Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Zápisky z předmětu Diferenciální rovnice II

Bc. Michal Kozák

Katedra matematické analýzy (32-KMA)

Přednášející: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.
Cvičící: RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.

Praha 2010

Obsah

13. Úvod do dynamických systémů

Zaveďme matematický pojem, který se teorie ODR na první pohled netýká:

Definice. *Dynamickým systémem* nazveme dvojici (φ, Ω), kde Ω je otevřenou podmnožinou $\mathbb{R}^n$ a $\varphi(t,x)$ zobrazení $\mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$, splňující dále:

(i) $\varphi(0,x) = x, \qquad \forall x \in \Omega,$

(ii) $\varphi(t, \varphi(s,x)) = \varphi(t+s, x), \qquad \forall x \in \Omega, \quad \forall t, s \in \mathbb{R},$

(iii) zobrazení $(t,x) \mapsto \varphi(t,x)$ je spojité.

Na následujícím konkrétním příkladě si ukažme spojení s teorií ODR:

Příklad 13.1. Mějme systém autonomních ODR tvaru

$$x' = f(x) \tag{13.1}$$

s počáteční podmínkou

$$x(0) = x_0. \tag{13.2}$$

Definujme zobrazení $\varphi(t, x_0) \mapsto x(t)$, kde $x(t)$ je řešení systému (13.1) s počáteční podmínkou (13.2). Toto φ se nazývá *řešicí funkce systému* 13.1. Za vhodných předpokladů kladených na pravou stranu f dosáhneme globální existence i jednoznačnosti, což implikuje spojitost $\varphi(\cdot,\cdot)$.

Poznámka 13.2. Platí, že pro každý dynamický systém (φ, Ω), kde navíc $\varphi \in \mathcal{C}^1$, existuje funkce f taková, že φ je řešicí funkcí úlohy $x' = f(x)$.

Předešlý příklad a poznámka nám ukázaly, že i když je dynamický systém obecnější pojem, má pro nás studování toho pojmu z pohledu teorie ODR smysl.

Příklad 13.3. Uvažme soustavu ODR s konstantními koeficienty tvaru $x' = Ax$ s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$, kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je matice s konstatními členy.

Pak z předešlých kapitol víme, že řešení této soustavy je tvaru $x(t) = e^{tA}x_0$, tedy zobrazení φ pak vypadá:

$$\varphi(t, x_0) = e^{tA}x_0.$$

Tento dynamický systém je lineární vůči x (což obecně pravdou není).

Definice. Nechť (φ, Ω) je dynamický systém a mějme $M \subset \Omega$. Potom množinu M nazveme:

- *úplně invariantní*, pokud $\varphi(t,x) \in M \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in M$
- *pozitivně invariantní*, pokud $\varphi(t,x) \in M \quad \forall t \geq 0, \forall x \in M$
- *negativně invariantní*, pokud $\varphi(t,x) \in M \quad \forall t \leq 0, \forall x \in M$

Definice. Nechť (φ, Ω) je dynamický systém a mějme $x_0 \in \Omega$. Potom definujeme:

- *úplný orbit bodu* x_0 jako $\gamma(x_0) = \{\varphi(t, x_0),\ t \in \mathbb{R}\}$
- *pozitivní orbit* x_0 jako $\gamma^+(x_0) = \{\varphi(t, x_0),\ t \geq 0\}$
- *negativní orbit* x_0 jako $\gamma^-(x_0) = \{\varphi(t, x_0),\ t \leq 0\}$

Definice. Nechť (φ, Ω) je dynamický systém a mějme bod $x_0 \in \Omega$. *Omega-limitní množinou bodu* x_0 rozumíme

$$\omega(x_0) := \{y \in \Omega :: \exists t_n \to \infty,\ \varphi(t_n, x_0) \to y\}$$

Poznámka 13.4. Ekvivalentní definice ω-limitní množiny:

$$\omega(x_0) = \{y \in \Omega :: \forall \varepsilon > 0\ \forall T > 0\ \exists t > T : |\varphi(t, x_0) - y| < \varepsilon\}$$

Definice. Nechť (φ, Ω) je dynamický systém a mějme bod $x_0 \in \Omega$. *Alfa-limitní množinou bodu* x_0 rozumíme

$$\alpha(x_0) := \{y \in \Omega :: \exists t_n \to -\infty,\ \varphi(t_n, x_0) \to y\}$$

Lemma 13.1. *Nechť* (φ, Ω) *je dynamický systém a mějme* $x_0 \in \Omega$. *Pak platí:*

$$\omega(x_0) = \bigcap_{t>0} \overline{\gamma^+(\varphi(t, x_0))}$$

$$\alpha(x_0) = \bigcap_{t<0} \overline{\gamma^-(\varphi(t, x_0))}$$

Důkaz. Důkaz provedeme pro první rovnost, druhá se dokáže zcela analogicky. Pro důkaz první rovnosti ukažme obě inkluze:

„$\subseteq$" Zvolme libovolné $y \in \omega(x_0)$. Podle definice ω-limitní množiny existuje posloupnost $t_k \to \infty$ taková, že $\varphi(t_k, x_0) \to y$. Dále zvolme libovolné $\tau > 0$. Pro ně dostáváme:

$$\begin{aligned}\gamma^+(\varphi(\tau, x_0)) &= \{\varphi(t, \varphi(\tau, x_0)); t \geq 0\} \\ &= \{\varphi(t + \tau, x_0); t \geq 0\}\end{aligned}$$

Pro všechna $t_k \geq \tau$ dostáváme, že $\varphi(t_k, x_0) \in \gamma^+(\varphi(\tau, x_0))$, z čehož máme $y \in \overline{\gamma^+(\varphi(\tau, x_0))}$. Jelikož bylo τ libovolné nezáporné, náleží y pravé straně dokazované rovnosti.

„$\supseteq$" Vezměme libovolné y náležící pravé straně dokazované rovnosti. Pak také platí

$$\forall k \in \mathbb{N} : y \in \overline{\gamma^+(\varphi(k, x_0))}.$$

Vezměme posloupnost $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující $z_k \in \gamma^+(\varphi(k, x_0))$ a $|y - z_k| < \frac{1}{k}$. Dále z ní zkonstruujeme posloupnost $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující $t_k \geq k$ a $z_k = \varphi(t_k, x_0)$. Pro $k \to \infty$ jdou z_k k y. Jelikož platí, že $t_k \to \infty$, je $y \in \omega(x_0)$ podle definice. □

Definice. Řekneme, že množina M je *souvislá*, jestliže platí: Existují-li otevřené disjunktní množiny G, H splňující $M \subset G \cup H$, pak nutně $M \cap G = \emptyset$ nebo $M \cap H = \emptyset$.

