce pro 1, resp. 2.)

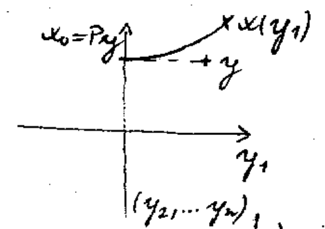
Dodatek: $g \in C^r$.

<u>Důkaz</u>. 1. krok. Búno $x_0 = 0$, $f(0) = \begin{pmatrix}\alpha\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$. Zvolíme $W \ni 0$.

Def. $G: W \to \mathbb{R}^n$

$(y_1, \dots y_n) \longmapsto \varphi(y_1, 0, y_2, \dots y_n)$

$\uparrow$
DS příslušný (1).



$(\cdot)$: $f \equiv \begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow G = Id$

W malé $\Rightarrow G$ je definováno a je třídy C^r

2. krok. $\nabla G(0) = ?$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial y_1}\right|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\overset{t}{0}, \overset{x}{0}) = f(\varphi(0,0)) = f(0) = \begin{pmatrix}\alpha\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

Připomeňme: $\varphi(\cdot, x)$ je řešení (1) $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\varphi = f(\varphi)$;

$\varphi(0, \cdot) = Id$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial y_k}\right|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial y_k}(\varphi(0, y_2, \dots y_n))\Big|_{y=0} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$ k-tá pozice.

$k = 2, \dots n$

Máme: $\nabla G(0) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ regulární

Věta o inverzní funkci: W: malé: $G|_W$ prosté, G^{-1} je C^2. Ozn. $g := G^{-1}$.

3. krok. $x(t)$ řeší (1) $\overset{?}{\Rightarrow}$ $y(t) := g(x(t))$ řeší (2)

ukážeme: $y(t)$ řeší (2) $\Rightarrow$ $x(t) := G(y(t))$ řeší (1).

$$x' = \frac{d}{dt} G(y(t)) = \frac{d}{dt} \varphi(y_1(t), (0, y_2(t), \dots y_n(t)))$$

$y(t)$ řeší (2): $y_1(t) = t + c$

$\left(y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ $\quad y_2, \dots y_n = \text{konst.}$

$$x' = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(y_1(t), (0, y_2(t), \dots y_n(t))) =$$

$$= f(\underbrace{\varphi(y_1(t), (0, y_2(t), \dots y_n(t)))}_{G(y(t))}) = f(x(t)).$$

$\square$

Věta. (Hartman–Grobman.)

Nechť $f(x_0) = 0$, $A := \nabla f(x_0)$, nechť $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ $\forall \lambda \in \sigma(A)$.

(x_0 je hyperbolický stac. bod.)

Potom dyn. systém odpovídající rovnici $x' = f(x)$ je v okolí 0 topologicky konjugovaný dyn. systému rovnice $y' = Ay$.

14. La Salleho princip invariance.

Opakování. $x' = f(x)$ (1); $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$, x_0 je ekvilibrium

x_0 stabilní: $|x(0) - x_0|$ malé $\Rightarrow$ $|x(t) - x_0|$ malé $\forall t \geq 0$

x_0 asymptoticky stabilní: stabilní + $|x(0) - x_0|$ malé $\Rightarrow$ $x(t) \to x_0$ pro $t \to \infty$.

Věta o linearizované (ne)stabilitě:

$A = \nabla f(x_0)$

(*) (i) $\forall \lambda \in \sigma(A)$: $\operatorname{Re} \lambda < 0 \Rightarrow x_0$ je as. stabilní,

(ii) $\exists \lambda \in \sigma(A)$: $\operatorname{Re} \lambda > 0 \Rightarrow x_0$ je nestabilní.

nepokrývá ale všechny možnosti.

Ljapunovská funkce: búno $x_0 = 0$, $\mathcal{U}$ okolí 0,

$V(x): \mathcal{U} \xrightarrow{\text{spoj.}} \langle 0, \infty)$

(i) $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ $\forall x \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$ (poz. def.)

(ii) $t \mapsto V(x(t))$ je nerostoucí pro $\forall x(t)$ řešení (1) v $\mathcal{U}$.

Definice. Orbitální derivací V vůči systému (1) rozumíme $\dot{V}(x) := \nabla V(x) \cdot f(x)$ $\forall x \in \mathcal{U}$.

Pozorování. $x(t)$ řešení (1); $\frac{d}{dt} V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot x'(t) = \dot{V}(x(t))$

Důsledek. $\dot{V} \leq 0$ na $\mathcal{U} \Rightarrow$ (ii).

Věta. $\exists$ Ljapunovská funkce $\Rightarrow$ x_0 je stabilní

Věta. $\exists$ Ljapunovská funkce & $\dot{V}$ je negativně definitní na $\mathcal{U}$ $\Rightarrow$ x_0 je asymptoticky stabilní.

Příklad. (Kyvadlo s tlumením.)

$x'' + q(x') + \cancel{\sin x}^{\,x} = 0$ (sinus nahradíme x, lokálně podobné, snazší)

tlumení: $q(0) = 0$,

$q(y)y > 0$ pro $y \neq 0$

$x' = y$

$y' = -q(y) - x$

$(0,0)$ stac. bod, ? stabilita.

$\nabla f = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & -q'(y) \end{pmatrix}$ Předpokládáme, že q je hladké.

$A = \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & a \end{pmatrix}$

$a = -q'(0) \leq 0$

Tvrzení: $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ splňuje $(*)$ $\Leftrightarrow$ $\det A > 0$, $\operatorname{tr} A < 0$

$\det A = 1$, $\operatorname{tr} A = a$

Závěr: $q'(0) > 0 \Rightarrow$ as. stabilita

$q'(0) = 0 \Rightarrow$ nevíme nic.

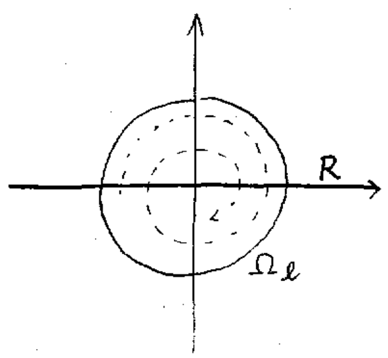
? Ljapunovská funkce

$V = x^2 + y^2$

$\dot V = 2x\cdot x' + 2y\cdot y' = 2xy + 2y(-q(y) - x) = -2q(y)y \leq 0$

$\Rightarrow$ stabilita.

? asymptotická stabilita — není neg. def.



$x' = \begin{pmatrix} y \\ -q(y) - x \end{pmatrix}\Big|_{y=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix}$

Věta 14.1. (La Salleho princip invariance.)

$x' = f(x)$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ot.; $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$;

$\exists V(x): \Omega \to \mathbb{R}$; C^1, zdola omezená.

$\exists l \in \mathbb{R}$ tak, že $\Omega_l := \{x \in \Omega; V(x) \leq l\}$ je omezená

a navíc $\dot V(x) \leq 0$ v Ω_l.

Označme $R := \{x \in \Omega_l, \dot V(x) = 0\}$,

$M := \{x \in R, \gamma(x) \subset R\}$ ... největší invar. podmnož. R.

Potom pro $x_0 \in \Omega_l$ je $\omega(x_0) \subseteq M$

(tj. „$x(t) \xrightarrow{dist.} M$".)

Příklad. Dokončení.

$V = x^2 + y^2$; $l = 1$; $\dot V = -2q(y)y$

$R = \{(x,0); x \in \langle -1, 1\rangle\}$

Ω_l ... 1-koule

$M = \{x_0 \in R; \gamma(x_0) \subset R\} = \{(0,0)\}$

$\Rightarrow x_0 \in \Omega_l \Rightarrow \omega(x_0) = \{(0,0)\} \Rightarrow x(t) \xrightarrow{t\to\infty} (0,0)$

Důkaz. (věty.)

$x_0 \in \Omega_l$; $y \in \omega(x_0)$. Cíl: $y \in M$.

$x(t) := \varphi(t, x_0)$ řešení jdoucí z x_0.

$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \dot V(x(t)) \leq 0$; tedy $x(t)$ neopustí Ω_l

funkce $t \mapsto V(x(t))$ je nerostoucí, zdola omezená

$\Rightarrow \exists\, c = \lim_{t\to\infty} V(x(t))$; $c \in \mathbb{R}$.

Tvrdíme: $V \equiv c$ na $\omega(x_0)$. $z \in \omega(x_0)$ ... $\exists t_k \to \infty$,

$x(t_k) \to z$, $\underbrace{V(x(t_k))}_{\to c} \longrightarrow V(z)$.

$\omega(x_0)$ je invariantní (V. 13.1.)

$y \in \omega(x_0) \Rightarrow \varphi(t, y) \in \omega(x_0)\ \forall t \Rightarrow V(\varphi(t,y)) \equiv c\ \forall t \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot V = 0$ na $\gamma(y)$. Tj. ukázali jsme:

$y \in \omega(x_0) \Rightarrow \gamma(y) \subset R \Leftrightarrow y \in M$.

□

15. Poincaré-Bendixsonova teorie.

Otázky existence periodických řešení v $\mathbb{R}^2$

Hilbertův 16. problém (1905):

$x' = f(x)$; $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ polynom

? počty izolovaných periodických řešení

Obecně je stále otevřený problém.

Definice. γ jednoduchá uzavřená křivka v $\mathbb{R}^n$ se nazve Jordanovou křivkou, existuje-li $\Psi(t) : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}^n$ spojitá parametrizace taková, že $\Psi|_{\langle 0,1)}$ je prosté a $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Jordanova věta. $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ Jordanova křivka

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 = \Omega_1 \cup \gamma \cup \Omega_2$, $\Omega_1 =$ „Int γ", $\Omega_2 =$ „Ext γ".

Situace. $x' = f(x)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ot., souvislá

$f : \Omega \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^2$

$\varphi(t,x)$ ... příslušný DS; $\varphi \in C^1$; definovaný alespoň pro $t \in \langle 0, \infty)$; $x \in \Omega$.

Věta 15.1. (Poincaré-Bendixson.)

Nechť $p \in \Omega$; $\overline{\gamma_+(p)}$ je kompaktní, nechť $\omega(p)$ neobsahuje stacionární bod. Potom $\omega(p) = \Gamma$, kde Γ je orbit netriviálního periodického řešení.

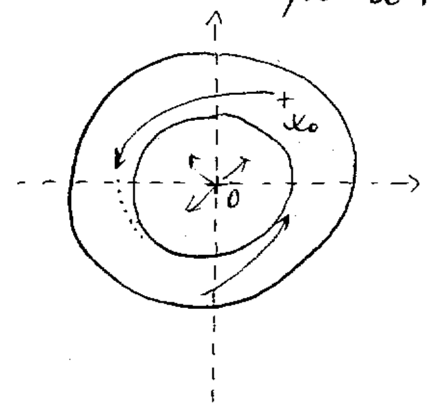
Příklad. $x' = x - y - x^3$

$y' = x + y - y^3$.

$V = x^2 + y^2$; $\dot V = 2x(x - y - x^3) + 2y(x + y - y^3)$

$= 2(x^2 + y^2 - (x^4 + y^4)) < 0$

pro $x^2 + y^2 = R^2$, R velké.



$\overline{\gamma^+(x_0)}$ je kompaktní

stac. body: pouze $(0,0)$

$A = \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

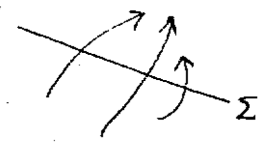
$\mathrm{Re}\,\lambda > 0 \ \forall \lambda \in \sigma(A)$

$\Longrightarrow (0,0) \notin \omega(x_0)$

P-B $\Rightarrow \exists\, \Gamma$.

Definice. Úsečka $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ se nazve transverzála, pokud pro $\forall p \in \Sigma$ vektor $f(p)$ není rovnoběžný se Σ.

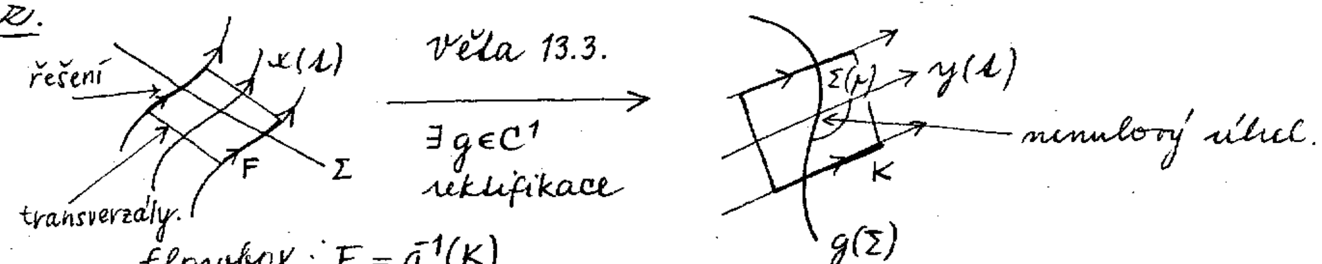
Poznámka.



Řešení protínají Σ nenulovou rychlostí a všechna ve stejném směru.

Lemma 15.1. Σ transverzála, $p \in \Sigma \Rightarrow \exists\, \mathcal{U}$ okolí p takové, že pro $\forall y \in \mathcal{U}$ je $\gamma(y) \cap \mathcal{U} \cap \Sigma \neq \emptyset$.

Důkaz.



flowbox: $F = g^{-1}(K)$

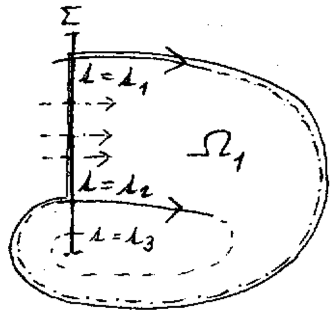
□

Lemma 15.2. $\Sigma \subset \Omega$ transverzála, $p \in \Omega$. Potom průsečíky $\gamma^+(p)$ a Σ tvoří monotónní sekvenci. Podrobněji:

pokud $t_1 < t_2 < t_3$ a $\varphi(t_i, p) \in \Sigma$, pak

buď $\varphi(t_1,p) = \varphi(t_2,p) = \varphi(t_3,p)$, (i),

nebo $\varphi(t_2,p)$ leží na Σ striktně mezi $\varphi(t_1,p)$ a $\varphi(t_3,p)$ (ii).



Ω_1 je Jordanova křivka

$x(t) \in \Omega_1$ pro $t > t_2$

$\varphi(t_3, p) \in \Omega_1$

Lemma 15.3. $\Sigma \subset \Omega$ transverzála, $p \in \Omega$.

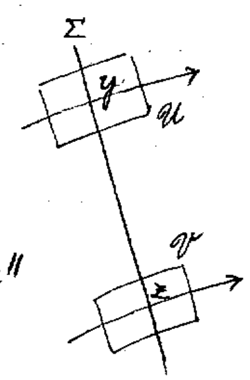
Potom $\omega(p) \cap \Sigma$ je nejvýše jednobodová.

Důkaz. Nechť $y, z \in \omega(p) \cap \Sigma$, $y \neq z$.

$\exists t_k \to \infty : \varphi(t_k, p) \to y$

$\exists s_k \to \infty : \varphi(s_k, p) \to z$

Búno $t_k < s_k < s_{k+1}$



$L.15.1. : \exists \mathcal{U}, \mathcal{V}$ okolí y, z „flowboxy"

$\exists t'_k$ blízko t_k; $\varphi(t'_k, p) \in \Sigma \cap \mathcal{U}$

$\exists s'_k$ blízko s_k; $\varphi(s'_k, p) \in \Sigma \cap \mathcal{V}$

spor s $L.15.2.$ $t'_k < s'_k < t'_{k+1}$

průseky nejsou monotónní. ↯

□

Důkaz. (Věty 15.1.)

Víme: $p \in \Omega$, $\overline{\gamma^+(p)}$ kompaktní, $\omega(p)$ neobsahuje stacionární bod.

$\overset{?}{\Rightarrow} \omega(p) = \Gamma$ periodický orbit.

Zvolme $q \in \omega(p)$ ($\omega(p) \neq \emptyset$: 13.1.)

1. krok. $q \in \Gamma$... periodický orbit.

Zvolme $x_0 \in \omega(q)$ ... $\gamma^+(q) \subset \omega(p)$

invariantní & kompaktní

$\Rightarrow \omega(q) \neq \emptyset$; $\omega(q) \subseteq \omega(p)$.

Speciálně $x_0 \in \omega(p)$.

Předpoklad: x_0 není stac. bod.

$\Rightarrow \exists$ transverzála $\Sigma \ni x_0$.

$x_0 \in \omega(q) \Rightarrow \exists t_n \to \infty$; $\varphi(t_n, q) \to x_0$

Lemma 15.1.: $\exists t'_n$ blízko t_n: $\underbrace{\varphi(t'_n, q)}_{z_n} \in \Sigma$

$x_0 \in \omega(p)$, $z_n \in \gamma^+(q) \subset \omega(p)$

$L.15.3. \Rightarrow z_n = x_0$ (pro n velké)

tj. $\varphi(t'_n, q) = \varphi(t'_{n+1}, q) = x_0$

$\Rightarrow \gamma(q) = \Gamma$... periodický orbit.

2. krok. Víme: $\Gamma = \gamma^+(q) = \omega(q) \subseteq \omega(p)$

? $\omega(p) \subseteq \omega(q) = \Gamma$

Sporem: $Z := \omega(p) \setminus \Gamma \neq \emptyset$

$\omega(p)$ je souvislá $\Rightarrow \Gamma$ a Z nejsou oddělené

$\exists p_n \in Z$; $\mathrm{dist}(p_n, \Gamma) \to 0$

Búno $p_n \to z \in \Gamma$

z není stac. bod $\Rightarrow \exists$ transverzála $\Sigma \ni z$;

$\exists$ „flowbox" $\mathcal{U}$.. okolí z

$p_n \in \mathcal{U} \Rightarrow \gamma(p_n) \cap \Sigma \neq \emptyset$

$p_n \in \omega(p) \Rightarrow \gamma(p_n) \subset \omega(p)$

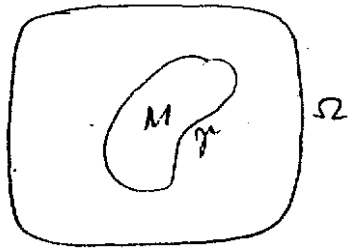
$L.15.3.: \gamma(p_n) \cap \Sigma = \{x_0\} \Rightarrow p_n \in \Gamma$ ↯

□

Věta 15.2. (Bendixson-Dulacovo kritérium.)
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, jednoduše souvislá, $f: \Omega \to \mathbb{R}^2$ je C^1.

1) Pokud $\operatorname{div} f > 0$ ($\operatorname{div} f < 0$) s.v. v Ω, pak rovnice $x' = f(x)$ nemá v Ω netriviální periodické řešení.
2) Pokud $\exists B: \Omega \to \mathbb{R}$ C^1-funkce taková, že $\operatorname{div}(Bf) > 0$ ($\operatorname{div}(Bf) < 0$) s.v. v Ω, potom neexistuje periodické řešení.

Důkaz. Sporem... $\exists \gamma \subset \Omega$ per. orbit; $M := \operatorname{int} \gamma \Rightarrow M \subset \Omega$



Gauss: $\displaystyle\int_M \operatorname{div}(Bf)\,dx\,dy = \int_\gamma (Bf \cdot n)\,ds$

n... normála $\perp$ tečna
$Bf(x)$ je rovnoběžné s tečnou

$\Rightarrow (Bf) \cdot n \equiv 0$
& $LS > 0$ ↯ □

Označení. B... dulacovská funkce

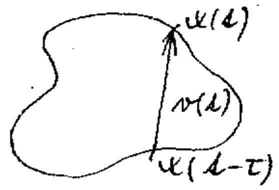
Věta 15.3. (φ, Ω) DS; $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ omezená, Ω obsahuje nejvýše konečný počet stacionárních bodů.
Potom pro $\forall p \in \Omega$ nastane jedna z možností:
(i) $\omega(p) = \{x_0\}$... stac. bod;
(ii) $\omega(p) = \Gamma$... periodický orbit
(iii) $\omega(p) = \{$konečná množina stac. bodů$\} \cup$
$\cup$ konečné (spočetné) sjednocení spojujících orbitů.

heteroklinický orbit

homoklinický orbit

Věta 15.4. (Yorkeova.)
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in Lip_L$.
Potom každé periodické řešení v Ω má periodu alespoň $\frac{2\pi}{L}$.