Věta 13.1 (Vlastnosti $\omega(x_0)$). *Mějme dynamický systém* (φ, Ω) *a bod* $x_0 \in \Omega$. *Potom platí:*

(i) $\omega(x_0)$ je uzavřená a úplně invariantní

(ii) pokud navíc $\gamma^+(x_0) \subset K, K \subset \Omega$ je kompaktní, potom je $\omega(x_0)$ neprázdná, kompaktní a souvislá.

Důkaz.

(i)
- Podle Lemmatu 13.1 je $\omega(x_0)$ průnik uzavřených množin, tudíž $\omega(x_0)$ je také uzavřená.
- Pro libovolné $y \in \omega(x_0)$ a libovolné $t \in \mathbb{R}$ chceme ukázat, že $\varphi(t,y) \in \omega(x_0)$. Z definice ω-limitní množiny existuje posloupnost $t_k \to \infty$ takové, že $\varphi(t_k, x_0) \to y$. Pak platí
$$\varphi(t + t_k, x_0) = \varphi(t, \varphi(t_k, x_0)) \to \varphi(t,y) \qquad \in \omega(x_0).$$
Zde jsme navíc využili spojitosti zobrazení $\varphi(t,\cdot)$.

(ii)
- Volme libovolně posloupnost nezáporných reálných čísel $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující $t_k \to \infty$. Pak $\varphi(t_k, x_0) \in \gamma^+(x_0)$, což je podmnožinou kompaktu K. Z definice kompaktu existuje vybraná podposloupnost t'_k taková, že $\varphi(t'_k, x_0) \to z$, $z \in K$. Jelikož i podposloupnost $t'_k \to \infty$, je bod $z \in \omega(x_0)$. Množina $\omega(x_0)$ je tedy neprázdná.
- Pro libovolné $t > 0$ máme
$$\overline{\gamma^+(\varphi(t,x_0))} \subset \overline{\gamma^+(x_0)} \subset \overline{K} = K$$
Tedy podle Lemmatu 13.1 je $\omega(x_0)$ uzavřenou podmnožinou kompaktu K, tedy i kompaktem.
- Pro spor předpokládejme, že $\omega(x_0)$ je nesouvislá množina, tedy existují disjunktní otevřené množiny $G, H \in \Omega$ splňující navíc $\omega(x_0) \subset G \cup H$, $G \cap \omega(x_0) \neq \varnothing$ a $H \cap \omega(x_0) \neq \varnothing$.

  Volme body y, z následovně:
$$\begin{aligned} y \in \omega(x_0) \cap G &:: \exists t_k \to \infty,\ \varphi(t_k, x_0) \to y \\ z \in \omega(x_0) \cap H &:: \exists s_k \to \infty,\ \varphi(s_k, x_0) \to z \end{aligned}$$
Navíc můžeme BÚNO na nalezené posloupnosti klást další podmínky:
  - $\varphi(t_k, x_0) \in G,\ \forall k \in \mathbb{N}$,
  - $\varphi(s_k, x_0) \in H,\ \forall k \in \mathbb{N}$,
  - $t_k < s_k < t_{k+1} < s_{k+1} < \ldots$.

  Definujme množinu:
$$\psi_k = \{\varphi(t, x_0);\ t \in [t_k, s_k]\},\ k \in \mathbb{N}.$$
Toto je souvislá množina, neboť je spojitým obrazem intervalu. Jelikož množina ψ_k protíná obě množiny G a H, které jsou otevřené a disjunktní, existuje prvek z množiny ψ_k, který neleží ani v jedné z množin G a H. Označíme-li $F := \Omega \setminus (G \cup H)$, dostáváme:
$$\exists \tau_k \in (t_k, s_k) :: \varphi(\tau_k, x_0) \in F, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Jelikož prvky $\varphi(\tau_k, x_0)$ náleží kompaktu K, existuje pro posloupnost $\tau_k \to \infty$ vybraná podposloupnost $\tau'_k \to \infty$, tedy $\varphi(\tau'_k, x_0) \to w \in \omega(x_0)$. Navíc, jelikož je F doplněk dvou otevřených množin, je F uzavřená, tedy $w \in F$, což je ve sporu s tím, že $\omega(x_0) \subset G \cup H$.

□

Poznámka 13.5. Předpoklad kompaktnosti ve druhé části předchozí věty je podstatný. Uvažme například $\varphi(t,x) := t + x$; $x \in \Omega = \mathbb{R} \Rightarrow x' = 1$. V tomto případě je množina $\omega(x_0)$ prázdná.

Věta 13.2. *Nechť (φ, Ω) je dynamický systém, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$. Potom množina $\omega(x_0)$ obsahuje právě jeden bod z, právě tehdy když platí $\varphi(t, x_0) \to z$, $t \to \infty$.*

Důkaz. „$\Leftarrow$“ Zřejmé

„$\Rightarrow$“ Dokazujme sporem. Tedy máme $\omega(x_0) = \{z\}$, avšak $\varphi(t, x_0) \not\to z$ pro $t \to \infty$, tj.

$$\exists \varepsilon > 0, \exists t_n \to \infty\ \forall n \in \mathbb{N} : |\varphi(t_n, x_0) - z| \geq \varepsilon.$$

Protože je $z \in \omega(x_0)$, existuje posloupnost $s_n \to \infty$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|\varphi(s_n, x_0) - z| < \varepsilon$. Ze spojitosti zobrazení $\varphi(\cdot, x_0)$ plyne, že existuje posloupnost $\tau_n \to \infty$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|\varphi(\tau_n, x_0) - z| = \varepsilon$. Označme $y_n = \varphi(\tau_n, x_0)$. Pak má posloupnost $\{y_n\}$ hromadný bod y v kompaktní množině $\{x \in \mathbb{R}^n, |x - z| = \varepsilon\}$. Tedy $y \in \omega(x_0)$, zřejmě $y \neq z$, z čehož plyne spor. □

Poznámka 13.6. Implikace zleva doprava neplatí pro nekonečně dimenzionální prostory, kde je koule nekompaktní.

Definice. Dynamické systémy (φ, Ω) a (ψ, Θ) nazveme *topologicky konjugované*, pokud existuje homeomorfismus[1] $h\colon \Omega \to \Theta$ takový, že $h(\varphi(t,x)) = \psi(t, h(x))$. Ekvivalentně $\varphi(t,\cdot) = h^{-1} \circ \psi(t, h(\cdot))$.

Poznámka 13.7. Topologická konjugace zachovává podstatné rysy dynamických systémů:

- stacionární body, periodické orbity
- ω-limitní množiny, tj. $h(\omega(x_0)) = \omega(h(x_0))$
- stabilitu, ...

Definice. Nechť (φ, Ω) je dynamický systém. Řekneme, že bod $x_0 \in \Omega$ je *ekvilibrium (singulární/stacionární bod)*, jestliže $\varphi(t, x_0) = x_0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Bod x_0, který není stacionární, nazveme *regulární.*

Příklad 13.8. Mějme dynamický systém určený rovnicí $x' = f(x)$, $f \in \mathcal{C}^1$. Pak x_0 je stacionární bod, právě tehdy když platí $f(x_0) = 0$.

Věta 13.3 (O rektifikaci)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ funkce třídy $\mathcal{C}^r$, $r \in \mathbb{N}$ a mějme regulární bod $x_0 \in \Omega$. Potom existuje okolí V bodu x_0, okolí W bodu $\underset{\sim}{0} \in \mathbb{R}^n$ a homeomorfismus $g\colon V \to W$ třídy $\mathcal{C}^r$ takový, že platí: $x(t)$ je řešení rovnice (1) $x' = f(x)$ ve V, právě když $y(t) := g(x(t))$ je řešení rovnice (2) $y' = (1, 0, \ldots, 0)^\top$ ve W.*

Jinými slovy, dynamické systémy (φ, V) a (ψ, W) jsou topologicky konjugované, kde φ, resp. ψ, je řešicí funkce pro rovnici (1), resp. (2).

[1] tj. vzájemně jednoznačné zobrazení, h i h^{-1} spojité

Poznámka 13.9. $\psi(t,y)$ je dynamický systém určený (2), tj. $\psi(t,(y_1,\dots,y_n)) = (y_1+t,y_2,\dots,y_n)^\top$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že soustava (1) splňuje $x_0 = 0$ a $f(x_0) = (\alpha,0,\dots,0)^\top$, kde $\alpha \neq 0$. Obecnou úlohu totiž stačí natočit a posunout a tím ji převést na tuto speciální.

Důkaz rozdělíme do tří kroků. V prvním kroku zvolíme vhodné zobrazení G, ke kterému ve druhém kroku nalezneme inverzi. V posledním kroku pak ukážeme žádanou vlastnost řešení.

1. krok

Zvolme okolí $W \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\underset{\sim}{0}$ a definujme zobrazení $G: W \to \mathbb{R}^n$ předpisem

$$G: (y_1,\dots,y_n) \to \varphi(y_1,(0,y_2,\dots,y_n)), \tag{13.3}$$

kde φ je řešicí funkce soustavy (1). Z kapitol 1-4 minulého semestru dostáváme, že pokud bude W dostatečné malé, bude G dobře definováno a bude třídy $\mathcal{C}^r$.

Připomeňme si pár faktů:

$$\varphi(\cdot,x) \text{ je řešení (1)} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\varphi = f(\varphi) \tag{13.4}$$

$$\varphi(0,\cdot) = \mathrm{Id} \tag{13.5}$$

2. krok

Ve druhém kroku ukažme, že existuje inverzní zobrazení G^{-1}. To je důsledkem otázky, zda-li je $\nabla G(0)$ regulární. Ověřme tedy tuto podmínku.

$$\left.\frac{\partial G}{\partial y_1}\right|_{y=0} \overset{(13.3)}{=} \frac{\partial}{\partial t}\varphi(0,\underset{\sim}{0}) \overset{(13.4)}{=} f(\varphi(0,\underset{\sim}{0})) \overset{(13.5)}{=} f(0) = (\alpha,0,\cdots,0)^\top$$

Pro $k = 2,\dots,n$:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G}{\partial y_k}\right|_{y=0} &\overset{(13.3)}{=} \frac{\partial}{\partial y_k}\Big[\varphi(0,(0,y_2,\dots,y_n))\Big] \overset{(13.5)}{=} \frac{\partial}{\partial y_k}\Big[(0,y_2,\dots,y_n)^\top\Big] \\ &= (0,\dots 0,\underbrace{1}_{\text{k-tá pozice}},0,\dots,0)^\top\end{aligned}$$

Dostáváme tedy souhrnně:

$$\nabla G(\underset{\sim}{0}) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Dále ještě platí:

$$\begin{aligned} G(y_1,\underset{\sim}{0}) &= G(y_1,0,\dots 0) = \varphi(y_1,\underset{\sim}{0}) = x(y_1) \\ G(0,\underset{\sim}{0}) &= x(0) = x_0 = 0 \end{aligned}$$

Splnili jsme předpoklady věty o lokálním difeomorfismu (tj. věty o inverzním zobrazení). Pokud je W dostatečně malé okolí $\underset{\sim}{0}$, dostáváme aplikací této věty:

- $V := G(W)$ je okolí bodu $x_0 = 0$
- $G : W \to V$ je bijekce
- $G, G^{-1} \in \mathcal{C}^r$, navíc $\det \nabla G \neq 0$ ve W

3. krok

Potřebujeme ještě ukázat platnost ekvivalence:

$$y(t) \text{ řeší (2) ve } W \iff x(t) := G(y(t)) \text{ řeší (1) ve } V$$

Ukažme fakticky ekvivalentní úpravy dokazující ekvivalenci. Buď tedy $y(t)$ řešením soustavy (2) ve W. Pak můžeme řešení explicitně vyjádřit:

$$y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1(t) &= t + c_1 \\ y_2(t) &= c_2 \\ &\vdots \\ y_n(t) &= c_n \end{aligned}$$