Důkaz. (Kukavica-Robinson.)
$x(t)$ T-periodické $\Rightarrow T \geq \frac{1}{L}$ (horší konstanta, myšlenka důkazu je podobná.)
$t \in \langle 0, T \rangle$; $\tau > 0$ fixujeme; $v(t) := x(t) - x(t-\tau)$



$$v(t) - v(s) = \int_s^t v'(r)\,dr \quad \Big| \int_0^T ds$$

$$T v(t) - \underbrace{\int_0^T v(s)\,ds}_{\substack{0 \\ \text{(z periodicity)}}} = \int_0^T \int_s^t v'(r)\,dr\,ds$$

$$\Rightarrow T|v(t)| \leq \int_0^T \int_0^T |v'(r)|\,dr\,ds = T \int_0^T |v'(r)|\,dr$$

$$|x(t) - x(t-\tau)| \leq \int_0^T |x'(r) - x'(r-\tau)|\,dr = *$$

$$|f(x(r)) - f(x(r-\tau))| \leq L|x(r) - x(r-\tau)|$$

$$* \leq L \int_0^T |x(r) - x(r-\tau)|\,dr \quad \Big| \int_0^T dt$$

$$\int_0^T |x(t) - x(t-\tau)|\,dt \leq TL \int_0^T |x(r) - x(r-\tau)|\,dr$$

$TL < 1 \Rightarrow x(t) \equiv x(t+\tau)$, $\tau > 0$ libovolné $\Rightarrow x = \text{konst.}$ ↯

$\Rightarrow T \geq \frac{1}{L}$. □

16. Caratheodoryova teorie.

$x' = f(t,x)$ „klasická teorie": $f \in C$, $x \in C^1$

__Definice.__ $x(t): I \to \mathbb{R}$ se nazve __absolutně spojitá__, pokud $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že pro libovolné disjunktní intervaly $(a_j, b_j) \subset I$ platí:

$$\sum_j (b_j - a_j) < \delta \Rightarrow \sum_j |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

__Poznámka.__ AC $\Rightarrow$ stejnoměrně spojitá

__Věta.__ $x \in AC(I) \Rightarrow x'\ \exists$ s.v. v I; $x' \in L^1(I)$ a $x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} x'(s)\,ds \quad \forall t_0, t_1 \in I$.

__Věta.__ $x \in AC(I) \Leftrightarrow \exists h \in L^1(I)$ a platí

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds.$$

__Věta.__ $g \in L^1(I)$ a def. $x(t) := \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$

$\Rightarrow x \in AC(I)$ a $x' = g$ s.v.

__Definice.__ $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f(t,x): \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Řekneme, že f splňuje v Ω __Caratheodoryovy podmínky__, znač. $f \in Car(\Omega)$, pokud

$\forall Q = I \times B$ válec ($I = \langle a, b\rangle$; B uzavřená koule) platí:

(i) $\forall x \in B$ pevné je $t \mapsto f(t,x)$ měřitelná;

(ii) pro s.v. $t \in I$ je $x \mapsto f(t,x)$ spojitá;

(iii) $\exists h \in L^1(I) \ldots |f(t,x)| \le h(t)\ \forall (t,x) \in Q$.

__Příklad.__ (1) $f(t,x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{|t|}}$

(2) $x' = A(t)x + b(t)$; $A(t), b(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$\|A(t)\|, \|b(t)\| < \infty$ s.v. $\Rightarrow$ (ii)

__Definice.__ $f \in Car(\Omega)$; $x(t): I \to \mathbb{R}^n$, graf $x \subset \Omega$.

Funkce x se nazve __řešením úlohy__ $x' = f(t,x)$ __v Caratheodoryově smyslu__, pokud

(i) $x \in AC(I)$;

(ii) $x'(t) = f(t, x(t))$ pro s.v. $t \in I$.

__Lemma 16.1.__ $f \in Car(\Omega)$; $x: I \to \mathbb{R}^n$, graf $x \subset \Omega$.

Potom

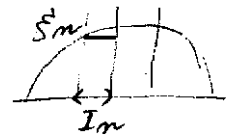
(i) x spojitá $\Rightarrow t \mapsto f(t, x(t)) \in L^1_{loc}$;

(ii) x je Caratheodoryovo řešení úlohy $x' = f(t,x) \Leftrightarrow$ platí

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds \quad \forall t \in I.$$

__Důkaz.__ (1) $x_n(t)$ po částech konstantní aproximace.

Zjevně $x_n(t) \to x(t)$ s.v.



$f(t, x_n(t)) \to f(t, x(t))$ (s.v. t) (Car(ii))

$f(t, x_n(t)) = f(t, \xi_n)$ na I_n … měřitelné dle Car(i)

$\Rightarrow f(t, x(t))$ měřitelná; $\in L^1_{loc}$ díky (iii)

(ii) z vlastností AC. □

__Poznámka.__ $f \in Car(\Omega) \Rightarrow$ lokální existence řešení, existence max. prodloužení.

Definice. $f \in Car(\Omega)$ je <u>zobecněně lipschitzovská vůči x</u>, jestliže
$\forall Q = I \times B \subset \Omega \ \exists m(t) \in L^1(I)$ tak, že:
$|f(t,x) - f(t,y)| \le m(t)|x-y|$ pro s.v. $t \in I$, $\forall x, y \in B$.

Poznámka. f je zobecněně lipschitzovská $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ lokální $\exists$-ce řešení $\Rightarrow$ globální.

Příklad. $f(t,x) = A(t)x + b(t)$; $A(t), b(t) \in L^1_{loc}$
$m(t) := \|A(t)\|$

Poznámka. $x' = Ax + b(t)$; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ konst., $b(t) \in L^1_{loc}$

$$x(t) = e^{At}\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-sA} b(s)\,ds\right]$$

je Carathéodoryovo řešení s p.p. $x(t_0) = x_0$

Věta 16.1. (Banachova o kontrakci – zobecněná.)
$\Phi: \Lambda \times X \to X$; X Banach, Λ metrický prostor, Φ spojité, $\exists K < 1: \|\Phi(\lambda,x) - \Phi(\lambda,y)\| \le K\|x-y\|$.
Potom
(i) $\forall \lambda \in \Lambda \ \exists!\, x(\lambda) \in X$ tak, že $x(\lambda) = \Phi(\lambda, x(\lambda))$
(ii) zobrazení $\lambda \mapsto x(\lambda)$ je spojité
(iii) $\forall \lambda \in \Lambda, y \in X: \|y - x(\lambda)\| \le \frac{1}{1-K}\|y - \Phi(\lambda,y)\|$.

Důkaz. (i) λ … pevné. $y \in X$ libovolné;
$y_0 := y$; $y_{n+1} = \Phi(\lambda, y_n)$
indukcí: $\|y_{n+1} - y_n\| \le K^n \|y_1 - y_0\|$
$\Rightarrow \{y_n\}$ cauchyovská $\Rightarrow y_n \to x(\lambda)$ … jediné řešení rovnice $x = \Phi(\lambda, x)$.

(iii) $\|y_{n+1} - y_n\| \le K^n \|\Phi(\lambda,y) - y\|$

$$\|y_{n+1} - y\| \le \sum_{j=0}^{n} \|y_{j+1} - y_j\| \le \left(\sum_{j=0}^{n} K^j\right)\|\Phi(\lambda,y) - y\| \quad ; n \to \infty$$

$$\|x(\lambda) - y\| \le \frac{1}{1-K}\|\Phi(\lambda,y) - y\|.$$

(ii) nechť $\lambda_n \to \lambda_0$ v Λ.
užijeme (iii): $y = x(\lambda_0)$
$\lambda = \lambda_n$

$$\|x(\lambda_0) - x(\lambda_n)\| \le \frac{1}{1-K}\|\underbrace{x(\lambda_0)}_{=\Phi(\lambda_0, x(\lambda_0))} - \Phi(\lambda_n, x(\lambda_0))\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

spojitost Φ v λ.

$\square$

Věta 16.2. $f(t,x): \langle 0,T\rangle \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, carathéodoryovská;
$|f(t,x) - f(t,y)| \le m(t)|x-y| \ \forall x, y, \forall t \in \langle 0,T\rangle$,
$m(t) \in L^1(\langle 0,T\rangle)$.

$\Rightarrow \exists!$ řešení úlohy $x' = f(t,x)$; $x(0) = x_0$ (1) definované na $\langle 0,T\rangle$,
řešení závisí spojitě na x_0.

Důkaz. $X = C(\langle 0,T\rangle, \mathbb{R}^n)$; $\|x(\cdot)\| := \sup_{t \in \langle 0,T\rangle} |x(t)| e^{-Lt}$, $L > 0$,

L určíme později.

$\Lambda := \mathbb{R}^n$; $\Phi: (x_0, x(\cdot)) \mapsto \hat{x}(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\,ds$; $t \in \langle 0,T\rangle$.
$x(\cdot)$ je řešení (1) $\Leftrightarrow \Phi(x_0, x(\cdot)) = x(\cdot)$
? kontrakce: $x(\cdot), y(\cdot) \in X$; $\hat{x}(\cdot) = \Phi(x_0, x(\cdot))$

$$|\hat{x}(t) - \hat{y}(t)| = \left|\int_0^t f(s,x(s)) - f(s,y(s))\,ds\right| \le \int_0^t m(s)\underbrace{|x(s)-y(s)|}_{A}\,ds$$

$A \le \|x(\cdot) - y(\cdot)\| e^{Ls}$

$$\|\hat{x}(\cdot) - \hat{y}(\cdot)\| \le \|x(\cdot) - y(\cdot)\| \cdot \sup_t \int_0^t m(s) e^{-L(t-s)}\,ds$$

TMI: $m = m_1 + m_2$; $\int_0^T |m_1| \le \frac{1}{4}$; $|m_2| \le K$

$$\int_0^t m(s) e^{-L(t-s)}\,ds = \int_0^t m_1(s) \underbrace{e^{-L(t-s)}}_{\le 1}\,ds + \int_0^t m_2 e^{-L(t-s)}\,ds \le \int_0^T |m_1| + K\int_0^t e^{-L(t-s)}\,ds \le$$

$\le \frac{1}{4} + \frac{K}{L} \le \frac{1}{2}$ pro L dost velké!

$\square$

17. Sturm-Liouvilleova teorie.

(1) $(p(t)x')' + (\lambda r(t) + q(t))x = 0$;

$\quad t \in \langle a,b\rangle$; $p, q, r \in C(I)$; $p, r > 0$

(2a) $c_1 x(a) + c_2 p(a) x'(a) = 0$;

(2b) $c_3 x(b) + c_4 p(b) x'(b) = 0$;

$\quad |c_1| + |c_2| \neq 0$, $|c_3| + |c_4| \neq 0$.

Pro jaká $\lambda \in \mathbb{R}$ existuje netriviální řešení?

$\mathcal{L}: x \mapsto (px')' + qx$

$\mathcal{L}x + \lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{váhová funkce}}}{r} x = 0$

Věta 17.1. Existuje posloupnost $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$, $\lambda_k \to \infty$, taková, že úloha (1)&(2ab) má netriviální řešení, právě když $\lambda = \lambda_k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Tato řešení tvoří OG bázi prostoru $L^2_r(a,b)$

$\left(\langle u, v\rangle_r = \int_a^b u(t) v(t) r(t)\, dt\right)$

Věta. A... rozumný operátor $\Rightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R}$, vlastní vektory tvoří OG bázi.

Příklad. $x'' + \lambda x = 0$; $t \in \langle 0, T\rangle$

$x(0) = 0$;

$x(T) = 0$;

$u_k(t) = \sin\left(\frac{tk\pi}{T}\right)$ ... OG báze $L^2((0,T))$

$\lambda_k = \sin\left(\frac{tk\pi}{T}\right)$

Prüferova transformace.

(1) $(\underbrace{px'}_{\xi})' + (\lambda r + q)\underbrace{x}_{\eta} = 0$

$p\eta' = \xi$

$\xi' = -(\lambda r + q)\eta$.

netriviální řešení (1) $\Leftrightarrow (\xi, \eta): \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Lemma 17.1. $(\xi(t), \eta(t)): I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ spojité

$\Rightarrow \exists\, \rho(t): I \to (0, \infty)$, $\phi(t): I \to \mathbb{R}$ spojité tak, že $\xi(t) = \rho(t)\cos\phi(t)$, $\eta(t) = \rho(t)\sin\phi(t)$

Navíc: ρ, ϕ jsou „stejně hladké" jako ξ, η,

$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$; ϕ je určeno až na posun o $2k\pi$

Náznak důkazu.

lokálně (VIF) + nalepení □.

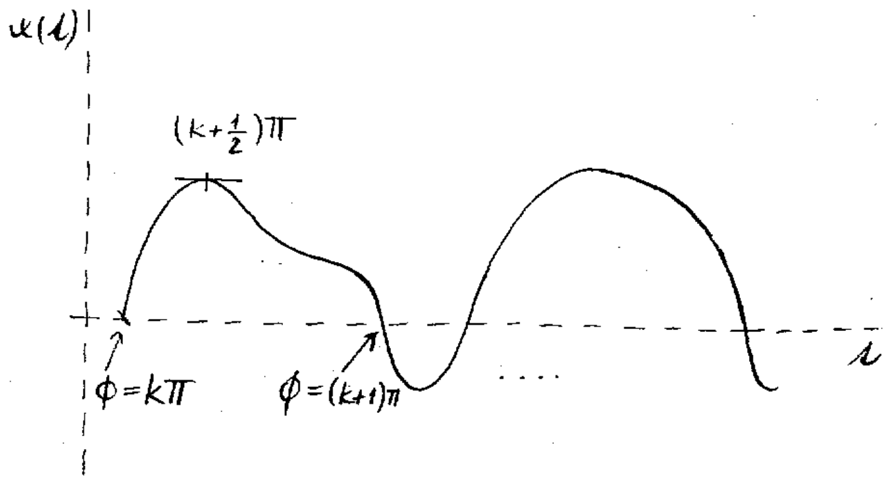
Aplikace. $px' = \rho\cos\phi$

$x = \rho \sin\phi$

dosazení do (1) - dostáváme

(3) $\rho' = \left[\frac{1}{p} - (\lambda r + q)\right]\rho\cos\phi\sin\phi$,

$\phi' = \frac{1}{p}\cos^2\phi + (\lambda r + q)\sin^2\phi$



Okrajové podmínky:

$c_1 x(a) + c_2 p(a) x'(a) = 0$

$(c_1, c_2) \neq 0$

Bůno $(c_1, c_2) = (\cos\alpha, -\sin\alpha)$, $\alpha \in \langle 0, \pi)$

$(p(a)x'(a)) \perp (-\sin\alpha, \cos\alpha)$

$\parallel (\cos\alpha, \sin\alpha) \iff \phi(a) = \alpha + k\pi$

(3a) $\phi(a) = \alpha + k\pi$; $\alpha \in \langle 0, \pi)$

(3b) $\phi(b) = \beta + l\pi$, $\beta \in (0, \pi\rangle$

(2a) $x(a)\cos\alpha - p(a)x'(a)\sin\alpha = 0 \quad \alpha \in \langle 0, \pi)$

(2b) $x(b)\cos\beta - p(b)x'(b)\sin\beta = 0 \quad \beta \in (0, \pi\rangle$

Problém: existence netriviálního řešení.

úloha je přezadaná ... pouze pro některá λ.

Prüfer: $px' = \rho\cos\phi$

$x = \rho\sin\phi$

(3) $\rho' = \left[\frac{1}{p} - (\lambda r + q)\right]\rho\cos\phi\sin\phi$

$\phi' = \frac{1}{p}\cos^2\phi + (\lambda r + q)\sin^2\phi$ $\quad \pi$ periodické ve ϕ

(3a) $\phi(a) = \alpha$

(3b) $\phi(b) = \beta + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

netriviální řešení (1)&(2ab) $\iff$ netr. ř. (3), (3ab)

$(\rho \neq 0)$

Strategie: vlastnosti funkce $\lambda \longmapsto \phi(b, \lambda)$

zapomenu (3b)

Lemma 17.2. 1) $\lambda \mapsto \phi(b, \lambda)$ je spojitá rostoucí funkce vůči λ

2) $\phi(b, \lambda) \to \infty$; $\lambda \to \infty$

3) $\phi(b, \lambda) \to 0$; $\lambda \to -\infty$.

Důkaz. závislost řešení na parametru

$\phi' = f(\lambda, \phi)$

$\phi(a) = \alpha$

$f = \frac{1}{p}\cos^2\phi + (\lambda r + q)\sin^2\phi$

$\uparrow$

omezená, hladká $\Rightarrow \exists!$ řešení na $\langle a, b\rangle$, spojitě závisí na λ

rostoucí: $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = r\sin^2\phi > 0$ „s.v."

2) $(px')' + \underbrace{(\lambda r + q)}_{Q(\lambda)} x = 0$

$\lambda \to \infty \Rightarrow Q \rightrightarrows \infty$ na $\langle a, b\rangle$

$n(x)$ ... počet nulových bodů $x(\cdot)$ v $\langle a, b\rangle$

$n(x) \xrightarrow{\lambda \to \infty} \infty$

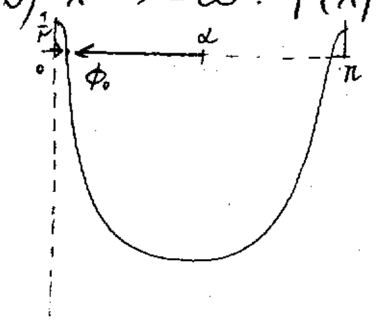
$Q(\lambda) > 0$ ... ϕ rostoucí v $\langle a, b\rangle$

$\phi(a) = \alpha$

$\phi(t) = m\pi$ pro velký počet různých m

$\Rightarrow \phi(b)$ velká

3) $\lambda \to -\infty$: $f(\lambda, \phi) = \frac{1}{p}\cos^2\phi + \underbrace{(\lambda r + q)}_{-K}\sin^2\phi$



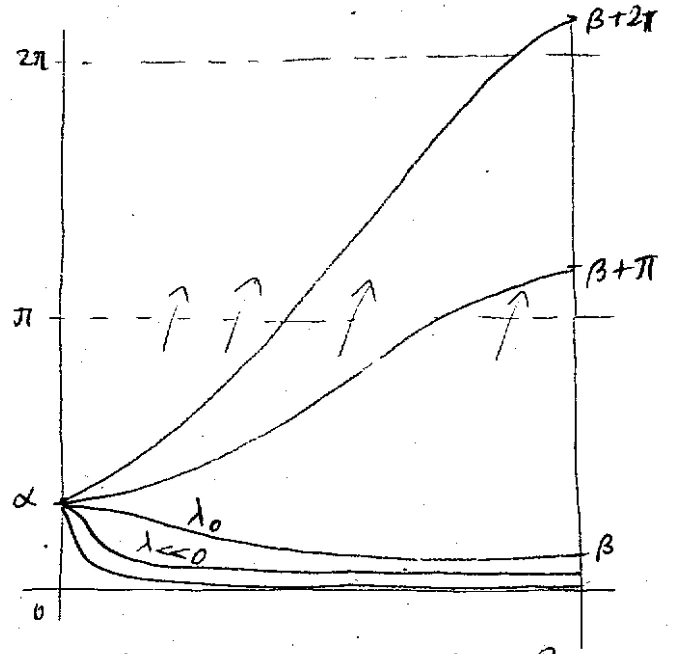
$\phi(t) \to \phi_0$ „velice rychle"

$\square$

Věta 17.2. $\exists$ posloupnost $\lambda_0<\lambda_1<\dots\lambda_k\to\infty$ tak, že (1), (2ab) má netriviální řešení $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\lambda=\lambda_k$ pro nějaké k. Odpovídající řešení u_k má v (a,b) právě k nulových bodů.

Důkaz. Prüfer $\Leftrightarrow$ řešení (3), (3ab) $\Leftrightarrow$ $\lambda\in\mathbb{R}$;

$\phi(b,\lambda)=\beta+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$.



? počet nulových bodů

$u_k(t_0)=0 \Leftrightarrow \phi(t_0)=k\pi$

$u=\rho\sin\phi$

$\phi'=\frac{1}{p}\cos^2\phi+(\lambda r-q)\cdot\sin^2\phi$

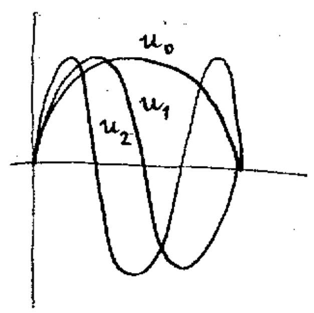
$\phi'>0$ pro $\phi=k\pi$ (řešení se nemohou vracet přes „$k\pi$"-hranici) □

Příklad. $x''+\lambda x=0$

$x(0)=x(T)=0$

$u_{k-1}=\sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right)$

$\lambda_{k-1}=\left(\frac{k\pi}{T}\right)^2$



Věta 17.1. $\exists$ $\lambda_0<\lambda_1<\dots\lambda_k\to\infty$ tak, že (1), (2ab) má netr. řešení $\Leftrightarrow$ $\lambda=\lambda_k$ pro nějaké k.
Odpovídající řešení tvoří OG bázi v $L^2_r(a,b)$.

Definice. $\mathcal{L}: x\longmapsto (px')'+qx$ (1) ... $\mathcal{L}x+\lambda r x=0$

$D(\mathcal{L}) := \{x(t):\langle a,b\rangle\to\mathbb{R};\ x, px'\in AC$ a platí (2ab)$\}$.