Označme $g := G^{-1}$ a počítejme:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial}{\partial t}\Big[G(y(t))\Big] = \frac{\partial}{\partial t}\Big[\varphi\Big(y_1(t), \big(0, y_2(t), \dots, y_n(t)\big)\Big)\Big] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big[\varphi\big(t + c_1, (0, c_2, \dots, c_n)\big)\Big] = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\big(t + c_1, (0, c_2, \dots, c_n)\big) = \\ &= f\Big(\varphi\big(t + c_1, (0, c_2, \dots, c_n)\big)\Big) = f\Big(\varphi\big(y_1(t), (0, y_2, \dots, y_n)\big)\Big) = \\ &= f\Big(G\big(y(t)\big)\Big) = f\big(x(t)\big) \end{aligned}$$

□

Věta 13.4 (Hartman-Grobmanova)**.** *Nechť x_0 je hyperbolický stacionární bod, tj. stacionární bod, který splňuje $Re(\lambda) \neq 0$ pro všechny $\lambda \in \sigma(A)$, kde $A := \nabla f(x_0)$. Potom dynamický systém odpovídající rovnici $x' = f(x)$ je v okolí x_0 topologicky konjugovaný dynamickému systému rovnice $y' = Ay$ v okolí $\underset{\sim}{0}$.*

Poznámka 13.10. Z předchozího vyplývá, že „zajímavá“ (ve smyslu nelineární) je dynamika pouze na okolí stacionárních nehyperbolických bodů.

14. La Salleho princip invariance

14.1 Připomenutí

Připomeňme si nejdříve některé definice a věty z minulého semestru (tj. přednášky ODR I). Mějme systém

$$x' = f(x),\ f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n. \tag{14.1}$$

Definice. Stacionární bod x_0 se nazývá:

(i) *stabilní*, pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t \geq 0 :: |x(0) - x_0| < \delta \Rightarrow |x(t) - x_0| < \varepsilon.$$

(ii) *asymptoticky stabilní*, pokud je stabilní a navíc platí

$$\exists \vartheta < 0 :: |x(0) - x_0| < \vartheta \Rightarrow x(t) \to x_0 \text{ pro } t \to \infty.$$

Pomocná věta 1 (Linearizovaná stabilita)**.** *Nechť x_0 je stacionární bod a označme $A = \nabla f(x_0)$. Potom*

(i) pokud pro všechna $\lambda \in \sigma(A)$ platí $Re\lambda < 0$, pak je x_0 asymptoticky stabilní.

(ii) pokud existuje $\lambda \in \sigma(A)$, pro které $Re\lambda > 0$, pak je x_0 nestabilní.

Definice. Funkci $V(x)\colon U \to [0,\infty]$ nazveme *Ljapunovskou* funkcí rovnice (14.1), pokud x_0 je stacionární bod, U okolí 0 a pokud

(i) funkce V je pozitivně definitní, tj. V je spojitá, $V(0) = 0$, $V(x) > 0\ \forall x \in U \setminus \{0\}$

(ii) funkce $t \mapsto V(x(t))$ je nerostoucí pro každé řešení $x(t)$ rovnice v U.

Definice. Orbitální derivací funkce V vůči systému (14.1) rozumíme

$$\dot{V}(x) \coloneqq \nabla V(x) \cdot f(x)$$

pro každé $x \in U$.

Pomocná věta 2 (První Ljapunovova věta)**.** *Pokud má systém* (14.1) *v Ω Ljapunovskou funkci, potom bod x_0 je stabilní.*

Pomocná věta 3 (Druhá Ljapunovova věta)**.** *Pokud má systém* (14.1) *v Ω Ljapunovskou funkci a orbitální derivace funkce V je negativně definitní na U, potom x_0 je asymptoticky stabilní.*

14.2 La Salleho princip

Příklad 14.1. Mějme následující systém a ptejme se na stabilitu stacionárních bodů.

$$\begin{aligned} x' &= -y - x^3 \\ y' &= x^5 \end{aligned}$$

Bod $(0,0)$ je jediným stacionárním bodem. Jak je to u něj se stabilitou? Zkusme použít větu o linearizované stabilitě.

$$A = \nabla f|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -3x^2, & -1 \\ 5x^4, & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$$

Dostáváme $\sigma(A) = \{0\}$, tedy linearizace nám neřekne nic. Zkusme najít Ljapunovskou funkci. Kandidátem je $V = \frac{1}{3}x^6 + y^2$. Ověřme předpoklady:

- V spojité, $V((0,0)) = 0, V > 0$ jinak
- $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} x' + \frac{\partial V}{\partial y} y' = 2x^5(-y - x^3) + 2y(x^5) = -2x^8 \leq 0$

Podle první Ljapunovovy věty dostáváme, že $(0,0)$ je stabilní.

A co kdybychom se ptali na asymptotickou stabilitu? Druhou Ljapunovovou větu použít nemůžeme, nesplňujeme předpoklad $\dot{V} < 0$ mimo počátek. Problém řeší následující věta.

Věta 14.1 (La Salle)**.** *Mějme systém $x' = f(x)$, kde $f\colon\Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená. Dále nechť existuje funkce $V\colon\Omega \to \mathbb{R}, V \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ taková, že navíc V je zdola omezená. Nechť dále existuje $l \in \mathbb{R}$ takové, že $\Omega_l := \{x \in \Omega; V(x) < l\}$ je omezená a navíc $\dot{V}(x) \leq 0$ pro každé $x \in \Omega_l$. Označme:*

$$\begin{aligned} R &: = \{x \in \Omega_l, \dot{V}(x) = 0\} \\ M &: = \{y \in R, \gamma(x) \subset R\}, \quad \textit{tj. největší invariantní podmmnožina } R \end{aligned}$$

Potom pro $x_0 \in \Omega_l$ je $\omega(x_0)$ podmnožinou množiny M.

Poznámka 14.2. Omega-limitní množina, pro připomenutí, definovaná jako

$$\omega(x_0) = \{z : \exists t_n \to \infty, \varphi(t_n, x_0) \to z\},$$

a tvoří v našem případě množinu „hromadných bodů řešení z x_0 pro $t \to \infty$“.

Důkaz. Mějme bod $x_0 \in \Omega_l$, řešení $x(t)$ procházející bodem x_0 a označme $\varphi(t, x_0) := x(t)$. Platí, že $\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t)) \leq 0$, tedy funkce $t \mapsto V(x(t))$ je nerostoucí, speciálně řešení $x(t)$ neopustí (omezenou) množinu Ω_l. Jelikož je funkce $V(x(t))$ definovaná pro hodnoty t až do nekonečna a je podle předpokladu omezená zdola, existuje $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) =: c \in \mathbb{R}$.