Lemma 17.3. 1) $\langle \mathcal{L}x,y\rangle=\langle x,\mathcal{L}y\rangle$

2) $\mathcal{L}x+\lambda r x=0$; $x\not\equiv 0 \Rightarrow \lambda\in\mathbb{R}$

3) $\mathcal{L}x_1+\lambda_1 r x_1=0$
$\mathcal{L}x_2+\lambda_2 r x_2=0$; $\lambda_1\neq\lambda_2 \Rightarrow \langle x_1,x_2\rangle_r=0$

Důkaz. 1) $\langle\mathcal{L}x,y\rangle=\int_a^b (px')'y+qxy=[px'y]_a^b+\int_a^b qxy-px'y'$

$\langle\mathcal{L}y,x\rangle=[py'x]_a^b+\int_a^b qyx-py'x'$

? $p(b)x'(b)y(b)-p(a)x'(a)y(a)\overset{?}{=}p(b)y'(b)x(b)-p(a)y'(a)x(a)$

det $\begin{pmatrix}p(b)x'(b) & x(b)\\ p(b)y'(b) & y(b)\end{pmatrix}=0$ $\Leftrightarrow$ řádky LZ $\Leftrightarrow$ okr. podm. (2b)

2) $\langle x,y\rangle=\int_a^b x\bar{y}$ ... $\mathcal{L}$ symetrický i pro tento součin

$\mathcal{L}x=\lambda x$

$\left.\begin{aligned}\langle\mathcal{L}x,x\rangle&=\langle\lambda x,x\rangle=\lambda\|x\|^2\\ &\parallel\\ \langle x,\mathcal{L}x\rangle&=\langle x,\lambda x\rangle=\bar{\lambda}\|x\|^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lambda=\bar{\lambda}$

3) cvičení. □

Lemma 17.4. u, v LN řešení (1) $(px')' + (\lambda r + q)x = 0$
(bez okrajových podmínek)
$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ u'v - uv' = \frac{c}{p}$ v $\langle a, b\rangle$.

Důkaz. $\frac{d}{dt}(pu'v - upv') = \underbrace{(pu')'}_{-(\lambda r+q)u}v + pu'v' - u'pv' - u\underbrace{(pv')'}_{-(\lambda r+q)v}$

$pu'v - upv' \equiv c$

? $c = 0 \dots (pu', u), (pv', v)$ jsou LZ $\Rightarrow$ řešení jsou LZ

□

Lemma 17.5. Úloha (4) $(px')' + \overbrace{(\lambda r + q)}^{Q}x = rh$
s okrajovými podmínkami (2ab),
$\lambda \neq \lambda_k\ \forall k \in \mathbb{N}_0$,
má pro $\forall h \in L^2_r(a,b)$ jediné řešení.

Důkaz. Vezměme: $u(t) \dots$ netr. ř. (1)&(2a)
$v(t) \dots$ netr. ř. (1)&(2b)

u, v LN (pokud ne: $u = kv \dots$ netr. řeš. (1)&(2ab)
$\Rightarrow$ spor s 17.2. v.)
L. 17.4.: $uv' - u'v = \frac{c}{p}$ v $\langle a, b\rangle$; $c \neq 0$ konst.

$$w(t) := \frac{1}{c}\left(v(t)\int_a^t r(s)u(s)h(s)\,ds + u(t)\int_t^b r(s)v(s)h(s)\,ds\right)$$

$$w' = \frac{1}{c}\left(v'\int_a^t ruh + vruh + u'\int_t^b rvh - urvh\right)$$

$$(pw')' = \frac{d}{dt}\frac{1}{c}\left(pv'\int_a^t ruh + pu'\int_t^b rvh\right) =$$

$$= \frac{1}{c}\left((pv')'\int_a^t ruh + pv'ruh + (pu')'\int_t^b rvh - pu'rvh\right) =$$

$$= \frac{1}{c}(pv')'\int_a^t ruh + (pu')'\int_t^b rvh) + rh$$

$$(pw')' + Qw = \frac{1}{c}\left(-Qv\int_a^t \dots - Qu\int_t^b \dots\right) + \frac{1}{c}\left(Qv\int_a^t \dots + Qu\int_t^b \dots\right) + rh$$

okr. p.: $w(a) = \frac{1}{c}u(a)\int_a^b rvh$

$p(a)w'(a) = \frac{p(a)}{c}u'(a)\int_a^b rvh$

$\Rightarrow (p(a)w'(a), w(a))$ je $\left(\frac{1}{c}\int_a^b rvh\right)$-násobek
$(p(a)u'(a), u(a)) \dots$ splňuje (1a)

□

podobně v bodě b.

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ pevné

$G_\lambda : L^2_r(a,b) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{L})$
$h \longmapsto \int_a^b G_\lambda(t,s)h(s)r(s)\,ds =: w(t)$, (Greenův operátor)

$$G_\lambda(t,s) := \begin{cases} \frac{1}{c}v(t)u(s)\ ; & s \in (a,t) \\ \frac{1}{c}v(s)u(t)\ ; & s \in (t,b) \end{cases}$$

$u, v, c \dots$ jako v předchozím důkazu.
$G_\lambda = (\mathcal{L} + \lambda)^{-1} \dots$ rezolventa.

Lemma 17.6. (Vlastnosti G_λ)
Operátor G_λ je kompaktní (do $L^2_r(a,b)$),
symetrický a $G_\lambda(u_k) = \frac{u_k}{\lambda - \lambda_k}$.

Důkaz. Kompaktní: [$\{h_n\} \subset L^2$ omezená $\Rightarrow G_\lambda(h_n)$ má
hromadný bod.]

$w_n := G_\lambda(h_n)$; $|w_n(t)| = \left|\int_a^b G_\lambda(t,s)h_n(s)r(s)\,ds\right| \leq$

$\leq \int_a^b |h_n(s)|\,ds \leq 1 + |h_n(s)|^2 \leq K_1$

$|w_n'(t)| = \left|\frac{1}{c}\left(v'\int_a^t \dots + u'\int_t^b \dots\right)\right| \leq K_2$

A-A: $\exists$ podposl. $\tilde{w}_n \rightrightarrows w_0$ v $\langle a, b\rangle$, tím spíše $\tilde{w}_n \to w_0$ v $L^2_r(a,b)$

Symetrie: $\langle G_\lambda(h), l\rangle_r = \langle h, G_\lambda(l)\rangle_r$

Dosaď, užij $G_\lambda(t,s) = G_\lambda(s,t)$.

—

u_k ... řešení $\mathcal{L}x + \lambda_k r x = 0$

$$\mathcal{L}u_k + \lambda_k r u_k = 0$$

$$\mathcal{L}u_k + \lambda r u_k = (\lambda - \lambda_k) u_k$$

... $\frac{u_k}{\lambda-\lambda_k}$ ... řešení úlohy (4), $h = u_k$,

tj. $G_\lambda(u_k) = \frac{u_k}{\lambda-\lambda_k}$

Příklad. $x'' + \lambda x = 0$ $\quad u_k = \sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right)$

$x(0) = x(T) = 0$ $\quad \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{T^2}$

fixujeme $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots$

$\lambda = \omega^2 > 0$; $\omega \neq \frac{k\pi}{T}$

u ... řešení $x'' + \omega^2 x = 0$, $x(0) = 0$ $\quad u(t) = \sin \omega t$

v ... řešení $x'' + \omega^2 x = 0$, $x(T) = 0$ $\quad v(t) = \sin \omega(t-T)$

L. 17.4.: $u'v - uv' \equiv C \neq 0$

$\omega \cos \omega t \cdot \sin\omega(t-T) - \sin \omega t \cdot (+\omega) \cdot \cos \omega(t-T) =$

$= \omega \sin(-\omega T)$

$$G_\lambda(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{c} v(t) u(s) & ; s \in \langle 0, t\rangle \\ \frac{1}{c} v(s) u(t) & ; s \in (t, T\rangle \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x'' + \omega^2 x = h \\ x(0) = x(T) = 0 \\ \omega \neq \frac{k\pi}{T} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{1}{\omega \sin \omega T}\left[\sin\omega(t-T)\int_0^t h(s)\sin\omega s\, ds + \sin\omega t \int_t^T h(s) \cdot \sin\omega(s-T)\, ds\right]$$

(5): $\{(px')' + (\lambda_k r + q)x = rh \quad \& \ (2ab)\}$

Lemma 17.7. Úloha (5) má řešení, právě když $\langle h, u_k\rangle_r = 0$. Za tohoto předpokladu má obecné řešení tvar $\alpha u_k + w$, kde
$$w = \frac{1}{c}\left[v(t)\int_a^t r(s)u_k(s)h(s) + u_k(t)\int_t^b r(s)v(s)h(s)\,ds\right]$$
pro jisté v, c.

Důkaz. x_1, x_2 řešení (5) $\Rightarrow x := x_1 - x_2$ řeší (1) s $\lambda = \lambda_k$

$\Rightarrow x = \alpha u_k$

? w je řešení

$v(t)$ ... libovolné řešení (1) bez okrajových podmínek LN s u_k

L. 17.4.: $\exists C \neq 0$: $v'u_k - vu_k' = \frac{c}{p}$ v $\langle a, b\rangle$

... derivuji a dosadím w do rovnice (výpočet analogický L. 17.5.)

Pozn. $\int_a^t r(s)u_k(s)h(s)\,ds = 0$ pro $t = b$.

? $\langle h, u_k\rangle_r = 0$ je nutná podmínka řešitelnosti

Buď x řešení (5): $\mathcal{L}x + \lambda_k r x = rh$ $\quad (\mathcal{L}x = (px')' + qx)$

$$\langle \mathcal{L}x, u_k\rangle_r + \lambda_k\langle x, u_k\rangle_r = \langle h, u_k\rangle_r$$

$$\langle \mathcal{L}x, u_k\rangle_r = \langle x, \mathcal{L}u_k\rangle_r = -\lambda_k\langle x, u_k\rangle_r \quad \Rightarrow \quad \langle h, u_k\rangle_r = 0$$

□

Poznámka. Dokázali jsme: $(\mathcal{L} + \lambda r)$ je prostý $\Leftrightarrow$ je na (L. 17.5.),

$\mathrm{Rng}(\mathcal{L} + \lambda r) = (\mathrm{Ker}(\mathcal{L} + \lambda r))^\perp$ (L. 17.7.)

Zbývá: vlastní funkce tvoří úplnou OG bázi.

$S := \{ h \in L^2_r(a,b),\ \langle h, u_k\rangle_r = 0\ \ \forall k \in \mathbb{N}_0 \}$

úplnost $\Leftrightarrow S = \{0\}$

Lemma 17.8. Nechť $S \neq \{0\}$, volme λ pevné, $\lambda \neq \lambda_k\ \forall k \in \mathbb{N}_0$. Potom G_λ má v S netriviální vlastní číslo.

Důkaz úplnosti. Sporem. $S \neq \{0\}$

L. 17.8.: $\exists y \in S,\ y \neq 0$

$\exists \mu \neq 0$ (číslo) : $G_\lambda(y) = \mu y$,

tj. μy řeší úlohu (4) s $h = y$

$\mathcal{L}(\mu y) + \lambda r \mu y = r y$

$\mathcal{L}(y) + (\lambda - \frac{1}{\mu}) r y = 0$

$y \neq 0 \Rightarrow \exists k : \lambda - \frac{1}{\mu} = \lambda_k$ a $y = \alpha u_k,\ \alpha \neq 0$,

spor s $y \in S \Rightarrow y \perp u_k\ \forall k$.

Důkaz (Lemmatu 17.8.)

1) $G_\lambda(S) \subset S$?

$h \in S \overset{?}{\Rightarrow} \langle G_\lambda(h), u_k\rangle_r = 0\ \forall k$. L. 17.6.:

$$\langle G_\lambda(h), u_k\rangle_r = \langle h, \underbrace{G_\lambda(u_k)}_{\frac{u_k}{\lambda-\lambda_k}}\rangle_r = \frac{1}{\lambda-\lambda_k}\langle h, u_k\rangle_r = 0$$

2) $G_\lambda \neq 0 \ldots h \neq 0 \Rightarrow G_\lambda(h)$ řeší (nehomogenní) úlohu (4) $\Rightarrow G_\lambda(h) \neq 0$.

3) S je uzavřený podprostor $L^2_r(a,b)$.

Věta z FA: T kompaktní symetrický operátor na Hilbertově prostoru H, $T \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow T$ má v H nenulové vlastní číslo.

(aplikace : $T = G_\lambda$; $H = S$).

Poznámka. Víme-li, že $\{u_k\}$ tvoří úplnou OG bázi, můžeme vyjádřit

$$G_\lambda(t,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(t)\,u_k(s)}{\lambda - \lambda_k} \qquad (\lambda \neq \lambda_k\ \forall k \in \mathbb{N}_0)$$

náznak. $(\mathcal{L} + \lambda r) w = r h$

$w = \sum_k a_k u_k$

$h = \sum_k b_k u_k$

$(\mathcal{L}+\lambda r) w = \sum_k a_k (\mathcal{L}+\lambda r) u_k = \sum_k a_k (\lambda - \lambda_k) r u_k =$

$= \sum_k b_k r u_k$

$a_k = \frac{b_k}{\lambda - \lambda_k}$ Právě $\{u_k\}$ ON $\Rightarrow b_k = \langle h, u_k\rangle_r$

$w(t) = \sum_k \frac{b_k}{\lambda-\lambda_k} u_k(t) = \sum_k \frac{1}{\lambda-\lambda_k}\left(\int_a^b h(s) u_k(s) r(s)\,ds\right) u_k(t) =$

$= \int_a^b \left[\sum_k \frac{u_k(s)\,u_k(t)}{\lambda-\lambda_k}\right] h(s) r(s)\,ds$

18. Optimální regulace.

$x' = f(x,u)$; $f : \Omega \times U \to \mathbb{R}^n$ spojitá

$x(0) = x_0$ $\quad x(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ot.

přípustné regulace $\mathcal{U} = \{u(t) : \langle 0,T\rangle \to U$ měřitelná$\}$

$U \subset \mathbb{R}^m$ (typicky $m < n$)

Problémy. 1. regulovatelnost

$x_0 \ldots$ dáno, ? $\exists u(\cdot) \in \mathcal{U}$ tak, že $x(t) = 0$ pro nějaké t

2. totéž za nejkratší čas

3. stabilizovatelnost zpětnou vazbou

? $\exists R : \mathbb{R}^n \to U$ tak, že 0 je asymptoticky stabilní pro systém $x' = f(x, R(x))$

4. obecnější optimalizace funkcionálu

$$P[u(\cdot)] = g(x(T)) + \int_0^T r(x(t), u(t))\,dt;$$

možnosti: a) $x(T)$ pevné; T volné

b) $x(T)$ volné; T pevné

Příklady. (1) „1-D parkovací problém"

regulace $u(t) \in \langle -1, 1\rangle$

$x'' = u$ cíl: $x(t) = x'(t) = 0$

$x(0) = x_0$ t ... minimální

$x'(0) = v_0$

(2) „Investice vs. spotřeba"

$x(t)$ ... kapitál

$k > 0$ ... přirozený růst

$u(t) \in \langle 0, 1\rangle$ míra reinvestic

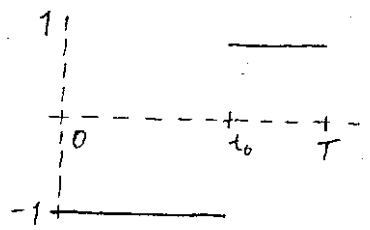
$1 - u$ ... spotřeba

$x' = kxu$

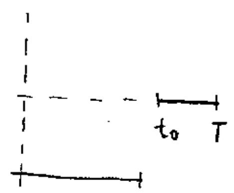
maximalizujeme $P[u(\cdot)] = \int_0^T x(t)(1-u(t))\,dt$ ... celková spotřeba v čase 0 až T.

„Bang-bang" princip:

(1) u_{opt}



(2) u_{opt}



18.1. Lineární úloha.

(1) $x' = Ax + Bu$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$u(t) \in \mathbb{R}^m$; $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$

přípustné regulace $\mathcal{U} = L^1_{loc}(\langle 0, T\rangle; \mathbb{R}^m)$

Značení. $x_0 \xrightarrow[u]{t} 0$ ... regulace $u(\cdot)$ převede x_0 do 0 v čase t.

Definice. $R(t) := \{x_0;\ \exists u(\cdot) \in \mathcal{U}$ tak, že $x_0 \xrightarrow[u]{t} 0\}$
... oblast regulovatelnosti

Lemma 18.1. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matice, $k \geq 0$ celé.
Potom $A^k \in Lin\{I, A, A^2, \dots A^{n-1}\} =: Z$

Důkaz. Hamilton–Cayley: $\chi(\lambda) = \det(\lambda I - A) =$
$= \lambda^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda^j \implies \chi(A) = 0;\ A^n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j A^j$

$0 \leq k \leq n-1$: $A^k \in Z$ zřejmé

$k = n$: $A^n \in Z$ z H.-C.

$k > n$: indukce: $A^k \in Z \implies A^k = \sum_{j=0}^{n-1} b_j A^j$

$A^{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j A^{j+1}$, $j+1 \leq n$

$\implies A^{j+1} \in Z$, $j = 0, \dots n-1$

$\implies A^{k+1} \in Z$. □

Důsledek. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $b \in \mathbb{R}^n$ (vektor)

$\implies A^k b \in Lin\{b, Ab, \dots A^{n-1}b\}$; $k \in \mathbb{N}_0$.

Definice. $K[A|B] := (B, AB, A^2B, \dots A^{n-1}B)$ matice $n \times m\cdot n$
Kalmanova matice regulovatelnosti.

Věta 18.1. Je dána úloha (1), $t>0$ pevné. Potom $R(t) = Lin\{g_1, \dots g_{mn}\}$; g_i... sloupce $K[A|B]$.

Důkaz. $R(t)$ je vektorový prostor:

variace konstant:

$$x(t) = e^{tA}\left(x_0 + \int_0^t e^{-sA}Bu(s)\,ds\right)$$

$$x_0 \xrightarrow[u]{t} 0 \iff 0 = e^{tA}\left(x_0+\int_0^t e^{-sA}Bu(s)\,ds\right)$$

$$\iff x_0 = -\int_0^t e^{-sA}Bu(s)\,ds$$

$x_1 \xrightarrow[u_1]{t} 0$, $x_2 \xrightarrow[u_2]{t} 0$, $u_1,u_2 \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow u := u_1+u_2 \in \mathcal{U}$; $x_1+x_2 \xrightarrow[u]{t} 0$,

tj. $x_1+x_2 \in R(t)$.

Stačí dokázat: $R(t)^\perp = (Lin\{g_1,\dots g_{mn}\})^\perp$

nechť $p \in \mathbb{R}^n$; $p \perp g_j$; $j=1,\dots mn$; $p\perp A^k b_i$, $k=0,\dots n-1$, $\{b_i\}$... sloupce matice B.

Nechť $x_0\in R(t) \Rightarrow x_0 = -\int_0^t e^{-sA}Bu(s)\,ds$ pro vhodné $u(\cdot)\in\mathcal{U}$.

$$p\cdot x_0 = -\int_0^t p\cdot e^{-sA}Bu(s)\,ds \overset{?}{=} 0$$

$$p\cdot e^{-sA}Bu(s) = p\cdot\left(\sum_{l=0}^\infty \frac{(-s)^l}{l!}A^l Bu(s)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^m\sum_{l=0}^\infty \frac{(-s)^l}{l!}(p\cdot A^l b_i)u_i(s) = 0 \text{ pro } l=0,\dots k-1$$

L 18.1.: $= 0 \ \forall l\ge 0$

$\Rightarrow p\perp x_0$.

nyní nechť $p\in R(t)^\perp$.

Volme $u\in\mathcal{U}$: $u_i(s) = \phi(s)\in L^1(0,t)$ (libovolné), i – pevné; $u_j\equiv 0$; $j\ne i$

$$R(t)\ni x_0 = -\int_0^t e^{-sA}Bu(s)\,ds = -\int_0^t e^{-sA}b_i\phi(s)\,ds \quad /\cdot p$$

$$0 = -\int_0^t p\cdot(e^{-sA}b_i)\underset{\text{libovolné}}{\phi(s)}\,ds$$

$$\Rightarrow p\cdot e^{-sA}b_i \equiv 0 \text{ v } \langle 0,t\rangle \qquad /\frac{d^k}{ds^k}$$

$$p\cdot(-1)^kA^ke^{-sA}b_i\equiv 0$$

položíme $s=0$: $p\cdot A^k b_i$ $\forall k\ge 0$. □

Důsledek. (1) je globálně regulovatelný, tj. $R(t)=\mathbb{R}^n$, právě když $h(K[A|B]) = n$.

Příklad. (parkovací problém)

$x' = y$, $y' = u$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{B} u \qquad m=1,\ n=2$$

$K[A|B] = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ sloupce generují celé $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ systém je globálně regulovatelný.