Tvrdíme, že $V \equiv c$ na $\omega(x_0)$. Zvolme tedy $y \in \omega(x_0)$ libovolné. Z definice ω-limitní množiny dostáváme existenci posloupnosti $t_n \to \infty$ takové, že $x(t_n) = \varphi(t_n, x_0) \to y$. Ze spojitosti $V(t)$ dostáváme, že $V(x(t_n)) \to V(y)$ a díky předešlé limitě máme $c = V(y)$.

Chceme ukázat, že $\dot{V}_f \equiv 0$ na $\omega(x_0)$. Vezměme libovolné $y_0 \in \omega(x_0)$ a vezměme řešení procházející tímto bodem $\tilde{x}(t) = \varphi(t, y_0)$. Jelikož je $\omega(x_0)$ invariantní, použitím Věty 13.1 dostáváme, že $\tilde{x}(t) \in \omega(x_0)$. Zderivováním $V(\tilde{x}(t)) \equiv c$ podle času dostaneme $\dot{V}_f(\tilde{x}(t)) = 0$, speciálně pro nulový čas $\dot{V}_f(y_0) = 0$. Tedy $y_0 \in \omega(x_0)$, což implikuje $y_0 \in R$. Navíc $\gamma(y_0) \subset R$, tedy $y_0 \in M$. Jelikož jsme vybírali y_0 z Ω_l libovolně, platí pro ně $\omega(y_0) \subseteq M$. □

Příklad 14.3 (Dokončení). Pro připomenutí uvažujeme následující systém

$$\begin{aligned} x' &= -y - x^3 \\ y' &= x^5 \end{aligned}$$

a vyšetřujeme stabilitu bodu $(0,0)$. Použijme právě dokázaný La Salleho princip invariance. Vhodným kandidátem na funkci V je Ljapunovova funkce, v tomto případě tvaru $V = \frac{1}{3}x^6 + y^2$. Vezměme $l = 1$ a nalezněme množiny z Věty 14.1:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{V < 1\} = \{\frac{1}{3}x^6 + y^2 < 1\} \ldots \text{omezené} \\ R &= \{(x,0)\} \\ M &= \{(0,0)\} \end{aligned}$$

Vezměme $(0,b)$, $b \neq 0$. Pak platí, že $x' = -b < 0$, z čehož plyne, že $\gamma((0,b)) \subsetneq R$. Z Věty 14.1 pro všechna $x_0 \in \Omega$ plyne, že $\omega(t_0) = (0,0)$. Odsud dle Věty 13.2 platí $\varphi(t, x_0) \to 0$, pro $t \to \infty$ (tj. 0 je lokální atraktor).

15. Poincaré - Bendixsonova teorie

Tato kapitola se zabývá otázkou existence periodických řešení v $\mathbb{R}^2$. Hilbertův 16. problém se ptá na počet izolovaných periodických řešení rovnice $x' = f(x)$, kde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je polynom. Obecně je toto stále otevřený problém.

Definice. Jednoduchá uzavřená křivka γ v $\mathbb{R}^n$ se nazývá *Jordanova křivka*, existuje-li spojitá parametrizace $\psi(t)\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ taková, že $\psi|_{[0,1)}$ je prosté a $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Poznámka 15.1. Jordanova křivka je topologická kružnice v $\mathbb{R}^2$.

Pomocná věta 4 (Jordanova věta)**.** *Nechť je $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ Jordanova křivka. Potom existují množiny Ω_1, Ω_2 takové, že $\Omega_1 \dot\cup \gamma \dot\cup \Omega_2 = \mathbb{R}^2$, Ω_i jsou otevřené a souvislé, Ω_1 omezená a Ω_2 neomezená.*

Důkaz. Dá se najít, například:

- E. Čech - Bodové množiny, s. 221
- I. Černý - Analýza v komplexním oboru, s. 138

□

Značení. V celé kapitole uvažujeme rovnici

$$x' = f(x), \tag{15.1}$$

kde $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, $f \in \mathcal{C}^1$ (kvůli jednoznačnosti řešení). Buď $\varphi(t,x)$ příslušný dynamický systém. Předpokládejme, že $\varphi(t,x)$ je definováno pro všechna $t \geq 0$ a všechna $x \in \Omega$.

Věta 15.1 (Poincaré-Bendixson)**.** *Nechť $p \in \Omega$ je libovolný bod, $\overline{\gamma^+(p)}$ je kompaktní a $\omega(p)$ neobsahuje stacionární bod. Potom $\omega(p) = \Gamma$, kde Γ je orbit netriviálního periodického řešení.*

Definice. Úsečka $\Sigma \subset \Omega$ se nazývá *transverzála*, pokud pro všechna $p \in \Sigma$ není vektor $f(p)$ nulový a není rovnoběžný s úsečkou Σ.

Poznámka 15.2. Řešení protínají transverzálu Σ nenulovou rychlostí a všechna ve stejném směru.

Lemma 15.1. *Mějme transverzálu Σ a její bod $p \in \Sigma$. Pak existuje okolí U bodu p takové, že pro všechna $y \in U$ je průnik $\gamma(y) \cap \Sigma \cap U$ jednobodový.*

Důkaz. Mějme transverzálu Σ a bod $p \in \Sigma$. Použitím Věty 13.3 o rektifikaci dostáváme existenci okolí U bodu p, okolí V bodu 0 a homeomorfismus $g \in \mathcal{C}^1$ tak, že pro každé řešení $x(t)$ systému 15.1 v U je $y(t) := g(x(t))$ řešením systému $y' = (1,0,\dots,0)^\top$ ve V (BÚNO $U = g^{-1}(V)$).

Řešení $y(t)$ ve V jsou konstantní, obraz transverzály $g(\Sigma)$ je spojitá křivka. Ovšem potřebujeme po ní, aby pro všechna řešení $y(t) \in V$ existoval právě jeden bod $y_0 \in V$ takový, že $y_0 = g(\Sigma) \cap y(t)$.