I. Pozorovatelnost.

(2) $x' = Ax$, $x(0)=x_0$; $\underset{\mathbb{R}^m}{y(t)} = Bx(t)$; $B\in\mathbb{R}^{m\times n}$

$x(t)\in\mathbb{R}^n$; $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

typicky $m<n$

tj. y... neúplná informace.

Problém pozorovatelnosti: známe $y \overset{?}{\Rightarrow}$ známe x.

Definice. Systém (2) je pozorovatelný, pokud
$$[Bx_1 \equiv Bx_2 \text{ na } \langle 0,t\rangle_{t>0} \Rightarrow x_1(0)=x_2(0)],$$
kde x_1, x_2 jsou libovolná řešení.

Věta 18.2. Systém (2) je pozorovatelný, právě když systém
$$(3)\quad x' = A^T x + B^T u, \quad \mathcal{U} = L^1_{loc}(\langle 0,T\rangle, \mathbb{R}^m)$$
je globálně regulovatelný.

Důkaz. Nechť (2) není pozorovatelný.

$\Rightarrow \exists\, x_1, x_2$ řešení: $x_1(0)\neq x_2(0)$, ale

$Bx_1 \equiv Bx_2$ na $(0,t)$, $t>0$.

$x := x_1 - x_2$

$x_0 := x_1(0)-x_2(0)\neq 0$

$B \underbrace{e^{sA}x_0}_{x(s)} \equiv 0 \quad \Big/ \frac{d^k}{ds^k};\ s=0$

$BA^k x_0 = 0 \in \mathbb{R}^m$

$x_0^T((A^T)^k B^T) = 0 \in \mathbb{R}^m$; $k=0,\dots,n-1$,

tj. soustava s maticí $K[A^T|B^T]$ má netriviální řešení

$\Rightarrow h(K[A^T|B^T]) < n \overset{V.18.1.}{\Rightarrow}$ (3) není globálně regulovatelný.

Nechť (3) není globálně regulovatelný

$\Rightarrow h(K[A^T|B^T])<n$

$\exists\, x_0 \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$: $x_0^T K[A^T|B^T]=0$

$BA^k x_0 = 0 \quad \forall k=0,\dots n-1$

L 18.1.: $BA^k x_0 = 0 \quad \forall l\geq 0$

$\Rightarrow B \underbrace{e^{sA}x_0} \equiv 0$, $s\in(0,t)$

netriv. řešení (2) $\Rightarrow$ systém (2) není pozorovatelný. □

Věta 18.3. (Lokální regulovatelnost.)

(4) $x' = f(x,u)$; $f: \mathcal{U}(0)\times U \to \mathbb{R}^n$, $f\in C^1$;

$x(0)=x_0$; $f(0,0)=0$;

přípustné regulace: $\mathcal{U} = \{u:(0,t)\to U, \text{ měřitelné}\}$,

$U\subset\mathbb{R}^m$ obsahuje okolí 0.

Za těchto podmínek je (4) lokálně regulovatelný, neboli $R(t)$ obsahuje pro $\forall t>0$ okolí 0.

$R(t) = \{x_0\in\mathbb{R}^n;\ \exists\, u(\cdot)\in\mathcal{U} \dots x_0 \xrightarrow[u]{(4),t} 0\}$.

Klíčový předpoklad: $h(K[A|B])=n$,

$A = \nabla_x f(0,0)$; $B=\nabla_u f(0,0)$.

Důkaz. $t>0$ pevné.

(5) $x'=Ax+Bu$, $x(0)=x_0$ (linearizace (4) na okolí 0)

je globálně regulovatelný (V. 18.1.)

volme $y_1,\dots y_n \in\mathbb{R}^n$, LN

$\Rightarrow \exists\, u_i:(0,t)\to\mathbb{R}^m$ omezené, měřitelné;

$y_i \xrightarrow[u_i]{(5),t} 0$,

neboli $z' = Az+Bu_i$, $z(0)=y_i$ $\Rightarrow z(t)=0$

$\lambda\in\mathbb{R}^n \dots u_\lambda := \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$

$\psi(\lambda)\in\mathbb{R}^n$ je taková poč. podmínka, že

$\psi(\lambda)\xrightarrow[u_\lambda]{(4),t} 0$.

$\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

$\lambda\longmapsto x(0)$,

kde x je řešení rovnice (6) $x'=f(x,u_\lambda)$, $x(t)=0$.

Vidíme:

$\psi(0)=0$ ... $\lambda=0 \Rightarrow u_\lambda=0 \Rightarrow x\equiv 0$ je jediné řešení úlohy $x'=f(x,0)$ & $x(s)=0$

$\psi\in C^1(\mathcal{U}(0,\delta))$, $\delta>0$ dost malé

závislost řešení na parametru

λ malé $\Rightarrow u_\lambda\in\mathcal{U}$.

Dokážeme, že $\nabla\psi(0)$ je regulární matice

$\overset{\text{viz}}{\Longrightarrow} \psi(\mathcal{U}(0,\delta))$ obsahuje okolí 0.

$\hat{R}(s)$

$z=z(s)=\frac{\partial}{\partial\lambda_i}x(s)$; $\frac{\partial}{\partial\lambda_i}(6) \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad z'=\nabla_x f(x,u_\lambda)z+\nabla_u f(x,u_\lambda)\frac{\partial u}{\partial\lambda_i}$

$z(s)=0$

$\lambda=0\ldots \quad z(0)=\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\psi\Big|_{\lambda=0}$

$\lambda=0 \Rightarrow u_\lambda\equiv 0,\ x\equiv 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z'=\nabla_x f(0,0)z+\nabla_u f(0,0)u_i$

$z(s)=0$

$\overset{\text{jednoznačnost}}{\Longrightarrow} \quad z(0)=y_i$

$\nabla\psi(0)=\left(y_1 \mid y_2 \mid \cdots \mid y_n\right)$ ... regulární matice. $\square$

II. Stabilizovatelnost.

$\exists\ F:\mathbb{R}^n\longrightarrow U$ tak, že 0 je as. stabilní pro

$x'=f(x,\underbrace{Fx}_{\text{zpětná vazba}})$

Věta 18.4. Je-li systém

(1) $x'=Ax+Bu$

globálně regulovatelný a

$\lambda_1,\ldots\lambda_n\in\mathbb{R}$ libovolná, potom

$\exists\ F\in\mathbb{R}^{m\times n}$ tak, že $\sigma(A+BF)=\{\lambda_1,\ldots\lambda_n\}$.

Speciálně: zpětná vazba $u=Fx$ asymptoticky stabilizuje systém (1),

$x'=Ax+BFx=(A+BF)x$.

Lemma 18.2. Matice

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \ddots & & \vdots\\ & & & & \ddots & 0\\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1\\ \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \beta_{n-1}\end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom

$p(\lambda)=\lambda^n-\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j\lambda^j$.

Speciálně: volbou β_j lze docílit libovolné $\sigma(A)$.

Důkaz. (Lemmatu)

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & \cdots & & 0 & \\ -\beta_0 & -\beta_1 & \cdots & \cdots & \lambda-\beta_{n-1}\end{vmatrix}=(\lambda-\beta_{n-1})\lambda^{n-1}+\sum_{j=0}^{n-2}(-\beta_j)(-1)^{n+j+1}D_j\ ;$$

$$D_j=\left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda & -1 & \\ & \ddots & -1\\ & & \lambda\end{matrix} & \\ \hline \underbrace{\qquad\qquad}_{j} & \begin{matrix}-1 & & \\ \lambda & \ddots & \\ & & \lambda\ -1\end{matrix}\end{array}\right|=\lambda^j(-1)^{n-1-j}$$

$\square$

Důkaz (věty 18.4).

1. krok. $m=1$, tj. $B=(b)$ jenom sloupec

$K[A|B] = (\underset{b_1}{b}|\underset{b_2}{Ab}|\dots|\underset{b_n}{A^{n-1}b})$ je regulární;

báze $b_i := A^{i-1}b$; $i=1,\dots n$.

(b je tzv. „cyklický vektor").

Jak vypadá (1) vůči nové bázi?

$Ab_1 = b_2$

$Ab_2 = b_3$

$\vdots$

$Ab_n = A^n b \overset{L.18.1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \underbrace{A^j b}_{b_{j+1}}$

(2) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u$$

2. krok. Pomocný systém:

(3) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}' = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}}^{\hat{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}^{\hat{b}} u$$

Zjevně (3) je regulovatelný, $\hat{b}$ je cyklický vektor pro $\hat{A}$

$\Rightarrow$ lze změnou báze převést na tvar (2)

Závěr. Pokud $m=1$, búno (1) má tvar (3).

3. krok. Stabilizace (3).

$F = (\beta_0-\alpha_0, \beta_1-\alpha_1, \dots \beta_{n-1}-\alpha_{n-1})$

$\hat{A} + \hat{b}F =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \\ \beta_0 & \cdots & & \beta_{n-1} \end{pmatrix}$$

L. 18.2 $\Rightarrow$ tato matice má libovolné spektrum volbou β_j.

Poznámka. Tvar (3) $\Leftrightarrow \exists$ cyklický vektor $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ systém $x' = Ax$ lze převést na jednu rovnici řádu n.

4. krok. (obecné $m \geq 1$).

Sestrojíme bázi $\{v_1, \dots v_n\}$ tak, že

$v_1 = Bu_0$;

$v_{i+1} = Av_i + Bu_i$; $i = 1, \dots n-1$.

(„zobecněná cyklická báze")

$u_0, \dots u_{n-1} \in \mathbb{R}^m$

$\exists u_0 \in \mathbb{R}^m \dots v_1 = Bu_0 \neq 0$

$(h(K[A|B]) = n \Rightarrow B \neq 0)$

indukce: $\{v_1, \dots v_k\}$ jsou dány, $k<n$;

$W := \mathrm{Lin}\{v_1, \dots v_k\}$. Tvrdíme:

$\exists u_k \in \mathbb{R}^m$; $v_{k+1} := Av_k + Bu_k \notin W$

Sporem: nechť $Av_k + Bu \in W \ \forall u \in \mathbb{R}^m$. Tedy i $u=0 \Rightarrow Av_k \in W$; $Bu \in W$ pro $\forall u \in \mathbb{R}^m$

$\underbrace{v_{i+1}}_{\in W \Leftarrow} = \underbrace{Av_i}_{\in W} + \underbrace{Bu_i}_{\in W}$; $i = 1, \dots k-1$

Celkem: $B\mathbb{R}^m$; $AW \subset W \Rightarrow B, AB, \dots A^l B$: sloupce leží ve $W \Rightarrow h(K[A|B]) \leq h(W) = k < n$ ↯

$\Rightarrow$ indukce funguje.

5. krok. (převedení $m \geq 1$ na $m=1$).

Volme $\tilde{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\tilde{F} v_i = u_i$$

(takové zobrazení existuje a je jednoznačné, neboť $\{v_i\}$ je báze.)

$$(A+B\tilde{F}) v_1 = A v_1 + B\tilde{F} v_1 = v_2$$

$$(A+B\tilde{F}) v_i = A v_i + B\tilde{F} v_i = v_{i+1}$$

$\{v_1 \dots v_n\}$ ... cyklická báze vůči matici $(A+B\tilde{F})$

(4) $x' = (A+B\tilde{F})x + v_1 u$

je stabilizovatelný dle kroků 1-3.

$\Rightarrow \exists f \in \mathbb{R}^{1\times n}$ ... $A+B\tilde{F}+v_1 f$ má předepsané spektrum

$=(A+BF)$; $F := \tilde{F} + u_0 f$ ... hledaná zpětná vazba.

□

Věta 18.5. (Lokální stabilizace nelineárního systému.)

(5) $x' = f(x,u)$; $f \in C^1$ na okolí $(0,0) \in \mathbb{R}^{n\times m}$; $f(0,0)=0$;

přípustné regulace: $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$; U obsahuje okolí 0.

Klíčový předpoklad: $h(K[A|B]) = n$;

$A = \nabla_x f(0,0)$; $B = \nabla_u f(0,0)$.

Potom (5) lze stabilizovat na okolí 0 spojitou zpětnou vazbou $F(x): \mathcal{U}(0) \to U$.

Důkaz. Věta 18.4.: $\exists F \in \mathbb{R}^{m\times n}$: $\tilde{A} := A+BF$ má záporné spektrum

$\Rightarrow \exists P \in \mathbb{R}^{n\times n}$; symetrická, pozitivně definitní, $\tilde{A}^T P + P\tilde{A} = -I$.

Def. $V(x) := x^T P x = x \cdot Px$.

Tvrdíme: $V(x)$ je Ljapunovská funkce pro (6) $x' = f(x, Fx)$ v okolí 0.

$V(x)$ je spojitá, $V(0)=0$, $V(x)>0$ pro $x \neq 0$;

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{d}{dt}(x \cdot Px) = x' \cdot Px + x \cdot Px' =$$

($x(t)$ ... řešení blízko 0)

$$= f(x, Fx)\cdot P + x \cdot P f(x, Fx) =$$

$[f(x,Fx) = Ax + BFx + o(|x|)$; x malé$]$

$$= \underbrace{\underbrace{(A+BF)x \cdot Px}_{x^T \tilde{A}^T P x} + \underbrace{x \cdot P(A+BF)x}_{x^T P \tilde{A} x}}_{-|x|^2} + o(|x|^2) < -\tfrac{1}{2}|x|^2$$

pro x malé.

□

Příklad. (kyvadlo.)

$$x'' + g(x') + \sin x = u$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -g(y) - \sin x + u \end{aligned}\right) \dots f(x,y,u)$$

v okolí $(0,0)$

$$\nabla_{x,y} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -g'(y) \end{pmatrix}; \quad \nabla_u f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}; \quad K[A|B] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

Závěry: 1) Systém je lokálně regulovatelný pro libovolné g

2) Systém je globálně regulovatelný pro rozumné g.

($u \equiv 0$ & g rozumné $\Rightarrow$ systém je globálně asymptoticky stabilní)

III. Časově optimální regulace s omezením

$x' = Ax + Bu$ $\quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$x(0) = x_0$ $\quad B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\quad x(t) \in \mathbb{R}^n$

přípustné regulace: $\mathcal{U} = \{u : (0,t) \to U,$ měřitelné, $U = \langle -1,1\rangle^m\}$

$R(t) = \{x_0 ;\ \exists u \in \mathcal{U} ;\ x_0 \xrightarrow[u]{t} 0\}$

$R = \bigcup_{t>0} R(t)$

Věta 18.6. Pro $\forall t>0$ je $R(t)$ konvexní, symetrická, uzavřená.
$R(t_1) \subset R(t_2)$ pro $t_1 < t_2$.

Důkaz. $x_0 \in R(t) \iff x_0 = -\int_0^t e^{-sA} \underbrace{Bu(s)}_{\text{lineární závislost}} ds$ pro vhodné $u(\cdot) \in \mathcal{U}$.

$(\cdot)$: $x_0 \xrightarrow[u]{t} 0 \Rightarrow -x_0 \xrightarrow[-u]{t} 0$ (symetrie)

$x_i \xrightarrow[u_i]{t} 0 ;\ u_i \in \mathcal{U},\ i = 1,2$

$y := \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$
$v := \lambda u_1 + (1-\lambda) u_2$ $\quad \Rightarrow y \xrightarrow[v]{t} 0$ (konvexita)
$\lambda \in \langle 0,1\rangle$.

$0 < t_1 < t_2 ;\ x_0 \xrightarrow[u]{t_1} 0$

$$\tilde{u}(s) := \begin{cases} u(s) ; & s \in \langle 0, t_1\rangle \\ 0 ; & s \in (t_1, t_2\rangle \end{cases}$$

$x_0 \xrightarrow[\tilde{u}]{t_2} 0$

Věta. (alaoglu.)
$\mathcal{U}$ je $*$-slabě (sekvenciálně) kompaktní v $L^\infty(0,t;\mathbb{R}^n)$.

$u_n(s) \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists$ podposloupnost (značena opět u_n)
$\exists u(\cdot) \in \mathcal{U} : u_n \xrightarrow{*} u$ v $(L^\infty(0,t;\mathbb{R}^n))$

$\int_0^t u_n(s) \cdot \varphi(s)\, ds \to \int_0^t u(s) \cdot \varphi(s)\, ds$ pro $\forall \varphi \in L^1(0,t;\mathbb{R}^n)$ pevné.

typický příklad: $\sin(ns) \xrightarrow{*} 0$

$\int_0^t \sin(ns)\varphi(s)\, ds \to 0 \quad \forall \varphi \in L^1(0,t)$.

uzavřenost $R(t)$:

$x_n \in R(t),\ x_n \to x_0 \overset{?}{\Longrightarrow} x_0 \in R(t)$

$\exists u_n \in \mathcal{U} :\ x_n = -\int_0^t \underbrace{e^{-sA}B}_{\varphi(s)} u_n(s)\, ds$

alaoglu: $\exists u_0 \in \mathcal{U} ;\ u_n \xrightarrow{*} u_0$

$n \to \infty :\ x_0 = -\int_0^t e^{-sA} B u_0(s)\, ds$, tj. $x_0 \xrightarrow[u_0]{t} 0$. $\square$

(6) $\quad x' = Ax + Bu$
$\quad\ \ x(0) = x_0$ $\quad ;\ u : (0,t) \to \langle -1,1\rangle^m$ měř.

Věta 18.7 (Lokální regulovatelnost pro (6))
$R(t)$ obsahuje okolí $0 \iff h(K[A|B]) = n$ $\quad (\forall t > 0)$

Důkaz. „$\Leftarrow$" věta 18.3.
„$\Rightarrow$" Sporem.
nechť $R(t) \supset \mathcal{U}(0,\delta)$, ale $h(K[A|B]) < n$
$\exists b \neq 0 ;\ b \perp$ na sloupce $K[A|B]$
$b^T A^k B = 0 \ \forall k = 0, \dots n-1$
$\Rightarrow b^T e^{-sA} B \equiv 0$
$x_0 \in R(t) \dots x_0 = -\int_0^t e^{-sA} B u(s)\, ds$

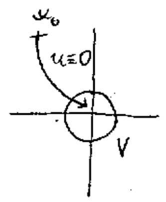
$b \cdot x_0 = -\int_0^t \underbrace{b^T e^{-sA} B}_{\equiv 0} u(s)\, ds = 0$

$\underset{\text{okolí } 0}{R(t)} \subseteq \{y \in \mathbb{R}^n ;\ y \cdot b = 0\}$ ↯
$\qquad\qquad\qquad$ nadrovina

$\square$

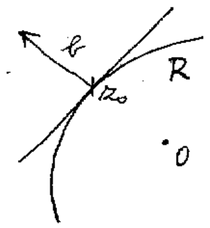
Věta 18.8. (Globální regulovatelnost pro (6).)
Nechť $h(K[A|B]) = n$, nechť $\mathrm{Re}\,\lambda \le 0$ pro $\forall \lambda \in \sigma(A)$.
Potom (6) je globálně regulovatelný.

Důkaz. 1. verze: $\mathrm{Re}\,\lambda < 0 \;\; \forall \lambda \in \sigma(A)$



$R(t_1) \supset V \dots$ okolí 0
$u \equiv 0: \; x' = Ax \;\dots\; x(t) = e^{tA}x_0 \in V$ pro $t \le t_1$

2. verze. $\mathrm{Re}\,\lambda \le 0 \;\; \forall \lambda \in \sigma(A)$



Sporem: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{konvexní}}}{R} \neq \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \exists$ sečná nadrovina

$b\cdot(z - x_0) \ge 0 \;\; \forall x_0 \in R$
$b \cdot x_0 \le \mu := b\cdot z$
$x_0 = -\int_0^t e^{-sA}Bu(s)\,ds; \;\; u(\cdot) \in \mathcal{U}$
$b\cdot x_0 = -\int_0^t \underbrace{b^T e^{-sA}B}_{v(s)}\,u(s)\,ds \le \mu$
$v(s) \in \mathbb{R}^{1\times m}$ řádkový vektor
lze volit: $u(s) = \begin{cases} 0; & v(s) = 0 \\ \dfrac{v^T(s)}{|v(s)|}; & v(s) \neq 0 \end{cases}$, zjevně $u \in \mathcal{U}$.

$\int_0^t |v(s)|\,ds \le \mu$ pro $\forall t > 0$;
dokážeme: $\int_0^\infty |v(s)|\,ds = +\infty$

$v(s) \not\equiv 0$: Pokud $v \equiv 0$, potom $\left(\frac{d}{ds}\right)^k v(s) =$
$= b^T(-A)^k e^{-sA}B \equiv 0 \Rightarrow b^TA^kB = 0, \; k = 0,1,\dots$
$\Rightarrow b \perp$ sloupce $K[A|B] \dots$ spor.
$v(s) \dots$ lineární kombinace prvků e^{-sA}
členy $\gamma_j(s)\cdot\underbrace{e^{-s\lambda_j}}_{|\;|>1}; \;\; \lambda_j \in \sigma(A)$
$\Rightarrow$ Integrál je divergentní ↯ $\square$

Definice. Přípustná regulace se nazve regulací typu „bum-prásk", jestliže $u_i(t) = \pm 1$ pro $\forall i = 1,\dots n$, pro s.v. $t > 0$.

Věta 18.9. (Princip „bum-prásk".)
Je dán bod $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Nechť $\exists\, u(\cdot) \in \mathcal{U}$ tak, že $x_0 \xrightarrow[u]{t} 0$. Potom $\exists\, \tilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ typu „bum-prásk" taková, že $x_0 \xrightarrow[\tilde{u}]{t} 0$ (za stejný čas)

Definice. $X \dots$ vektorový prostor
$K \subset X$ konvexní množina
$c \in K$ se nazve extremální bod ($c \in \mathrm{ext}\,K$), jestliže c nelze napsat jako $c = \frac{1}{2}(x+y)$, kde $x, y \in K$; $x \neq y$.
(Ekvivalentně $K \setminus \{c\}$ je konvexní)

Věta. (Krejn, Milman.) Pro lokálně konvexní topologii:
$K \neq \emptyset$, konvexní, kompaktní $\Rightarrow \mathrm{ext}\,K \neq \emptyset$.

Důkaz (Věty 18.9.)
$K := \{u(\cdot);\; x_0 \xrightarrow[u]{t} 0\} \subset \underbrace{L^\infty(0,t;\mathbb{R}^m)}_{= X}$; $*$-slabá topologie.

1. krok.
K splňuje předpoklady K-M. věty:
$K \neq \emptyset$; konvexní: $u(\cdot) \in K \Leftrightarrow x_0 = \int_0^t e^{-sA}Bu(s)\,ds$
$u_1, u_2 \in K \Rightarrow au_1 + (1-a)u_2 \in K; \;\; a \in \langle 0,1\rangle$.

kompaktnost:

$u_n \in K$.

$x_0 = -\int_0^t e^{-sA} B u_n(s)\,ds$

Alaoglu: $\exists u_0,\ u_n \xrightarrow{*} u_0$ (podposloupnost)

$x_0 = -\int_0^t e^{-sA} B u_0(s)\,ds \Rightarrow u_0 \in K$.

$\overset{\text{K-M}}{\Longrightarrow} \exists \tilde{u}(\cdot) \in \operatorname{ext} K$.

2. krok: $\tilde{u}(\cdot)$ je typu bum-prásk: nepřímo:

$\tilde{u}(\cdot)$ není bum-prásk. $\exists i \in \{1, \dots n\};\ \exists E \subset (0,t);$

$|E| > 0;\ |\tilde{u}_i(s)| < 1\ \ \forall s \in E$

$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{s \in E;\ |\tilde{u}_i(s)| < 1 - \frac{1}{n}\}$ ← má kladnou míru pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \exists F \subset E,\ |F| > 0,\ |\tilde{u}_i(s)| < 1 - \varepsilon,\ s \in F,\ \varepsilon > 0$.

Zvolíme $v(s) = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-tá složka}}}{\phi(s)}, 0, \dots)$,

$|\phi(s)| \le \varepsilon$

$\phi(s) \equiv 0$ na $(0,t) \setminus F$

$\phi \not\equiv 0$ na F

$\int_0^t e^{-sA} B v(s)\,ds = \int_0^t e^{-sA} b_i \phi(s)\,ds = 0$

def. $\left.\begin{aligned} u_1 &= \tilde{u} + v \\ u_2 &= \tilde{u} - v \end{aligned}\right\} \mathcal{U}$

$u_1 + u_2 = 2u;\ u_1 \neq u_2$

? $x_0 \xrightarrow[u_i]{t} 0$, tj. $u_i \in K$

$$-\int_0^t e^{-sA} B u_i(s)\,ds = \underbrace{-\int_0^t e^{-sA} B \tilde{u}(s)\,ds}_{x_0} - \underbrace{\int_0^t e^{-sA} B[\pm v(s)]\,ds}_{0}$$ □

$x' = Ax + Bu \dots \mathcal{U} = \{u : (0,t) \to \langle -1, 1\rangle^m\}$

$x(0) = x_0$

Věta 18.10. Nechť $x_0 \in \bigcup_{t>0} R(t)$. Potom $\exists t^* > 0,\ u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$ tak, že $x_0 \xrightarrow[u^*]{t^*} 0$, a t^* je minimální čas.

Důkaz. $t^* := \inf\{t > 0;\ x_0 \in R(t)\}$

$\exists t_n \searrow t^*;\ u_n(\cdot) \in \mathcal{U} \dots x_0 \xrightarrow[u_n]{t_n} 0$

Búno: $t^* < t_n < T$; dodefinujeme $u_n(t) = 0$ na $(t_n, T\rangle$.

Pozorujeme: $x_0 \xrightarrow[u_n]{T} 0$

Alaoglu: $\exists u^*(\cdot) \in \mathcal{U};\ u_n \to u^*$ $*$-slabě v $L^\infty(0,T;\mathbb{R}^m)$,

tj. $\int_0^T u_n \cdot \varphi \to \int_0^T u^* \cdot \varphi;\ \forall \varphi \in L^1(0,T)$

? $x_0 \xrightarrow[u^*]{t^*} 0$

$$x_0 = -\int_0^T e^{-sA} B u_n(s)\,ds = \underbrace{-\int_0^{t^*} e^{-sA} B u_n(s)\,ds}_{\to -\int_0^{t^*} e^{-sA} B u(s)\,ds} - \underbrace{\int_{t^*}^T e^{-sA} B u_n(s)\,ds}_{I_n}$$

$$|I_n| = \Big|\int_{t^*}^{t_n} \underbrace{e^{-sA} B u_n(s)}_{\text{omezená}}\,ds\Big| \le K(t_n - t^*) \to 0$$

$\Rightarrow x_0 = -\int_0^{t^*} e^{-sA} B u^*(s)\,ds$. □

Důsledek. (v. 18.9, v. 18.10.)

$x_0 \in \bigcup_{t>0} R(t) \Rightarrow \exists \tilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ typu „bum-prásk",

$x_0 \xrightarrow[\tilde{u}]{t^*} 0$, a t^* je optimální čas.

Věta 18.11. (Pontrjaginův princip maxima.)

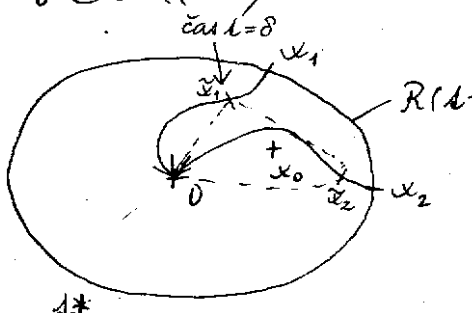
Nechť $u^*(\cdot)\in\mathcal{U}$; $x_0 \xrightarrow[u^*]{s^*} 0$, kde s^* je minimální čas.

Potom $\exists h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ tak, že

(PM) $\underbrace{h\cdot e^{-sA}B}_{v(s)}u^*(s) = \max\limits_{\eta\in\langle -1,1\rangle^m}\{\underbrace{h\cdot e^{-sA}B}_{v(s)}\eta\}$ pro s.v. $s\in\langle 0,s^*\rangle$

Důkaz. Klíčové pozorování:

$x_0\in\partial R(s^*)$



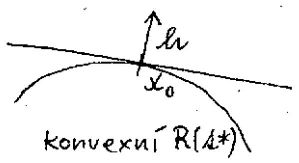
? $x_0\in\mathring{R}(s^*)$

$x_1 \xrightarrow[u_1]{s^*} 0$ $\quad \tilde{x}_1 = x_1(\delta)$

$x_2 \xrightarrow[u_2]{s^*} 0$ $\quad \tilde{x}_2 = x_2(\delta)$ $\Big\}$ odpovídající řešení, δ malé.

$\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\in R(s^*-\delta)$

$x_0\in \underbrace{co}_{\text{konvexní obal}}\{0,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\}\subset R(s^*-\delta)$ ↯



$\exists h\in\mathbb{R}^m$; $h\neq 0$ ... $h\cdot(x_1-x_0)\le 0$ $\quad \forall x_1\in R(s^*)$

$$x_0 = -\int_0^{s^*} e^{-sA}Bu^*(s)\,ds$$

$$x_1 = -\int_0^{s^*} e^{-sA}Bu(s)\,ds;\quad u(\cdot)\in\mathcal{U}$$

$$\int_0^{s^*} \underbrace{h^Te^{-sA}B}_{v(s)\in\mathbb{R}^{1\times n}}[u^*(s)-u(s)]\,ds \ge 0$$

Odtud dostaneme (PM) – sporem:

nechť $\exists E\subset(0,s^*)$; $|E|>0$

$\forall s\in E\ \exists \eta_s\in\langle -1,1\rangle^m \dots v(s)u^*(s)<v(s)\eta_s$.

Položme $\hat{u}(s) := \begin{cases} u^*(s); & s\in(0,s^*)\setminus E\\ \eta_s; & s\in E\end{cases}$

$$0\le\int_0^{s^*} v(s)[u^*(s)-\hat{u}(s)]\,ds = \int_E \underbrace{v(s)u^*(s)-v(s)\hat{u}(s)}_{<0}\,ds<0$$

↯ □

Příklad. $x'=y$, $y'=u$ $\quad u:(0,s)\to\langle -1,1\rangle$

Parkovací úloha

nechť u^* je časově optimální regulace.

$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ... $\exists h=(h_1,h_2)^T$; $h\neq 0$

pro s.v. s: $h\cdot e^{-sA}Bu^*(s) = \max\limits_{\eta\in\langle -1,1\rangle} h\cdot e^{-sA}B\eta$

$e^{-sA} = I - sA + \underbrace{\frac{(-s)^2}{2}A^2}_{=0} + \dots \doteq \begin{pmatrix}1&-s\\0&1\end{pmatrix}$

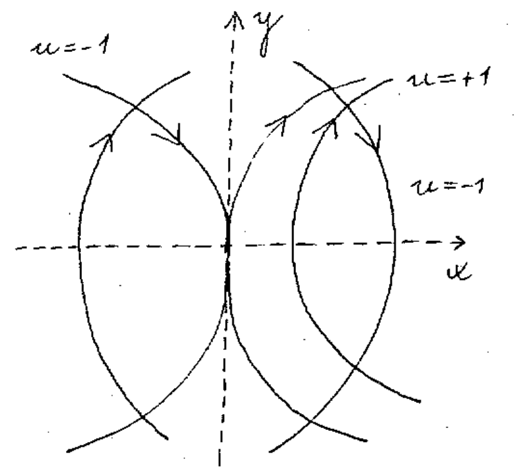
$h\cdot e^{-sA}B = (h_1,h_2)\cdot(-s,1) = -h_1 s + h_2$

(PM) $(h_2-h_1 s)u^*(s) = \max\limits_{\eta\in\langle -1,1\rangle}(h_2-h_1 s)\eta$

$\vdots$

volba: $\eta := \mathrm{sgn}(\underbrace{h_2-h_1 s}_{\neq 0\ \text{s.v.}})$

navíc změní znaménko nejvýše jednou.



Poznámka: $\exists$ časově optimální regulace, je dokázána.

IV. Pontrjagin – obecná verze.

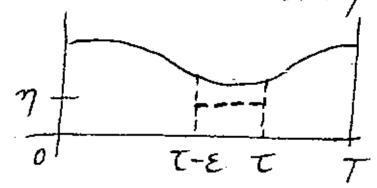
(7) $x' = f(x,u)$ ... $u: \langle 0,T\rangle \xrightarrow{\text{měř.}} U \subset \mathbb{R}^m$
$x(0) = x_0$

$$\max P[u(\cdot)] = g(x(T)) + \int_0^T r(x(s),u(s))\,ds$$

x_0, T ... dáno
$x(T)$ ... není fixováno
f, g ... C^1
r ... C

Věta 18.12. (Pontrjagin – pevný čas.)
Nechť $u^*(\cdot)\in \mathcal{U}$ je lokální maximum úlohy (7), $x^*(\cdot)$ je řešení odpovídající optimální trajektorii.
Potom $\exists P^*: \langle 0,T\rangle \to \mathbb{R}^m$ řešení adjungované rovnice
(ADJ) $(P^*)' = -\nabla_x H(x^*,P^*,u^*)$; $P^*(T) = (\nabla_x g)(x^*(T))$
a je splněn princip maxima:
(PM). $H(x^*(s),P^*(s),u^*(s)) = \max_{\eta\in U} H(x^*(s),P^*(s),\eta)$,
kde $H = H(x,P,u) := P\cdot f(x,u) + r(x,u)$.

Poznámka. • $\max_{x\in\Omega} F(x)$ & podmínka $G(x)=0$.
x_0 lokální extrém $\Rightarrow \exists \lambda\in\mathbb{R}: \nabla F(x_0) = \lambda \nabla G(x_0)$
• v důkazu: bez „*"
$u(\cdot)$ ... lok. maximum
$x(\cdot)$ ... odpovídající trajektorie

Důkaz. 1. krok. nechť $r\equiv 0$; $H(x,P,u) = P^T f(x,u)$
(ADJ) $(P^T)' = -P^T \nabla_x f(x,u)$; $P(T) = (\nabla_x g)(x(T))$
(PM) $P^T(s) f(x(s),u(s)) = \max_{\eta\in U} P^T(s) f(x(s),\eta)$
$\tau\in(0,T)$; $\eta\in U$ pevné
$$u_\varepsilon(s) := \begin{cases}\eta; & s\in(\tau-\varepsilon,\tau)\\ u(s) & \text{jinde}\end{cases}$$


$x_\varepsilon(s)$ ... řešení odpovídající $u_\varepsilon(s)$
$P[u_\varepsilon(\cdot)] = g(x_\varepsilon(T)) \le P[u(\cdot)] = g(x(T))$
ozn. $D = \left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)_+\Big|_{\varepsilon=0}$

$0 \ge Dg(x_\varepsilon(T)) = \nabla_x g(x(T))\, Dx_\varepsilon(T)$
$x_\varepsilon(T)\big|_{\varepsilon=0} = x(T)$

$\underline{(\nabla_x g)(x(T))\cdot Dx_\varepsilon(T) \le 0}$

$Dx_\varepsilon(T) = ?$ ... nejprve spočteme $Dx_\varepsilon(\tau) =$
$= \lim_{\varepsilon\to 0_+} \frac{1}{\varepsilon}[x_\varepsilon(\tau) - x(\tau)]$
$x(\tau) = x_0 + \int_0^\tau f(x(s),u(s))\,ds$
$x_\varepsilon(\tau) = x_0 + \int_0^\tau f(x_\varepsilon(s),u_\varepsilon(s))\,ds$
$u_\varepsilon = u$
$x_\varepsilon = x$ $\quad s\in(0,\tau-\varepsilon)$
$u_\varepsilon = \eta$ $\quad s\in(\tau-\varepsilon,\tau)$
$$\frac{1}{\varepsilon}[x_\varepsilon(\tau) - x(\tau)] = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \underbrace{[f(x_\varepsilon(s),\eta) - f(x(s),u(s))]}_{\psi(s)\in L^1}\,ds$$
$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau}\psi(s)\,ds \longrightarrow \psi(\tau)$ pro s.v. τ (předpokládejme, že máme zrovna „správné" τ)
$\psi(\tau) = f(x(\tau),\eta) - f(x(\tau),u(\tau))$

Závěr: $Dx_\varepsilon(\tau) = f(x(\tau),\eta) - f(x(\tau),u(\tau)) =: v$

(8) $y' = f(y,u) \Rightarrow y(T) = x_\varepsilon(T)$

$y(\tau) = x_\varepsilon(\tau)$

ozn. $z(s) = D\cdot(y(s))$ ... $z(s)$ splní

rovnici ve variacích: $z' = \nabla_x f(x,u)\, z$

$z(\tau) = D x_\varepsilon(\tau) = v$

$$\underbrace{(\nabla_x g)(x(T))}_{P(T)} \cdot z(T) \le 0$$

Tvrdíme: $P\cdot z = \text{konst.}$ v $\langle \tau, T\rangle$

$$\frac{d}{ds}(P\cdot z) = (P^T)' z + P^T z' = -P^T A z + P^T A z$$

$$(P^T)' = (P')^T = (-P^T \underbrace{\nabla_x f(x,u)}_{A}) = -P^T A \quad \text{(konst.)}$$

$$0 \ge P(T)\cdot z(T) = P(\tau)\cdot z(\tau) = P(\tau)\cdot[f(x(s),\eta) - f(x(\tau),u(\tau))]$$

2. krok. $P[u(\cdot)] = g(x(T)) + \int_0^T r(x(s),u(s))\,ds$

$x' = f(x,u);\ x(0) = x_0$

trik: $\left.\begin{array}{l} x'_{n+1} = r(x,u) \\ x_{n+1}(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_{n+1}(T) = \int_0^T r(x(s),u(s))\,ds$

$\tilde{P}[u(\cdot)] = \tilde{g}((x_1,\dots x_{n+1})(T))$

$\tilde{g}(x) = g(x_1,\dots x_n) + x_{n+1}$

převedeme na případ $r \equiv 0$, tedy krok 1.

Dál se v důkazu nebudeme vrtat. □

Příklad. $x' = ku(x)$; $k>0$

$x(0) = x_0$

$\max P[u(\cdot)] = \int_0^T x(s)(1-u(s))\,ds$ ... celková spotřeba

$u \in \langle 0,1\rangle$ ... investice

$1-u$ ... spotřeba

$x(s)$ ... kapitál

$f = ku(x)$

$g = 0$

$r = x(1-u)$

$H = Pf + r = Pkux + x(1-u) = x(1+u(Pk-1))$

u^* ... optimální: (PM) $x(1+u^*(Pk-1)) =$

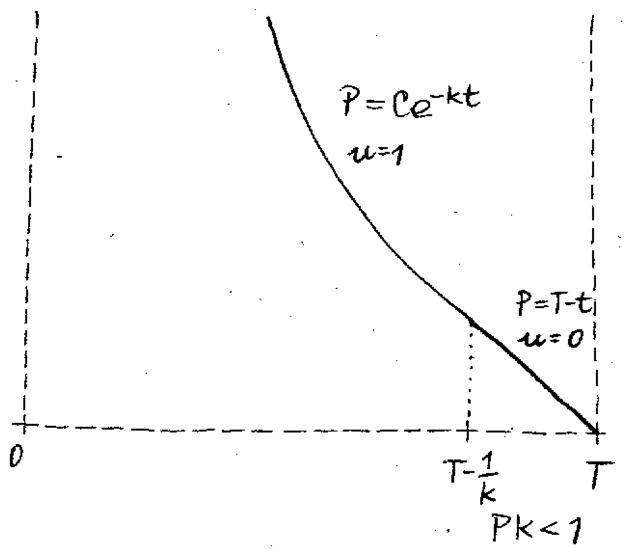
$$= \max_{\eta\in\langle 0,1\rangle} x(1+\eta(Pk-1))$$

rovnice $\Rightarrow x(s) \ge x_0 > 0\ \forall s>0$

(PM) $\Rightarrow u^* \begin{cases} 0; & Pk<1 \\ 1; & Pk>1 \end{cases}$

(ADJ) $P' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -P(1+u^*(Pk-1)) = \begin{cases} -1; & Pk<1 \\ -Pk; & Pk>1 \end{cases}$

$P(T) = g'(x(T)) = 0$



závěr: $\frac{1}{k} < T$ ... $u = 1$ na $\langle 0, \frac{1}{k}\rangle$

$= 0$ na $\langle T-\frac{1}{k}, T\rangle$

$\frac{1}{k} > T$ ... $u = 0$ na $\langle 0, T\rangle$

(9) $x' = f(x,u)$
$x(0) = x_0$
$$P[u(\cdot)] = -\int_0^{s^*} r(x(s),u(s))\,ds$$

s^* ... nejmenší čas, kdy $x(s) = x_1$ ... daný koncový bod

$\mathcal{U} = \{u:(0,s) \to U \text{ měřitelná}\}$; $U \subset \mathbb{R}^m$

Věta 18.13. (Pontrjagin – pevný koncový bod.)
Nechť u^* je lokální maximum úlohy (9).
Potom $\exists P^*:(0,s^*) \to \mathbb{R}^m$ splňující
$((P^*)^T)' = \nabla_x H(x^*,P^*,u^*)$, (ADJ)
platí (PM) $H(x^*(s),P^*(s),u^*(s)) = \max_{\eta\in U} H(x^*(s),P^*(s),\eta)$,
kde $H = H(x,P,u) := P\cdot f(x,u) + q\,r(x,u)$,
kde q je vhodná konstanta.