Pro libovolný bod $p_0 \in \Sigma \cap U$ vezměme vektory a, b tečné po řadě na $x(t)$ a Σ v bodě p_0. Z vlastností transverzály plyne, že tyto dva vektory generují rovinu $\mathbb{R}^2$. Jelikož je g třídy alespoň $\mathcal{C}^1$, je ∇g regulární a tedy obrazy vektorů $g(a)$, $g(b)$ musí generovat rovinu. A jelikož tyto vektory nemůžou být lineárně závislé, je požadovaná vlastnost $g(\Sigma)$ v dostatečně malém okolí V zajištěna. □

Poznámka 15.3. Okolí U a V z předcházejícího Lemmatu se nazývají *flow-boxy*, volně přeloženo jako *průtokáče*.

Lemma 15.2. *Buď $\Sigma \subset \Omega$ transverzála, $p \in \Omega$. Potom průsečíky $\gamma^+(p)$ s množinou Σ tvoří monotónní posloupnost.*

Podrobněji: Jestliže $t_1 < t_2 < t_3$ splňují $\varphi(t_i, p) \in \Sigma$ pro každé $i = 1, 2, 3$, pak platí právě jedna z následujících možností:

(i) $\varphi(t_1, p) = \varphi(t_2, p) = \varphi(t_3, p)$

(ii) $\varphi(t_2, p)$ *leží na Σ striktně mezi* $\varphi(t_1, p)$ *a* $\varphi(t_3, p)$

Důkaz. Mějme transverzálu Σ a bod $p \in \Omega$. Předpokládejme, že orbit $\gamma^+(p)$ protne transverzálu alespoň třikrát. Pokud by ji protl méněkrát, věta je triviálně splněna.

Označme pořadě časy průsečíků $\gamma^+(p)$ s transverzálou Σ jako t_1, t_2, t_3. Pokud se podíváme na tečné vektory k orbitu $\gamma^+(p)$ v bodech průniků s transverzálou, musí mít stejný směr (z vlastností transverzály). Proto dráha kladného orbitu musí obkroužit transverzálu, aby ji mohl protnout také ve stejném směru. Mohou tedy nastat dvě situace:

- $\varphi(t_1, p) = \varphi(t_2, p)$ - Orbit po obkroužení protne transverzálu v bodě t_1. To může nastat jen v případě, že $\gamma^+(p)$ je periodické řešení (díky jednoznačnosti řešení a vlastnosti dynamického systému). Dále pak musí i $\varphi(t_2, p) = \varphi(t_3, p)$, tedy nastává možnost (i) ze zadání.

- $\varphi(t_1, p) \neq \varphi(t_2, p)$ - Vznikla nám Jordanova křivka, tedy souvislá omezená část roviny ohraničená částí transverzály (od t_1 do t_2) a částí kladného orbitu bodu p (taktéž od t_1 do t_2). Z jednoznačnosti řešení již orbita Jodranovu křivku nemůže protnout, a tedy se nedostane pro časy $t > t_2$ vně křivky. A jelikož předpokládáme, že orbit ještě minimálně jednou protne transverzálu, musí ležet průsečík na opačné polopřímce k $t_2 t_1$, což je přesně možnost (ii) ze zadání.

□

Lemma 15.3. *Mějme transverzálu Σ a bod $p \in \Omega$. Potom průnik $\omega(p) \cap \Sigma$ je nejvýše jednobodový.*

Důkaz. Proveďme sporem. Předpokládejme, že existují dva různé body $y, z \in \omega(p) \cap \Sigma$. Z Lemmatu 15.1 dostáváme existenci vzájemně disjunktních flow-boxů U a V pořadě pro body y a z. Z definice ω-limitní množiny $\omega(p)$ plyne existence posloupností $t_n, s_n \to \infty$ takových, že $\varphi(t_n, p) \to y$ a $\varphi(s_n, p) \to z$. BÚNO předpokládejme, že $t_n < s_n < t_{n+1} < s_{n+1}$ pro všechna n přirozená.

Pro n velká můžeme navíc požadovat, aby $\varphi(t_n,p) \in U$ a $\varphi(s_n,p) \in V$. Pak pro takové t_n resp. s_n existuje blízký bod t_n' splňující $\varphi(t_n',p) \in \Sigma \cap U$, resp. s_n' splňující $\varphi(s_n',p) \in \Sigma \cap V$. Znovu můžeme BÚNO předpokládat, že $t_n' < s_n' < t_{n+1}' < s_{n+1}'$ pro všechna n přirozená.

To je ovšem spor s Lemmatem 15.2, neboť průsečíky netvoří monotónní posloupnost. □

Důkaz. Věty 15.1
Buď tedy $p \in \Omega$ a $\overline{\gamma^+(p)}$ kompaktní. Z Věty 13.1 plyne, že $\omega(p)$ je neprázdná, souvislá a kompaktní. Vezměme libovolné $q \in \omega(p)$ (můžeme, neboť je neprázdná).

V prvním kroku budeme chtít ukázat, že $q \in \Gamma$, kde Γ je nějaký periodický orbit. Jelikož je $\omega(p)$ invariantní, víme, že $\gamma(q) \subset \omega(p)$, z čehož také plyne, že $\gamma^+(q)$ je kompaktní a podle Věty 13.1 je $\omega(q)$ neprádzná. Zvolme $x_0 \in \omega(q)$. Zjevně je $x_0 \in \omega(p)$, a tedy podle předpokladu x_0 není stacionárním bodem. Existuje pak flow-box U a transverzála Σ takové, že $x_0 \in \Sigma \cap U$. Jelikož $x_0 \in \omega(q)$, dostáváme existenci posloupnosti $t_n \to \infty$, pro kterou $\varphi(t_n,q) \to x_0$. Pro n velké existuje t_n' blízké k t_n, pro které navíc $\varphi(t_n',q) \in \Sigma \cap U$. Jelikož členy této posloupnosti jsou prvky $\gamma^+(q) \subset \omega(p)$, z Lemmatu 15.3 plyne rovnost $\varphi(t_n',q) = x_0$ pro všechna n přirozená, z čehož dostáváme, že $\gamma(q)$ je periodický orbit, tj. $\gamma(q) =: \Gamma$.