Příklad. $x_1' = x_2$ — $x_1 \geq 0$ výška
$x_2' = u - g$ — x_2 ... vertikální rychlost
g ... tíhové zrychlení
$u \in \langle -1, 1\rangle$ ... tah motoru

cílový bod: $x_1(s^*) = x_2(s^*) = 0$

$$\max P[u(\cdot)] = -\int_0^{s^*} (k + |u(s)|)\,ds \; ; \; k>0$$

$$H = (P_1,P_2)\cdot(x_2, u-g) - q(k+|u|) \qquad q\in\mathbb{R}$$

(ADJ) $P_1' = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow P_1$ ... konstantní λ_1

$P_2' = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = P_1 \Rightarrow P_2$ ... lineární funkce $\lambda_1 t + \lambda_2$

$$H = P_1 x_2 + P_2 u - P_2 g - qk - q|u| =$$
$$= P_1 x_2 - P_2 g - qk + \underbrace{P_2 u - q|u|}_{\text{ovlivnitelná část}}$$

$$P_2 u - q|u| = \begin{cases} (P_2 - q)u; & u>0 \\ 0; & u=0 \\ (P_2+q)u; & u<0 \end{cases}$$

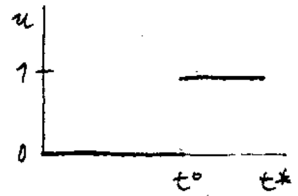
Případ 1) $q>0$.

$P_2 > q$ ... $u = 1$ je nejlepší volba
$P_2 \in (-q, q)$ ... $u = 0$
$P_2 < -q$ ... $u = -1$

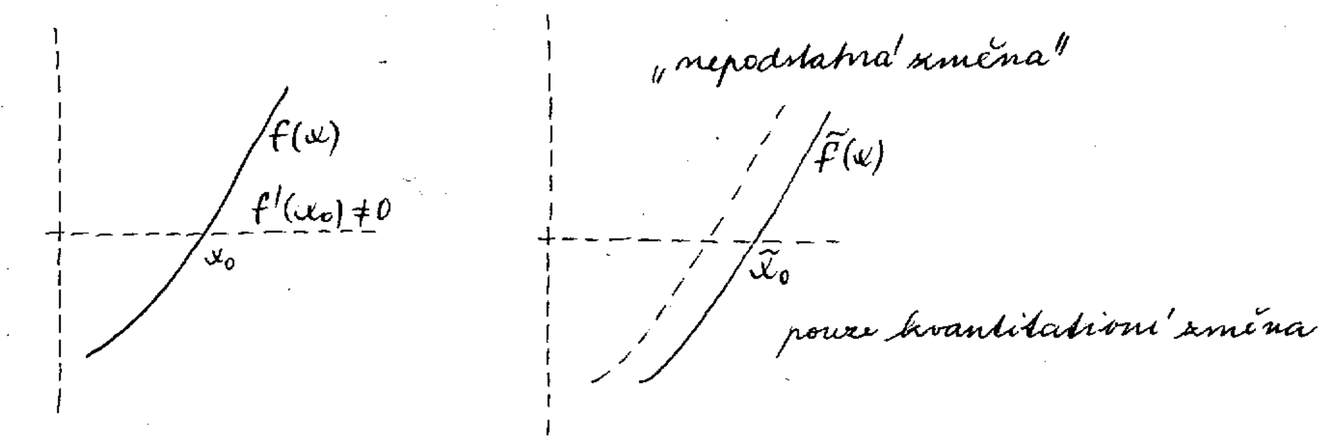
Příklad. $x_1' = x_2$ — x_1 ... výška
$x_2' = -g + \frac{u}{m}$ — x_2 ... vertikální rychlost
$m' = -ku$ — m ... hmotnost lodi
$u \in \langle 0, 1\rangle$ ... tah motorů

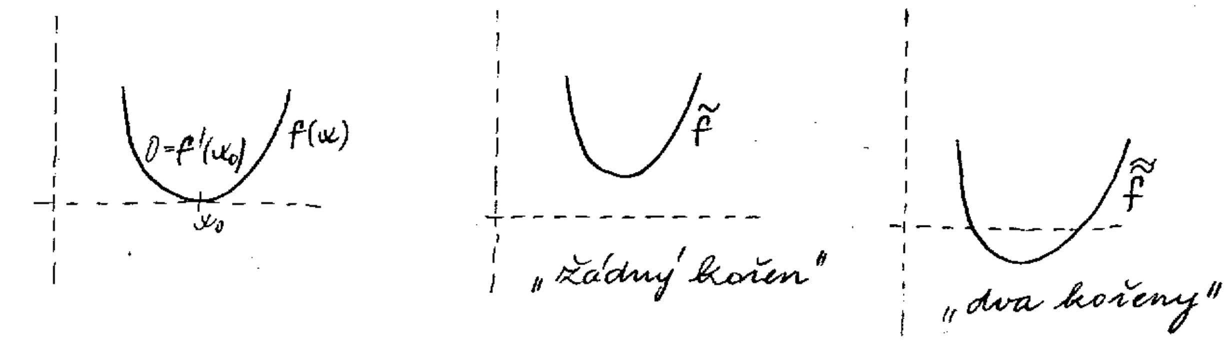
cíl: $\max m(s^*)$

$$m(s^*) = m(0) + \int_0^{s^*} m' = m(0) - k\int_0^{s^*} u(s)\,ds$$



19. Bifurkace





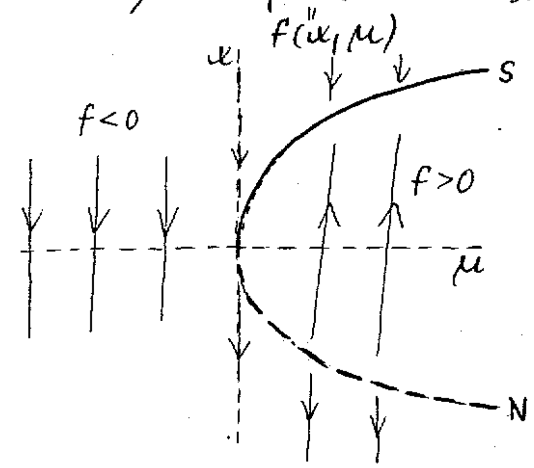
podstatná změna situace: bifurkace.

Situace: $x' = f(x, \mu)$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$

$\mu \in \mathbb{R}$ … bifurkační parametr

Otázka: (x_0, μ_0).. bod bifurkace… chování řešení v okolí x_0 se mění podstatným způsobem pro μ blízké μ_0.

Příklad. 1) $x' = \mu - x^2$ … stacionární body: $\mu = x^2$



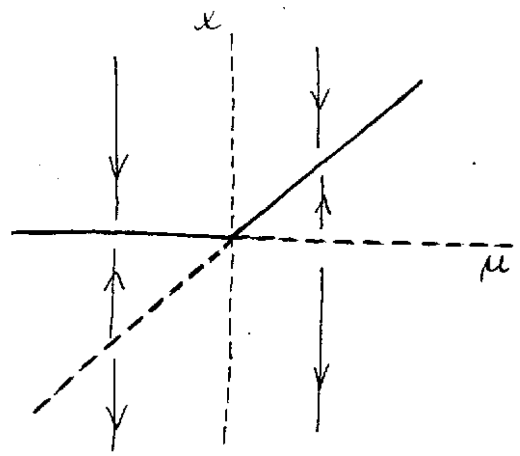
$\mu < 0 : \emptyset$

$\mu = 0 : x = 0$

$\mu > 0 : x = \pm\sqrt{\mu}$

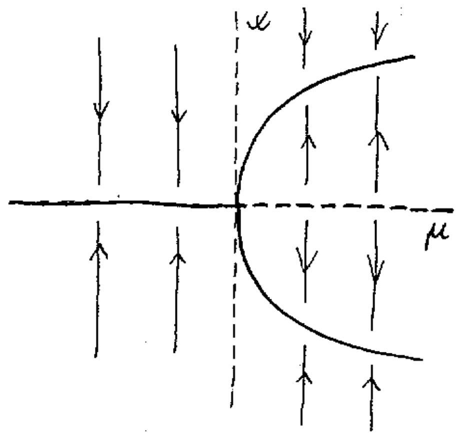
sedlo-uzel

2) $x' = \mu x - x^2 = x(\mu - x)$



transkritická bifurkace.

3) $x' = \mu x - x^3 = x(\mu - x^2)$



vidličková bifurkace.

Poznámka. $x' = f(x,\mu)$; $f(x_0,\mu_0) \neq 0 \Rightarrow (x_0,\mu_0)$ není bod bifurkace

$x' = f(x,\mu_0)$ v okolí x_0 $\xRightarrow[\text{o rektifikaci}]{\text{Lemma}}$ řešení $/\,/\,/$ až na C^1-změnu souřadnic

$x' = f(x,\mu_1)$ v okolí x_0 $\xRightarrow[\text{o rektifikaci}]{\text{Lemma}}$

μ_1 blízko μ_0 ... $f(x_0,\mu_1) \neq 0$

Definice: $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je hyperbolický stacionární bod pro rovnici $x' = h(x)$, jestliže $h(x_0) = 0$ a $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, kde $A = \nabla_x h(x_0)$

Věta 19.1. $f(x,\mu): \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ je C^1 na okolí $(\overset{x}{0},\overset{\mu}{0})$, $f(0,0) = 0$, x_0 je hyperbolický stacionární bod pro rovnici $x' = f(x,0)$. Potom $\exists\, \delta,\Delta > 0$: $\forall \mu \in \mathcal{U}(0,\delta)\ \exists!\, x(\mu) \in \mathcal{U}(0,\Delta)$ tak, že $x(\mu)$ je hyperbolický stacionární bod rovnice $x' = f(x,\mu)$, navíc $x(\mu)$ má stále stejný typ stability (tedy žádná bifurkace).

Důkaz. VIF: $f(x,\mu) \in C^1$

$f(0,0) = 0$

$\nabla_x f(0,0)$ ... regulární, neb $0 \notin \sigma(A)$

$\Rightarrow \exists\, C^1$ funkce $\mu \mapsto x(\mu)$

$\delta,\Delta > 0$ $\mathcal{U}(0,\delta) \to \mathcal{U}(0,\Delta)$,

graf funkce $\mu(\cdot)$ jsou právě všechna řešení $f(x,\mu) = 0$ v okolí $(0,0)$

? hyperbolicita: $\sigma(A_\mu)$; $A_\mu = \nabla_x f(x(\mu),(\mu))$ ... linearizace v $x(\mu)$

char. polynom: $p_\mu(\lambda) = \det(\lambda I - A_\mu)$

„Odbytá argumentace":

μ ... blízko 0

A_μ ... blízko A_0

$\sigma(A_\mu)$ ... blízko $\sigma(A) \Rightarrow \sigma(A_\mu) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ $\square$

Důsledek. x_0 bod bifurkace $\Rightarrow x_0$ je nehyperbolický stacionární bod

Věta 19.2. $f(x,\mu): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je C^2 na okolí $(0,0)$,
$f(0,0)=0$, $\partial_x f(0,0)=0$, $\partial_\mu f(0,0)\neq 0$, $\partial^2_{xx} f(0,0)\neq 0$.
Potom rovnice $x' = f(x,\mu)$ má v bodě $(0,0)$ bifurkaci typu sedlo-uzel.

Důkaz. $f(x,\mu)=0 \dots$ VIF

$f(0,0)=0$

$\partial_\mu f(0,0)\neq 0$

$\exists$ C^2 funkce $x \mapsto \mu(x)$

graf $\mu(\cdot) \Leftrightarrow$ všechna řešení $f(x,\mu)=0$ na okolí $(0,0)$.

$\frac{d}{dx} \Big/ \quad f(x,\mu(x))=0$ na okolí 0

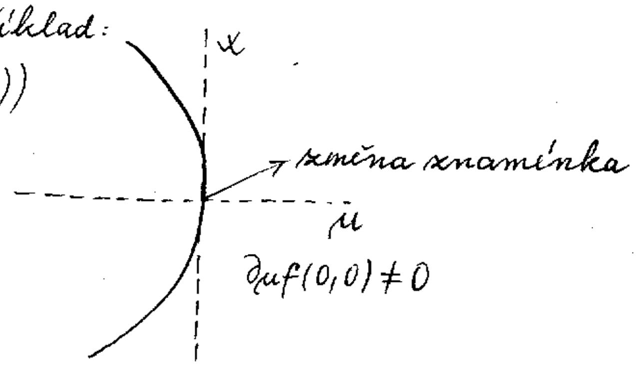
$\frac{d}{dx} \Big/ \quad \partial_x f(x,\mu(x)) + [\partial_\mu f(x,\mu(x))]\mu'(x) = 0 \qquad x=0;\ \mu(0)=0$

$$\mu'(0) = -\frac{\partial_x f(0,0)}{\partial_\mu f(0,0)} = 0$$

$x=0 \Big/ \quad \partial^2_{xx} f + \partial^2_{x\mu} f\, \mu'(x) + \frac{d}{dx}[\ \ ]\mu'(x) + [\ \ ]\mu''(x) = 0$

$$\mu''(0) = -\frac{\partial^2_{xx} f(0,0)}{\partial_\mu f(0,0)} \neq 0$$

například:
(Př. 1))



$\square$

Lemma 19.1. (O vydělení.)

$h(x,\lambda)$ je C^k, $h(0,\lambda)=0$ lokálně na okolí $(0,0)$.

$\Rightarrow \exists H(x,\lambda) \in C^{k-1}$,
$h(x,\lambda) = x H(x,\lambda)$ $\Big\}$ na okolí $(0,0)$ $\qquad k \geq 2$.

a dále platí:

$H(0,\lambda) = \partial_x h(0,\lambda)$

$\partial_x H(0,0) = \frac{1}{2}\partial^2_{xx} h(0,0)$

$\partial_\lambda H(0,0) = \partial^2_{x\lambda} h(0,0)$

$\partial^2_{xx} H(0,0) = \frac{1}{3}\partial^3_{xxx} h(0,0)$

Důkaz. $H(x,\lambda) = \int_0^1 (\partial_x h)(\sigma x,\lambda)\,d\sigma$

$$x H(x,\lambda) = \int_0^1 \underbrace{x\,\partial_x h(\sigma x,\lambda)}_{\frac{\partial}{\partial\sigma} h(\sigma x,\lambda)}\,d\sigma = h(x,\lambda) - h(0,\lambda) = h(x,\lambda)$$

$$H(0,\lambda) = \int_0^1 \partial_x h(0,\lambda)\,d\sigma = \partial_x h(0,\lambda)$$

$$\partial_x H(x,\lambda) = \partial_x \int_0^1 \partial_x h(\sigma x,\lambda)\,d\sigma = \int_0^1 \partial^2_{xx} h(\sigma x,\lambda)\cdot\sigma\,d\sigma$$

$$\partial_x H(0,\lambda) = \int_0^1 \sigma\,\partial_{xx} h(0,\lambda)\,d\sigma = \frac{1}{2}\partial^2_{xx} h(0,\lambda).$$

Podobně další vztahy. $\square$

Věta 19.3. $f(x,\mu): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^2 na okolí $(0,0)$

$f(0,0)=0$, $\partial_x f(0,0)=0$ (nehyperbolický stac. bod)

$f(0,\mu)=0$

$\partial^2_{\mu x} f(0,0)\neq 0$, $\partial^2_{xx} f(0,0)\neq 0$ $\Big\}$ klíčové předpoklady
$\partial_\mu f(0,0) = 0$

Potom $x' = f(x,\mu)$ má v bodě $(0,0)$ transkritickou bifurkaci.

Důkaz. $f(x,\mu) = x F(x,\mu)$ (L. 19.1.)

stacionární body: $x=0$
$F(x,\mu)=0$

$F \in C^1$; $\partial_\mu F(0,0) = \partial^2_{x\mu} f(0,0) \neq 0$

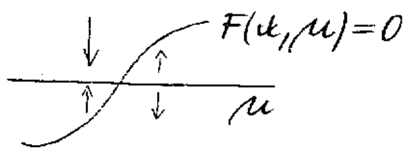
$\overset{VIF}{\Longrightarrow}$ $\exists\, C^1$ funkce : $x \longmapsto \mu(x)$ ... všechna řešení $F(x,\mu)=0$ v okolí $(0,0)$

$\mu'(0) = ?$

$F(x,\mu(x)) = 0$

$\partial_x F(x,\mu(x)) + \partial_\mu F(x,\mu(x))\cdot \mu'(x) = 0$; $\quad x=0, \mu(0)=0$

$$\mu'(0) = \frac{-\partial_x F(0,0)}{\partial_\mu F(0,0)} = \frac{-\frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(0,0)}{\partial^2_{x\mu} f(0,0)} \neq 0$$



navíc změna znaménka $x=0$, $F(x,\mu)=0$ $\square$

Věta 19.4. $f(x,\mu) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^3 na okolí $(0,0)$

$f(0,0) = 0$, $\partial_x f(0,0) = 0$,

$f(0,\mu) = 0$, $\partial^2_{xx} f(0,0) = 0$,

$\partial^2_{\mu x} f(0,0) \neq 0$, $\partial^3_{xxx} f(0,0) \neq 0$.

Potom rovnice $x' = f(x,\mu)$ má v $(0,0)$ bifurkaci typu vidlička.

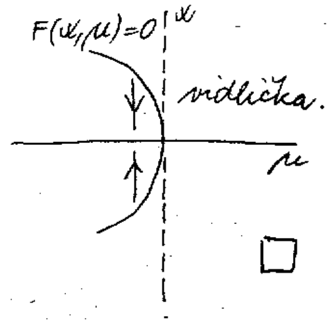
Důkaz. $f(x,\mu) = x F(x,\mu)$; $F(x,\mu) \in C^2$

L 19.1. $\Rightarrow$ $\partial_\mu F(0,0) = \partial^2_{x\mu} f(0,0) \neq 0$

$\exists\, C^2$ funkce $x \longmapsto \mu(x)$ ... nulové body $F(x,\mu)$

$F(x,\mu(x)) = 0$ ... $\partial_x F(0,0) = \frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(0,0) = 0$

$\partial^2_{xx} F(0,0) = \frac{1}{3}\partial^3_{xxx} f(0,0) \neq 0$



Podobně jako ve V. 19.3 : $\mu'(0) = 0$, $\mu''(0) \neq 0$. $\square$

Věta 19.5. (Hopfova bifurkace.)

$f(x,y,\mu) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, C^2 na okolí $(0,0,0)$,

$f(0,0,\mu) = (0,0)$

$A_\mu = \nabla_{x,y} f(0,0,\mu)$; $\sigma(A_\mu) = \{\alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)\}$

$\alpha(\cdot)$, $\omega(\cdot)$ C^2 funkce,

$\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) \neq 0$, $\omega(0) > 0$ (klíčové předpoklady)

Potom $\exists\, \delta, \Delta > 0$ a C^1 funkce $a \longmapsto \mu(a)$
$(0,\delta) \longrightarrow (-\Delta,\Delta)$

takové, že pro $\forall a \in (0,\delta)$ prochází bodem $(x_0, y_0) = (a,0)$ netriviální periodické řešení rovnice $\binom{x}{y}' = f(x,y,\mu(a))$.

Důkaz. Bůno $A_\mu = \begin{pmatrix} \alpha(\mu), & -\omega(\mu) \\ \omega(\mu), & \alpha(\mu) \end{pmatrix}$

(1) $x' = \alpha(\mu)x - \omega(\mu)y + f^1(x,y,\mu)$
$\quad\; y' = \omega(\mu)x + \alpha(\mu)y + f^2(x,y,\mu)$

$|f^1|, |f^2| = O(x^2+y^2)$

polární souřadnice:

$x(t) = r(t)\cos\theta(t)$

$y(t) = r(t)\sin\theta(t)$

(2) $r' = \alpha(\mu)r + R(r,\theta,\mu)$ $\qquad |R|, |Q| = O(r^2)$

$r\theta' = \omega(\mu)r + Q(r,\theta,\mu)$

$\theta' = \omega(\mu) + \tilde{Q}(r,\theta,\mu)$ $\quad |\tilde{Q}| = O(r)$ $\quad$ (L. 19.1.: $Q = r\tilde{Q}$)

μ, r malé: $\omega(\mu) > \frac{1}{2}\omega(0)$

$|\tilde{Q}(r,\theta,\mu)| < \frac{1}{4}\omega(0)$

$\theta' > \frac{1}{4}\omega(0) > 0$ ... $\theta(t)$ roste ... $t \leftrightarrow \theta$
$r = r\theta$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\alpha(\mu)r + R(r,\theta,\mu)}{\omega(\mu) + \tilde{Q}(r,\theta,\mu)}$$

(3) $r' = \lambda(\mu) r + P(r,\theta,\mu)$; $|P| = O(r^2)$

$\lambda(\mu) = \dfrac{\alpha(\mu)}{\omega(\mu)}$, $r = r(\theta)$

$$\frac{\alpha r + R}{\omega + \tilde{Q}} = (\alpha r + R)\omega^{-1}(1 - \omega\tilde{Q} + \dots) = \frac{\alpha}{\omega} r + O(r^2)$$

$$\frac{1}{\omega + \tilde{Q}} = \omega^{-1}\frac{1}{1+\tilde{\omega}\tilde{Q}} = \omega^{-1}(1 - \tilde{\omega}\tilde{Q} + (\tilde{\omega}\tilde{Q})^2 + \dots)$$

klíčové pozorování: periodické řešení (1) nebo (2) najdeme, právě když $r = r(\theta)$ řešení (3)

$r(0) = r(2\pi)$

$R, Q, \tilde{Q}$, a tedy P jsou 2π-periodické vůči θ

$\hat{r} = \hat{r}(\theta; a, \mu)$ řešení (3) s poč. podmínkou $r(0) = a$

variace konstant:

$$\hat{r}(\theta; a, \mu) \cdot e^{-\lambda(\mu) a} = a + \int_0^\theta e^{-\lambda(\mu)s} P(\hat{r}(s,a,\mu), s, \mu)\, ds$$

$$\left(\begin{aligned} &r' = \lambda r + P(r) \\ &r(\theta) e^{-\lambda\theta} = r(0) + \int_0^\theta e^{-\lambda s} P(r(s))\, ds \end{aligned} \right)$$

$\hat{r}(2\pi, a, \mu) = \hat{r}(0, a, \mu) = a$:

$$0 = \underbrace{a(1 - e^{-\lambda(\mu)2\pi}) + \int_0^{2\pi} e^{-\lambda(\mu)s} P(\hat{r}(s,a,\mu), s, \mu)\, ds}_{h(a,\mu)}$$

$h(0,\mu) = 0 \quad \Leftarrow \hat{r}(s, 0, \mu) \equiv 0$ ($r \equiv 0$ řeší (3))

počátek = triviální periodické řešení

L. 19.1.: $h(a,\mu) = aH(a,\mu)$; $h \in C^2$, $\lambda(\cdot), \hat{r}(\cdot) \in C^2$

$\Rightarrow H \in C^1$

2. $\partial_\mu H(0,0) \neq 0 \Rightarrow \exists C^1: a \mapsto \mu(a)$

$r(0) = a$ je poč. podm. netr. per. řeš. původní soustavy

L. 19.1: $\partial_\mu (H(0,0)) = \partial^2_{\mu a} h(0,0)$

$$\partial_a h(a,\mu) = 1 - e^{-\lambda(\mu)2\pi} + \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-\lambda(\mu)s} \partial_r P(\hat{r}(s,a,\mu), s, \mu) \cdot \frac{\partial \hat{r}}{\partial a}(s,a,\mu)\, ds}_{g(a,\mu)}$$

$$\partial^2_{a\mu} h(a,\mu) = 2\pi e^{-\lambda(\mu)2\pi} \lambda'(\mu) + \partial_\mu g(a,\mu)$$

$$\partial^2_{a\mu} h(0,0) = \underbrace{2\pi \cdot \lambda'(\mu)}_{\neq 0} + \partial_\mu g(0,0) \longrightarrow \lim_{\mu \to 0} \frac{1}{\mu}[g(0,\mu) - g(0,0)] = 0$$

$\lambda'(\mu) = \dfrac{\alpha'(\mu)}{\omega(\mu)} - \dfrac{\alpha(\mu)}{\omega^2(\mu)}\omega'(\mu)$

$\left.\begin{aligned} &a = 0 \dots \hat{r}(\dots) \equiv 0 \\ &\partial_r P(0,\dots) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g = 0$

□

Věta 19.6. (Hopf 2)

nechť jsou splněny předpoklady věty 19.5, nechť navíc $A_0 = \nabla_{x,y} f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega(0) \\ \omega(0) & 0 \end{pmatrix}$

Potom existuje hladká (obecně nelineární) záměna souřadnic taková, že v polárních souřadnicích má systém tvar

$\boxed{r' = d\mu r + ar^3} + O(r^5)$,

přičemž pro r, μ malá se řešení chovají jako část v rámečku.

navíc $d = \alpha'(0)$,

$$16a = (f^1_{xxx} + f^1_{xyy} + f^2_{xxy} + f^2_{yyy}) + \frac{1}{\omega(0)}\left[f^1_{xy}(f^1_{xx} + f^1_{yy}) - f^2_{xy}(f^2_{xx} + f^2_{yy}) - f^1_{xx} f^2_{xx} + f^1_{yy} f^2_{yy}\right]$$

to celé v $(0,0,0)$

Důkaz. Bez důkazu (překvapivě.) □

Důsledek. $a > 0 \Rightarrow (0,0)$ nestabilní pro $\mu = 0$

$a < 0 \Rightarrow (0,0)$ stabilní pro $\mu = 0$

20. Stabilní, nestabilní a centrální variety.

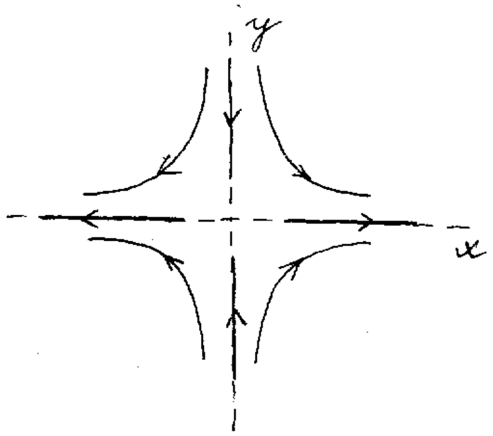
$X' = MX$; $\sigma(M)\cap i\mathbb{R} \neq \emptyset \ldots \sigma(M) = \underset{X^+}{\sigma^+(M)}\cup\underset{X^-}{\sigma^-(M)}$

Vhodná volba báze: $X = (\underset{\mathbb{R}^n}{x}, \underset{\mathbb{R}^m}{y})$

$x' = Ax$ $\quad A = M|_{X^+}$

$y' = By$ $\quad B = M|_{X^-}$

tj. $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, $\operatorname{Re}\sigma(B) < 0$



Situace. (1) $x' = Ax + f(x,y)$

$y' = By + g(x,y)$

$\sigma(A) \subset \{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{Re} z \geq 0\}$

$\sigma(B) \subset \{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{Re} z < -\beta\}$ $(\Rightarrow \|e^{Bt}\| \leq c\cdot e^{-\beta t}\ \forall t\geq 0)$

$f, g \in C^1$

$f, g, \nabla f, \nabla g = 0$ v $(x,y) = (0,0)$

$\left.\begin{array}{l}|f|, |g| \leq \rho \\ |\nabla f|, |\nabla g| \leq \sigma\end{array}\right\}$ všude v $\mathbb{R}^e$

Cíl: $\exists$ funkce $\phi(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, lipschitzovská, $\phi(0) = \nabla\phi(0) = 0$ taková, že graf ϕ je invariantní vůči řešení rovnice:

(INV) $(x(t), y(t))\ldots$ řešení (1) a platí $y(0) = \phi(x(0))$

$\Rightarrow y(t) = \phi(x(t))\ \forall t\in\mathbb{R}$

$\mathcal{X} := \{\phi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), |\phi| \leq b;\ \underset{\text{lipschitzovská konstanta}}{L_\phi} \leq \ell,\ \phi(0) = 0$

Definice. Redukovaná rovnice: (2) $p' = Ap + f(p, \phi(p))$, $p \in \mathbb{R}^n$

Lemma 20.1. ϕ má vlastnost invariance, právě když platí princip redukce:

(RED) Nechť $p(t)$ řeší rovnici (2). Potom $(x(t), y(t)) = (p(t), \phi(p(t)))$ řeší systém (1).

Poznámka. Pro (1) a (2) platí globální existence a jednoznačnost. (Nelinearity jsou globálně lipschitzovské.)

Důkaz (Lemmatu.)

(INV) $\Rightarrow$ (RED).

nechť $p(t)$ řeší (2).

nechť $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$ je řešení (1) s počáteční podmínkou

$\tilde{x}(0) = p(0)$

$\tilde{y}(0) = \phi(p(0))$.

Tj. $(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0)) \in \Gamma$ (graf ϕ) $\overset{(INV)}{\Longrightarrow} \tilde{y}(t) = \phi(\tilde{x}(t))$ pro $\forall t$

$\tilde{x}' = A\tilde{x} + f(\tilde{x}, \tilde{y}) = A\tilde{x} + f(\tilde{x}, \phi(\tilde{x}))$,

tj. $\tilde{x}(t)$ řeší (2) s počáteční podmínkou $\tilde{x}(0) = p(0)$

jednoznačnost $\Rightarrow \tilde{x}(t) = p(t)$ pro $\forall t$

$\tilde{y}(t) = \phi(p(t))$

Tzn. $(p(t), \phi(p(t)))$ řeší (1).

(INV) $\Leftarrow$ (RED).

$\left.\begin{array}{l}\text{nechť } (x(t), y(t)) \text{ je řešení (1).} \\ y(0) = \phi(x(0))\end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} y(t) = \phi(x(t))\ \forall t$

nechť $\tilde{p}(t)$ je řešení (2) s počáteční podmínkou $\tilde{p}(0) = x(0)$

(RED) $\Rightarrow (\tilde{p}(t), \phi(\tilde{p}(t)))$ řeší (1) s počáteční podmínkou $(\underset{x(0)}{\underset{\parallel}{\tilde{p}(0)}}, \underset{\phi(x(0)) = y(0)}{\underset{\parallel}{\phi(\tilde{p}(0))}})$

jednoznačnost $\Rightarrow \tilde{p}(t) = x(t)$; $\underset{\phi(x(t))}{\underset{\parallel}{\phi(\tilde{p}(t))}} = y(t)\ \forall t$

Tedy platí (inv). $\square$

Poznámka. jiná, ekvivalentní formulace (RED):

nechť $p = p(t, \cancel{p_0})$ řeší (2) $p' = Ap + f(p, \phi(p))$, $\cancel{p(0) = p_0}$.

Potom $y(t) := \phi(p(t))$ řeší rovnici (RED')

(3) $y' = By + g(\underset{x}{\underset{\parallel}{p}}, \underbrace{\phi(p)}_{y})$

Zvláštní pozorování: nutně $y(t)$ je omezené pro $t \to -\infty$ ($\phi(\cdot)$ apriori omezená.)

Lemma 20.2. nechť $\gamma = \gamma(t)$ je omezená na $(-\infty, 0\rangle$.
Potom existuje jediné řešení rovnice

(4) $y' = By + \gamma(t)$

omezené pro $t \to -\infty$.
Toto řešení má počáteční podmínku

$$y(0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-Bs} \gamma(s)\, ds.$$

Důkaz. variace konstant: $y(t) = e^{tB} y(0) + \int_0^t e^{(t-s)B} \gamma(s)\, ds \quad | \, e^{-tB}$

$$e^{-tB} y(t) = y(0) + \int_0^t e^{-sB} \gamma(s)\, ds \quad | \, t \to -\infty$$

nechť $y(t)$ je omezené pro $t \to -\infty$.

$$y(0) = -\int_0^{-\infty} e^{-sB} \gamma(s)\, ds = \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{-sB} \gamma(s)\, ds}_{\text{integrál konverguje.}}$$

nyní nechť $y(t)$ řeší (4); $y(0) = \int_{-\infty}^0 e^{-sB} \gamma(s)\, ds$.

variace konstant: $y(t) = e^{tB} \int_{-\infty}^0 e^{-sB} \gamma(s)\, ds + \int_0^t e^{(t-s)B} \gamma(s)\, ds$; $t < 0$

$$= \int_{-\infty}^t e^{B(t-s)} \gamma(s)\, ds$$

$$|y(t)| \le \int_{-\infty}^t \overbrace{\| e^{(t-s)B} \|}^{\le c_1 e^{-\beta(t-s)}} |\gamma(s)|\, ds \le$$

$$\le c_2 \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)}\, ds = \frac{c_2}{\beta}$$

□

(RED): nechť $\hat{p} = \hat{p}(t, p_0)$ řeší (2) $p' = Ap + f(p, \phi(p))$, $p(0) = p_0$

Potom $y(t) := \phi(\hat{p}(t, p_0))$ řeší (3) $y' = By + g(\hat{p}, \phi(\hat{p}))$, $y(0) = \phi(\hat{p}(0)) = \phi(p_0)$

$y(t)$ ... omezené pro $t \to -\infty$,

Lemma 20.2 $\Rightarrow \phi(p_0) = \int_{-\infty}^0 e^{-sB} g(\hat{p}(s, p_0), \phi(\hat{p}(s, p_0)))\, ds$ (PB)

ϕ splní (INV) $\Leftrightarrow$ ϕ splní (RED) $\Rightarrow$ ϕ splní (PB)

Lemma 20.3. $\phi \in \mathcal{X}$ splňuje (INV) $\Leftrightarrow$ splňuje

(PB) $\forall p_0 \in \mathbb{R}^m$: $\phi(p_0) = \int_{-\infty}^0 e^{-Bs} g(p(s), \phi(p(s)))\, ds$,

kde $p(\cdot)$ je řešení (2) $p' = Ap + f(p, \phi(p))$, $p(0) = p_0$

Důkaz. „$\Rightarrow$" p_0 dáno, $p(t)$ řešení (2) ... (INV) $\Rightarrow$ (RED'):

$y(t) = \phi(p(t))$ řeší (3) $y' = By + g(p, \phi(p))$

$\phi(\cdot)$ omezená $\Rightarrow$ $y(t)$ omezená pro $t \to -\infty$

L 20.2.: $y(0) = \int_{-\infty}^0 e^{-Bs} g(p(s), \phi(p(s)))\, ds$, tj. (PB) platí.

„$\Leftarrow$" Chceme (PB) $\Rightarrow$ (RED'): $p(t)$ řeší (2) a $y(t)$ řeší (3)
s počáteční podmínkou $y(0) = \phi(p_0)$

$\overset{?}{\Rightarrow}$ $y(t) = \phi(p(t))$ $\forall t$

nechť $t_1 \in \mathbb{R}$ libovolné pevné.

Def. $y_1(t) := y(t + t_1)$; $p_1(t) = p(t + t_1)$

Tyto rovnice splňují:

$p_1' = Ap_1 + f(p_1, \phi(p_1))$, $p(0) = p(t_1)$;

$y_1' = By_1 + g(p_1, \phi(p_1))$, $y_1(0) = y(t_1)$.

$y(0) = \phi(p_0) \overset{(PB)}{=} \int_{-\infty}^0 e^{-Bs} g(p(s), \phi(p(s)))\, ds$

L 20.2: (3) $\Rightarrow$ $y(t)$ omezené pro $t \to -\infty$

$\Rightarrow y_1(t)$ omezené pro $t \to -\infty$

L. 20.2.: $y_1(0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-Bs} g(p_1(s), \phi(p_1(s)))\, ds \overset{(PB)}{=} \phi(p(t_1))$

$\quad \| $

$\quad y(t_1)$

$p_1(\cdot)$ řešení (2),

$p_1(0) = p(t_1)$. $\square$

<u>Věta 20.1.</u> Nechť A, B, f, g splňují řečené předpoklady. Potom (za určitých podmínek na $\beta, \rho, \sigma, b, \ell$) $\exists!\, \phi \in \mathcal{X}$; ϕ splní (INV).

<u>Důkaz</u>. $\mathcal{X} = \{\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m;\ \phi(0) = 0;\ |\phi| \le b;\ L_\phi \le \ell\}$

$\mathcal{X}$ je uzavřená podmnožina $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$,

$\|\phi\|_{\mathcal{X}} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\phi(x)|$ ... úplný metrický prostor.

$T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $\phi \mapsto T\phi$; $(T\phi)(p_0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-Bs} g(p(s), \phi(p(s)))\, ds$,

kde $p(t)$ řeší (2) $p' = Ap + f(p, \phi(p))$; $p(0) = p_0$

$\sigma(B) \subset \{Re\, z < -\beta < 0\} \Rightarrow \|e^{tB}\| \le c_0 e^{-\beta t}\ \forall t \ge 0$

$\sigma(A) \subset \{Re\, z \ge 0\} \Rightarrow z \cdot Az \ge -\varepsilon |z|^2$; $\varepsilon > 0$ malé!

Změna báze: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \eta & & \\ & \ddots & \ddots \eta & \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}$

$z \cdot Az = \sum_j \underbrace{\lambda_j z_j^2}_{\ge 0} [+ \eta z_j z_{j+1}] \ge -c\eta |z|^2$

$|f|, |g| \le \rho$, $|\nabla f|, |\nabla g| \le \sigma \Rightarrow |f(x,y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})| \le \sigma(|x - \tilde{x}|, |y - \tilde{y}|)$, stejně pro g.

Pomocné výpočty:

(P1) $y' \ge -ay - \sigma\ \forall t \le 0$; $a > 0, \sigma \ge 0 \Rightarrow y(t) \le e^{-at}[y(0) + \frac{\sigma}{a}]\ \forall t \le 0$.

(P2) $\phi \in \mathcal{X}$: $|f(p, \phi(p)) - f(q, \phi(q))| \le \sigma(1 + \ell)|p - q|$

(P3) $\phi, \psi \in \mathcal{X}$: $|f(p, \phi(p)) - f(q, \psi(q))| \le \sigma[(1+\ell)|p - q| + \|\phi - \psi\|_{\mathcal{X}}]$

(P1) Cvičení!

(P2) Speciální případ (P3)

(P3) $|f(p, \phi(p)) - f(q, \psi(q))| \le |f(p, \phi(p)) - f(q, \phi(q))| +$

$+ |f(q, \phi(q)) - f(q, \psi(q))| \le$

$\le \sigma(|p - q| + \underbrace{|\phi(p) - \phi(q)|}_{\le \ell |p - q|}) + \sigma(\underbrace{|\phi(q) - \psi(q)|}_{\le \|\phi - \psi\|_{\mathcal{X}}})$

Cíl: $\rho, \sigma, \varepsilon$ malé $\Rightarrow T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ je kontrakce.

Potom $\exists!\, \phi \in \mathcal{X} : \phi = T\phi \Leftrightarrow \phi$ splní (PB)

<u>1. krok.</u> $T\phi$ je dobře definováno:

PS v (2) je globálně lipschitzovská $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ globální existence a jednoznačnost.

$|T\phi(p_0)| \le \int_{-\infty}^{0} \underbrace{\|e^{-sB}\|}_{\le c_0 e^{\beta s}} \cdot \underbrace{|g(\dots)|}_{\le \rho}\, ds \le \frac{c_0 \rho}{\beta}$

$\frac{c_0 \rho}{\beta} \le b \Leftrightarrow \rho \le \frac{b\beta}{c_0}$ ... $|T\phi| \le b$

<u>2. krok.</u> $T\phi \in \mathcal{X}$:

$?\ (T\phi)(0) = 0$: $p(t)$ řeší (2) s p.p. $p(0) = 0$

$\Rightarrow p(t) \equiv 0$, neboť $f(0,0) = 0$, $\phi(0) = 0$

$\Rightarrow (T\phi)(0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} g(0,0)\, ds = 0$

$?\ L_{T\phi} \le \ell$: p_0, q_0 libovolné.

$(T\phi)(p_0) - (T\phi(q_0)) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB}[g(p(s), \phi(p(s))) - g(q(s), \phi(q(s)))]\, ds$

$p(t)$ řeší (2) $p' = Ap + f(p, \phi(p))$, $p(0) = p_0$,

$q(t)$ řeší (2) $q' = Aq + f(q, \phi(q))$, $q(0) = q_0$

$$|(T\phi)(p_0)-(T\phi)(q_0)| \le \int_{-\infty}^{0} \|e^{-sB}\| \cdot |g(\dots)-g(\dots)|\, ds \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{0} c_0 e^{+\beta s} \sigma(1+\ell)|p(s)-q(s)|\, ds$$

$z(s) := p(s)-q(s)$ řeší $z' = Az + f(p,\phi(p)) - f(q,\phi(q))$, $/ 2z\cdot$
$z(0) = p_0 - q_0$.

$$2z\cdot z' = 2z\cdot Az + 2z\cdot(f(p,\phi(p))-f(q,\phi(q)))$$

$$\frac{d}{ds}|z|^2 \ge -2\varepsilon|z|^2 - 2|z|\cdot \underbrace{|f(\dots)-f(\dots)|}_{\le \sigma(1+\ell)|p-q|}$$

$$\frac{d}{ds}|z|^2 \ge -2(\varepsilon+\sigma(1+\ell))|z|^2$$

(P1) $\Rightarrow |z(s)|^2 \le |z(0)|^2 \cdot e^{-2(\varepsilon+\sigma(1+\ell))s}$ $\forall s \le 0$

$\Rightarrow |p(s)-q(s)| \le |p_0-q_0| e^{-(\varepsilon+\sigma(1+\ell))s}$

$$|(T\phi)(p_0)-(T\phi)(q_0)| \le \underbrace{c_0\sigma(1+\ell)\int_{-\infty}^{0} e^{s[\beta-\varepsilon-\sigma(1+\ell)]}ds}_{\frac{c_0\sigma(1+\ell)}{\beta-\varepsilon-\sigma(1+\ell)} \le \ell} \cdot |p_0-q_0|$$

platí pro σ, ε malé.