Ve druhém kroku budeme chtít ukázat, že $\omega(p) \subset \Gamma$. Provedeme opět sporem. Nechť $Z := \omega(p) \setminus \Gamma$ je neprázdná. Jelikož je $\omega(p)$ souvislá, Z a Γ nejsou oddělené. Můžeme tedy naleznout posloupnost $p_n \in Z$ takovou, že $\operatorname{dist}(p_n,\Gamma) \to 0$. Jelikož je $\omega(p)$ kompakt, můžeme BÚNO předpokládat $p_n \to z \in \Gamma$. Jelikož je $z \in \omega(p)$, bod z není stacionárním bodem. Existuje tedy flow-box V a transverzála Σ takové, že $z \in \Sigma \cap V$. Nalezneme dost velké n, pro které $p_n \in U$, z čehož je průnik $\gamma(p_n) \cap \Sigma$ neprázdný. Z konstrukce posloupnosti p_n máme $p_n \in \omega(p)$, z čehož plyne $\gamma(p_n) \subset \omega(p)$. Podle Lemmatu 15.3 musí platit $\gamma(p_n) \cap \Sigma = \{z\}$, z čehož by vyplývalo $p_n \in \Gamma$, což je ale spor s konstrukcí posloupnosti p_n. □

Příklad 15.4. Rozhodněte o existenci periodického řešení:

$$\begin{aligned} x' &= x - y - x^3 \qquad & x' &= 0 : y = x - x^3 \\ y' &= x + y - y^3 \qquad & y' &= 0 : x = y^3 - y \end{aligned}$$

Jediný stacionární bod je $(0,0)$. Použijme větu o linearizované stabilitě:

$$A = \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \lambda I - A = (\lambda - 1)(\lambda - 1) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

Počátek je tedy tzv. odpudivý vír (silnější nestabilita, tj. bod, který je stabilní pro časy jdoucí k $-\infty$), z čehož víme, že $(0,0)$ neleží v $\omega(p)$ pro žádné $p \in \mathbb{R}^2$. Množina $\omega(p)$ tedy neobsahuje žádný stacionární bod.

Použijme Ljapunovskou funkci:

$$\begin{aligned} V &= x^2 + y^2 \\ \dot{V}_f &= 2xx' + 2yy' = 2x(x - y - x^3) + 2y(x + y - y^3) = \\ &= 2x^2 + 2y^2 - 2x^4 - 2y^4 \end{aligned}$$

Všimněme si, že existuje $R > 0$ takové, že $\dot{V}_f < 0$ pro $x^2 + y^2 = R^2$. Označme $\Omega := \{(x, y); x^2 + y^2 < R^2\}$. Tato množina je omezená a pozitivně invariantní (z předešlého). Odsud plyne kompaktnost orbitů. Splnili jsme předpoklady Poincaré-Bendinxsonovy věty, existuje tedy periodické řešení.

Definice. Řekneme, že množina $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je *jednoduše souvislá*, pokud pro každou Jordanovu křivku $\gamma \subset \Omega$ je její vnitřek částí Ω. Ekvivalentně, každá Jordanova křivka γ lze spojitě stáhnout do bodu v Ω.

Věta 15.2 (Bendixson - Dulac). *Nechť $\Omega \in \mathbb{R}^2$ je otevřená, jednoduše souvislá množina a $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1$. Nechť existuje funkce $B : \Omega \to \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{C}^1$ taková, že* $\operatorname{div}(Bf) > 0$ *skoro všude v Ω. Potom rovnice $x' = f(x)$ nemá v Ω netriviální periodické řešení. Funkci B nazýváme* Dulacovskou funkcí.

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $\Gamma \subset \Omega$ je netriviální periodický orbit. Označme $M := \operatorname{int}(\Gamma)$. Jelikož je Ω jednoduše souvislá, je $M \subset \Omega$. Podle Gaussovy věty platí:

$$\int_M \operatorname{div}(Bf)\, dx\, dy = \int_\Gamma (Bf \cdot \nu)\, ds$$

Vezměme libovolný bod $x \in \Gamma$. Tečna orbitu je rovnoběžná s $f(x)$, neboť řešení rovnice $x' = f(x(t))$ je parametrizací křivky Γ. Jelikož je navíc podle definice normálový vektor $\nu(x)$ kolmý na tečnu, je $f(x)$ kolmé na normálový vektor $\nu(x)$. Pokud f vynásobíme regulární maticí B, kolmost se nezmění, tedy pravá strana Gaussovy formule je rovna 0.

Argument na levé straně je spojitá funkce, tedy existuje $x_0 \in M$ takové, že $\operatorname{div}(Bf)(x_0) > 0$. Existuje pak okolí $U(x_0)$ takové, že $\operatorname{div}(Bf) > \varepsilon$ na $U(x_0)$, $U(x_0) \subseteq \Gamma$, takže levá strana je nenulová, z čehož vidíme jasný spor s rovností Gaussovy věty. $\square$

16. Carathéodoryova teorie

Vraťme se k otázce existence a jednoznačnosti pro úlohu

$$x' = f(x,t), \qquad f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \text{otevřená}.$$

Tato kapitola se zabývá zeslabením předpokladů na funkci f. V základní teorii se požaduje $f(\cdot,\cdot)$ spojitá. Ovšem přirozenější požadavek je $f(\cdot,t)$ spojitá a $f(x,\cdot)$ pouze měřitelná (integrovatelná). S tím pak souvisí, že řešení není třídy $\mathcal{C}^1$, nýbrž absolutně spojité a že rovnice je splněna jen pro skoro všechna t.

Poznámka 16.1. Pro $\mathcal{C}^1$ funkce, respektive pro klasické řešení, platí:

$$x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} x'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t_1} f(x(s),s)\,ds$$
$$x(t_1) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(x(s),s)\,ds$$

Definice. Řekneme, že funkce $x(t)\colon I \to \mathbb{R}^n$ je *absolutně spojitá (AC)*, pokud pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $m \in \mathbb{N}$ a všechny disjunktní intervaly $(s_i,t_i) \subset I$, $i = 1,2,\dots,n$ platí

$$\sum_{i=1}^{m} |t_i - s_i| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \|x(t_i) - x(s_i)\| < \varepsilon$$

Pomocná věta 5. *Pokud $x\colon I \to \mathbb{R}$ je absolutně spojitá, pak $x'(t)$ existuje pro skoro všechna $t \in I$, $x' \in L^1(I)$ a pro všechna $t_0, t_1 \in I$ platí*

$$x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} x'(s)\,ds.$$

Pomocná věta 6. *Pokud je $g \in L^1(I)$ a $t_0 \in I$, pak funkce $x(t) := \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$ je absolutně spojitá na I a platí $x'(t) = g(t)$ pro skoro všechna $t \in I$.*