$\Rightarrow T\phi \in \mathcal{X}$

<u>3. krok</u>. $T: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ je kontrakce.

$$\|T\phi - T\psi\|_{\mathcal{X}} = \sup_{p_0} |(T\phi)(p_0)-(T\psi)(p_0)| \le \kappa \|\phi-\psi\|_{\mathcal{X}}$$

$\phi, \psi \in \mathcal{X}$, $p_0 \in \mathbb{R}^n$ pevné

$$(T\phi)(p_0)-(T\psi)(p_0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB}[g(p(s),\phi(p(s))) - g(q(s),\phi(q(s)))]\,ds;$$

$p(s), q(s)$ řeší (2), $p_0 = q_0$

$$|(T\phi)(p_0)-(T\psi)(p_0)| \le \int_{-\infty}^{0} \|e^{-sB}\| \cdot |g(p(s),\phi(p(s))) - g(q(s),\phi(q(s)))|\,ds$$

(P3): $\displaystyle \le \int_{-\infty}^{0} c_0 e^{\beta s}[\sigma(1+\ell)|p(s)-q(s)| + \sigma\|\phi-\psi\|_{\mathcal{X}}]\,ds$

$z(s) := p(s)-q(s)$ řeší $z' = Az + f(p,\phi(p)) - f(q,\psi(q))$
$z(0) = 0$

$$\frac{d}{ds}|z|^2 = 2z\cdot Az + 2z\cdot(f(\dots)-f(\dots))$$

(P3): $\ge -2\varepsilon|z|^2 - 2|z|(\sigma(1+\ell)|z| + \sigma\|\phi-\psi\|_{\mathcal{X}})$

$\ge -2(\varepsilon+\sigma(1+\ell))|z|^2 - 2\sigma|z|\cdot\|\phi-\psi\|_{\mathcal{X}}$

Young: $|z|\cdot\|\phi-\psi\|_{\mathcal{X}} \le \frac{1}{2}(|z|^2 + \|\phi-\psi\|_{\mathcal{X}}^2)$

$$\frac{d}{ds}|z|^2 \ge -2(\varepsilon+\sigma(2+\ell))|z|^2 - \|\phi-\psi\|_{\mathcal{X}}^2\cdot\sigma$$

(P1): $\displaystyle |z(s)|^2 \le e^{-2(\varepsilon+\sigma(2+\ell))s}\Big[\underbrace{|z(0)|^2}_{=0} + \frac{\sigma\|\phi-\psi\|_{\mathcal{X}}^2}{\varepsilon+\sigma(2+\ell)}\Big]$

$$|p(s)-q(s)| \le e^{-(\varepsilon+\sigma(2+\ell))s}\cdot\sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon+\sigma(2+\ell)}}\cdot\|\phi-\psi\|_{\mathcal{X}}$$

$$|(T\phi(p_0)-T\psi(p_0)| \le \underbrace{c_0\sigma\int_{-\infty}^{0} e^{\beta s}\Big[(1+\ell)e^{-(\varepsilon+\sigma(2+\ell))s}\sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon+\sigma(2+\ell)}}+1\Big]ds}_{\kappa<1} \cdot \|\phi-\psi\|_{\mathcal{X}}$$

pro σ malé, $\beta-\varepsilon-\sigma(2+\ell)>0$

1.-3. krok $\Rightarrow \exists!\, \phi \in \mathcal{X}$, $\phi = T\phi$

<u>4. krok</u>. Hladkost ϕ.

Cíl: $\nabla\phi(0) = 0$, tedy $\varepsilon > 0$, $\exists\delta>0: |\phi(p)| < C\varepsilon|p|$ $\forall |p|<\delta$ $\left(\lim_{|p|\to 0}\frac{\phi(p)}{|p|} = 0\right)$

$\varepsilon > 0$ dáno. $\exists\Delta>0 \dots |g(x,y)| \le \varepsilon(|x|+|y|)$ pro $(x,y) \in \mathcal{U}(0,\Delta)$, protože $\nabla g(0) = 0$.

$$\phi(p_0) = T\phi(p_0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} g(p(s), \phi(p(s)))\,ds$$

$p(s)\dots$ řešení $p' = Ap + f(p,\phi(p))$
$p(0) = p_0$

Dodatečný předpoklad: $\sigma(A) \subset \{\mathrm{Re}\, z > \alpha > 0\}$

$\Rightarrow z\cdot Az \ge \alpha|z|^2$

$$\frac{d}{dt}|p|^2 \ge 2p\cdot Ap - 2p\cdot f(p,\phi(p))$$

$$\ge 2\alpha|p|^2 - 2\sigma(1+\ell)|p|^2 = 2(\alpha-\sigma(1+\ell))|p|^2 \ge 0 \text{ pro } \sigma \text{ malé}$$

$\Rightarrow |p(s)| \le |p_0| \quad \forall s \le 0$

$|p_0| < \delta \Rightarrow |p(s)| < \delta, \forall s \le 0$:

$$|(J\phi)(p_0)| \le \int_{-\infty}^{0} \|e^{-sB}\|\,|g(p(s),\phi(p(s)))|\,ds$$

$$\le \int_{-\infty}^{0} C_0 e^{\beta s}\varepsilon(|p(s)|+|\phi(p(s))|)\,ds$$

Potřebujeme $(p(s),\phi(p(s))) \subset \mathcal{U}((0,0),\Delta)$

$|p(s)+\phi(p(s))| \le (1+\ell)|p(s)| < \Delta$

stačí, aby $\sigma(1+\ell) < \Delta$.

$$|(J\phi)(p_0)| \le \varepsilon(1+\ell)|p_0|\int_{-\infty}^{0} C_0 e^{\beta s}\,ds = C\varepsilon|p_0|\ ;\ C = \frac{C_0}{\beta}(1+\ell).$$

5. krok. $f, g \in C^k \Rightarrow \phi \in C^k$

(nebudeme dokazovat.) $\square$

aplikace 1. Stabilní, nestabilní varieta.

$X' = F(X)$; X (búno$=0$) je hyperbolický stacionární bod:

$M = \nabla_x F(0) \ldots \sigma(M) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$

$X' = MX + G(X)$; $G, \nabla G = 0$ v $X = 0$

$|G| \le \rho$; $|\nabla G| \le \sigma$ na $\mathcal{U}(0,\Delta)$

ρ, σ dána $\Rightarrow \exists\, \Delta > 0$

Lze modifikovat G vně $\mathcal{U}(0,\Delta)$ tak, že odhady platí globálně

Změna báze: $X = (x,y) \ldots$ $x' = Ax + f(x,y)$
$y' = By + g(x,y)$

$\binom{f}{g} = G$ $\quad X \in R^N = V \oplus W \quad A = M|_V$; $B = M|_W$

kladná (V), záporná (W) část spektra

Poznámky. (1) Modifikovaný systém se shoduje s původním na $\mathcal{U}(0,\Delta)$.

(2) Změna báze obecně není ortogonální.

Věta 20.1. $\Rightarrow \exists\, \phi \in \mathcal{X}$; ϕ splňuje princip (INV) pro původní systém, ale pouze na $\mathcal{U}(0,\Delta)$.

Poznámka. Chování řešení (2) $p' = Ap + f(p,\phi(p))$ $\quad / 2p\cdot$

$$2p\cdot p' = 2p\cdot Ap + 2p\cdot f(p,\phi(p))$$

$$\frac{d}{dt}|p|^2 \ge 2\alpha|p|^2 - 2\sigma(1+\ell)|p|^2$$

$$\ge 2\underbrace{(\alpha-\sigma(1+\ell))}_{>0}|p|^2$$

$\Rightarrow p(s)$ exponenciálně roste pro $s \to \infty$

Zde graf ϕ se nazývá nestabilní varietou bodu $(0,0)$.

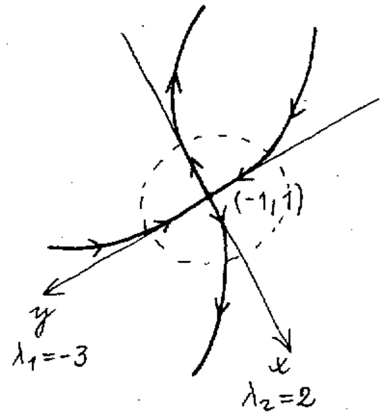
Analogický argument: $\exists\, \psi(y): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$; graf ψ je invariantní vůči řešením, řešení na grafu ψ směřují do $(0,0)$ pro $t \to \infty$ ... stabilní varieta.

Příklad. $x' = x - y^2$
$y' = x^2 + y^2 - 2$

stac. body: $(1,1)$; $\underline{(1,-1)}$

$$\nabla_{x,y} F = \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix};\quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\sigma(M) = \{-3; 2\}$, vlastní vektory např. $\binom{1}{-2}, \binom{2}{1}$



Poznámka. mějme rovnici

$$X' = F(X)\,;\quad X_0 \dots \text{hyperbolický stac. bod}$$

$V^u(X_0) := \{Y$, řešení s poč. podmínkou Y jde do X_0 pro $t \to -\infty\}$

$V^s(X_0) := \{Y$, řešení s poč. podmínkou Y jde do X_0 pro $t \to \infty\}$

Tyto množiny se nazývají nestabilní, resp. stabilní varieta bodu X_0.

Dokázali jsme, že $V^u(X_0) \cap \mathcal{U}(X_0, \Delta)$ je hladká varieta dimenze $\dim V^+$ a V^+ je tečný podprostor v bodě X_0, kde V^+ je podprostor příslušný k $\sigma(\nabla F(X_0)) \cap \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$; analogicky pro V^s.

aplikace 2. centrální varieta.

$$\begin{aligned} x' &= Ax + f(x,y) \\ y' &= By + g(x,y) \end{aligned} \qquad (1)$$

$\mathrm{Re}\,\sigma(A) = 0$; $f, g \in C^1$; $f = g = 0$, $\nabla f, \nabla g = 0$ v $(x,y) = (0,0)$

$\mathrm{Re}\,\sigma(B) < -\beta < 0$; $|f|, |g| \le \rho$; $|\nabla f|, |\nabla g| \le \sigma$; $\sigma, \rho > 0$ malé

Věta 20.1: $\exists\, \phi(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ invariantní varieta

<u>centrální varieta</u> ... centrální směr

Poznámka. Linearizovaná stabilita selhává:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$; $\sigma(M) \le 0$, ale ne ostře.

O stabilitě rozhodne redukovaná rovnice:

(2) $r' = Ar + f(r, \phi(r))$.

Pozorování. (INV) $\Leftrightarrow$ (RED) : $x' = Ax + f(x, \phi(x)) \Rightarrow y(t) := \phi(x(t))$ je řešení $y' = By + g(x,y)$

tj. $[\phi(x)]' = B\phi(x) + g(x, \phi(x))$, nechť $\phi \in C^1$ (lze dokázat)

$\|$

$\nabla\phi(x)\, x' = \nabla\phi(x)[Ax + f(x, \phi(x))]$

ϕ splní (RED), $\phi \in C^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \nabla\phi(x(t))[Ax(t) + f(x(t), \phi(x,t))] - B\phi(x(t)) - g(x(t), \phi(x(t))) = 0$

pro $\forall x(t)$ řešení (2) ; $x(0) \in \mathbb{R}^n$ libovolné

$$\nabla\phi(x)[Ax + f(x,\phi(x))] - B\phi(x) - g(x, \phi(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Lemma 20.3. nechť $(x(t), y(t))$ je řešení (1), ϕ je centrální varieta. Potom

$$|y(t) - \phi(x(t))| \le C e^{-\mu t} |y(0) - \phi(x(0))| \quad \forall t \ge 0,$$

kde $C, \mu > 0$ jsou univerzální konstanty.

Důkaz. Ozn. $z(t) := y(t) - \phi(x(t))$; rovnice pro z?

Chceme: $z' = Bz + \dots$

$$z' = y' - [\phi(x)]' = By + g(x,y) - \underbrace{\nabla\phi(x)\underbrace{[Ax + f(x,y)]}_{x'}}_{=:P}$$

(*) $P = \nabla\phi(x)[Ax + f(x, \phi(x))] + \nabla\phi(x)[f(x,y) - f(x, \phi(x))]$

$= B\phi(x) + g(x, \phi(x)) + \nabla\phi(x)[f(x,y) - f(x,\phi(x))]$

$$z' = B(y - \phi(x)) + \underbrace{g(x, z + \phi(x)) - g(x, \phi(x)) + \nabla\phi(x)[f(x,\phi(x)) - f(x, z + \phi(x))]}_{=:N(x,z)}$$

$z' = Bz + N(x,z)$

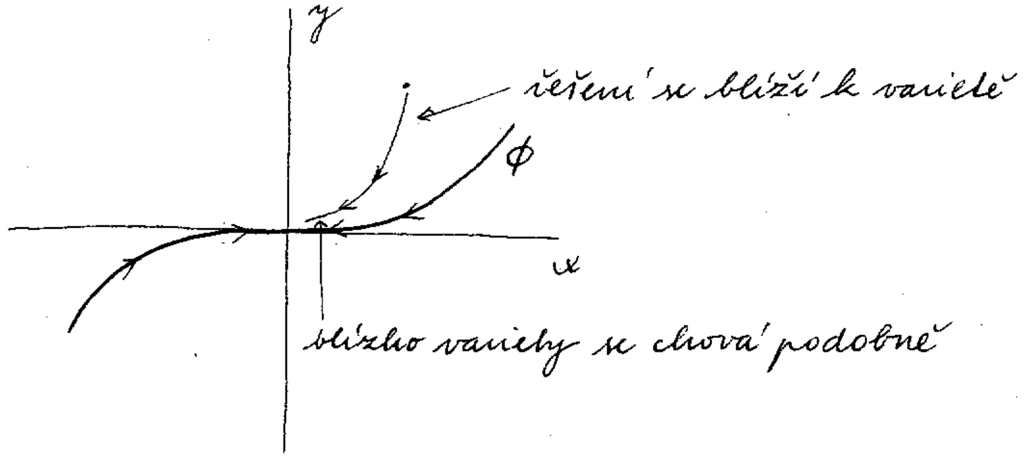
$|N(x,z)| \le \sigma|z| + \ell\sigma|z| \le \sigma(1+\ell)|z|$

$L_\phi \le \ell$; $\phi \in C^1 \Rightarrow |\nabla\phi| \le \ell$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z|^2 = z \cdot Bz + zN(x,z) \le (-\beta - \varepsilon)|z|^2 + \sigma(1+\ell)|z|^2 = -\underbrace{(\beta - \varepsilon - \sigma(1+\ell))}_{\mu > 0}|z|^2 \Rightarrow |z(t)| \le Ce^{-\mu t}|z(0)|;\ t \ge 0. \quad \square$$

Důsledek. (Princip redukce stability.)

Nechť $x=0$ je nestabilní, resp. stabilní, resp. asymptoticky stabilní pro rovnici (2). Potom $(x,y)=(0,0)$ má analogický typ stability pro celý systém (1).



Značení. Pro $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $\psi\in C^1$ definujme

$$[M\psi](x) := \nabla\psi(x)[Ax+f(x,\psi(x))] - B\psi(x) - g(x,\psi(x)).$$

Víme: $\phi(x)$ splní (INV) $\iff M\phi\equiv 0$.

Věta 20.2. (Aproximace centrální variety.)

Nechť $\psi(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ je C^1, $\psi(0)=0$, $\nabla\psi(0)=0$, nechť $[M\psi](x)=O(|x|^q)$, $|x|\to 0$, s nějakým $q>1$. Potom $\psi(x)-\phi(x)=O(|x|^q)$, $|x|\to 0$, kde $\phi(x)$ je (libovolná) centrální varieta.

Důkaz. $\mathcal{X}=\{\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m;\ \phi(0)=0,\ |\phi|\le b,\ L_\phi\le l\}$

ϕ je centr. varieta $\iff T\phi=\phi$;

$(T\phi)(p_0)=\int_{-\infty}^0 e^{-sB} g(p(s),\phi(p(s)))\,ds$,

$p(s)$ řeší (2) s $p(0)=p_0$

$T:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ je kontrakce.

$\mathcal{Y}:=\{\phi\in\mathcal{X};\ \phi(x)\le K|x|^q\ \forall x\in\mathbb{R}^n\}$.

Nechť $\vartheta(x):\mathbb{R}^n\xrightarrow{C^1}\mathbb{R}^m$; $\vartheta=\begin{cases}\psi & \text{na } \mathcal{U}(0,\delta)\\ 0 & \text{vně } \mathcal{U}(0,\delta)\end{cases}$; $\delta>0$ malé.

$N(x):=[M\vartheta](x)\Rightarrow |N(x)|\le C_1|x|^q\ \forall x\in\mathbb{R}^n$, s vhodným $C_1>0$.

Operátor: $\mathcal{S}:\mathcal{Y}\to C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$

$\phi\mapsto T(\phi+\vartheta)-\vartheta$.

Cíl: $\mathcal{S}\mathcal{Y}\subset\mathcal{Y}$ (vhodná volba $K>0$ a dalších konstant)

$\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ je kontrakce: $L_{\mathcal{S}}\le L_T$

$\mathcal{Y}\subset\mathcal{X}$ uzavřená podmnožina $\Rightarrow$ $\mathcal{Y}$ úplný

Banach: $\exists!\,\tilde\phi\in\mathcal{Y}$; $\mathcal{S}\tilde\phi=\tilde\phi$

$T(\tilde\phi+\vartheta)=\tilde\phi+\vartheta$

$$\Rightarrow \underset{\text{centrální varieta}}{\phi}=\tilde\phi+\vartheta \quad\dots\quad \phi-\underset{\psi \text{ na } \mathcal{U}(0,\delta)}{\vartheta}=\tilde\phi=O(|x|^q)$$

Ukážeme: $|[\mathcal{S}\phi](p_0)|\le K|p_0|^q\ \forall p_0\in\mathbb{R}^n$

$$[\mathcal{S}\phi](p_0)=\underbrace{[T(\phi+\vartheta)](p_0)}_{S_1}-\underbrace{\vartheta(p_0)}_{S_2}$$

$S_1=\int_{-\infty}^0 e^{-sB} g(p(s),\phi(p(s))+\vartheta(p(s)))\,ds$,

$p(s)$ řešení (2)

trik: $S_2=-\vartheta(p_0)=-[e^{-sB}\vartheta(p(s))]_{s=-\infty}^{s=0}=$

$=-\int_{-\infty}^0\frac{d}{ds}[\dots]\,ds=\int_{-\infty}^0 e^{-sB}[B\vartheta(p(s))-\frac{d}{ds}\vartheta(p(s))]\,ds$

$$B\vartheta(p(s))-\frac{d}{ds}\vartheta(p(s))=B\vartheta(p)-\nabla\vartheta(p)p'=B\vartheta(p)-\nabla\vartheta(p)[Ap+f(p,\phi(p)+\vartheta(p))]$$

$$=B\vartheta(p)-\{N(p)+B\vartheta(p)+g(p,\vartheta(p))-\nabla\vartheta(p)[f(p,\vartheta(p))-f(p,\vartheta(p)+\phi(p))]\}$$

$$[\mathcal{S}\phi](p_0)=S_1+S_2=\int_{-\infty}^0 e^{-sB}Q(\overset{x}{\widetilde{p(s)}},\overset{y}{\widetilde{\phi(p(s))}})\,ds$$

$$Q(x,y)=g(x,y+\vartheta)-g(x,\vartheta)-N(x)+\nabla\vartheta(x)[f(x,\vartheta)-f(x,y+\vartheta)]$$

$$|Q(x,y)| \leq |Q(x,0)| + |Q(x,y) - Q(x,0)| =$$

$$= |N(x)| + |Q(x,y) - Q(x,0)| \leq$$

$$\leq C_1 |x|^q + C_2 \sigma |y|$$

$$(2) \Rightarrow |\mu(s)| \leq |\mu_0| e^{-\underbrace{(\varepsilon + \sigma(1+\ell))}_{a \text{ malé}} s} ; \quad s \leq 0$$

(viz důkaz V. 20.1)

$$|[\mathcal{S}\phi](\mu_0)| \leq \int_{-\infty}^{0} \|e^{-sB}\| \, |Q(\mu(s), \phi(\mu(s)))| \, ds \leq$$

$$\leq C_0 \int_{-\infty}^{0} e^{\beta s} [C_1 |\mu(s)|^q + C_2 \sigma \underbrace{|\phi(\mu(s))|}_{\leq K |\mu(s)|^q \ (\phi \in \mathcal{Y})}] \, ds \leq$$

$$\leq C_0 \int_{-\infty}^{0} e^{\beta s} [C_1 + C_2 \sigma K] \underbrace{|\mu(s)|^q}_{\leq |\mu_0|^q e^{-aqs}} \, ds \leq$$

$$\leq \underbrace{\frac{C_0 (C_1 + C_2 \sigma K)}{\beta - aq}}_{\leq K \text{ pro } K \text{ velké; } \sigma, a \text{ malé}} \cdot |\mu_0|^q \qquad \square$$