Pomocná věta 7. *Nechť x je absolutně spojitá. Pak je x i stejnoměrně spojitá.*

Definice. Mějme otevřenou množinu $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ a funkci $f(x,t)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že funkce f splňuje *Caratheodoryovy podmínky*, značeno $f \in \mathrm{Car}(\Omega)$, jestliže pro každou množinu $Q \subset \Omega$ tvaru válce $Q = B \times I$, kde $I = [a,b]$ a $B \in \mathbb{R}^n$ uzavřená koule, platí:

(i) $t \mapsto f(x,t)$ je měřitelná pro všechna $x \in B$

(ii) $x \mapsto f(x,t)$ je spojitá pro skoro všechna $t \in I$

(iii) $\exists h \in L^1(I) : |f(x,t)| \le h(t)$ pro všechna $(x,t) \in Q$

Příklad 16.2. Příklady funkcí splňující Carathéodoryových podmínek:

- $f(x,t) = \frac{x}{\sqrt{|t|}} \qquad x \in B(0,r) \to |f(x,t)| \le \frac{r}{\sqrt{|t|}}$

- $f(x,t) = A(t)x + b(t) \qquad A, b \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

Definice. Mějme funkci $f \in \mathrm{Car}(\Omega)$ a funkci $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ takovou, že graf $x \subset \Omega$. Řekneme, že x je *řešení v Caratheodoryově smyslu*, jestliže:

(i) $x \in AC(I, \mathbb{R}^n)$

(ii) $x'(t) = f(x(t), t)$ pro skoro všechna $t \in I$

Lemma 16.1. *Mějme funkci $f \in \mathrm{Car}(\Omega)$ a spojitou funkci $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ takovou, že graf $x \in \Omega$. Potom:*

(i) funkce $t \mapsto f(x(t), t)$ je třídy $L^1_{loc}(I)$

(ii) $x(t)$ je řešení rovnice $x' = f(x,t)$ v Caratheodoryově smyslu právě tehdy, když $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)\, ds$ pro libovolné $t_0 \in I$.

Důkaz. **(i)**

Definujme po částech konstantní funkce x_n takové, že $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$ pro skoro všechna $t \in I$ následující konstrukcí: Vezměme $s_0, s_1, \ldots, s_n$ body dělení intervalu I a označme $I_{n,k} := (s_{k-1}, s_k)$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Zvolme $\xi_{k,n} \in I_{n,k}$ libovolně a položme $x_n(t) := x(\xi_{k,n})$ pro $t \in [s_{k-1}, s_k)$ pro všechna $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pro zjemňující se dělení pak ze spojitosti x dostáváme $x_n \rightrightarrows x$.

Z druhé podmínky v definici Caratheodoryovy funkce, spojitosti zobrazení $x \mapsto f(x,t)$, máme:

$$x_n \to x \text{ s.v. } \Rightarrow f(x_n(t), t) \to f(x(t), t) \text{ pro skoro všechna } t \in I$$

Z rovnosti $f(x_n(t), t) = f(x(\xi_{k,n}), t)$ na $I_{n,k}$ a z měřitelnosti druhého členu na $I_{n,k}$ (první podmínka definice Caratheodoryovy funkce) plyne měřitelnost prvního členu na I. A jelikož je limita měřitelné funkce také měřitelná, je zobrazení $t \mapsto f(x(t), t)$ měřitelné. Jelikož je $f(x(t), t)$ majorizována podle třetí podmínky v definici Caratheodoryovy funkce, je funkce $t \mapsto f(x(t), t)$ třídy L^1_{loc}.

(ii)

„$\Rightarrow$“ Dle Pomocné věty 5. Řešení $x(t)$ je absolutně spojité díky pomocné Větě 6.

„$\Leftarrow$“ Jelikož je funkce $s \mapsto f(x(s), s) \in L^1_{loc}$, je funkce $t \mapsto \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)\, ds$ absolutně spojitá podle pomocné Věty 6 a předchozí části (i). Přičtením konstanty absolutní spojitost neporušíme, tedy zbývá použít druhou část pomocné Věty 6 k dokázání kýžené rovnosti. ☐

Definice. Nechť $f \in \mathrm{Car}(\Omega)$. Řekneme, že funkce f je zobecněně lipschitzovská vůči proměnné x, jestliže pro každou množinu $Q \subset \Omega$ tvaru válce $Q = B \times I$ existuje $m(t) \in L^1(I)$ takové, že platí

$$|f(x,t) - f(y,t)| \leq m(t)\, |x - y| \quad \text{pro s.v. } t \in I, \forall x, y \in B$$

Věta 16.1 (Zobecněná Banachova o kontrakci). *Mějme spojité zobrazení $\varphi: \Lambda \times X \to X$, kde X je Banachův prostor, Λ metrický prostor a existuje $k < 1$ splňující:*

$$\|\varphi(\lambda, x) - \varphi(\lambda, y)\| \le k \|x - y\| \qquad \textit{pro } \forall \lambda \in \Lambda, \forall x, y \in X$$

Potom

(i) $\forall \lambda \in \Lambda \; \exists! x(\lambda) \in X :: x(\lambda) = \varphi(\lambda, x(\lambda))$

(ii) zobrazení $\lambda \mapsto x(\lambda)$ je spojité

(iii) $\forall \lambda \in \Lambda \; \forall y \in X :: \|y - x(\lambda)\| \le \frac{1}{1-k} \|y - \varphi(\lambda, y)\|$

Důkaz. **(i)**

Buď λ pevné, $y \in X$ a definujme posloupnost y_n rekurentně vztahem $y_n = \varphi(\lambda, y_{n-1})$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $y_0 := y$. Počítejme:

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - y_n\| &= \|\varphi(\lambda, y_n) - \varphi(\lambda, y_{n-1})\| \le k \|y_n - y_{n-1}\| \\ &\overset{\text{indukcí}}{\le} k^n \|y_1 - y_0\| \end{aligned}$$

Vezměme $m, n \in \mathbb{N}$, BÚNO $m > n$, a počítejme:

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\| &\le \|y_m - y_{m-1}\| + \|y_{m-1} - y_{m-2}\| + \cdots + \|y_{n+1} - y_n\| \le \\ &\le \left(k^{m-1} + k^{m-2} + \cdots + k^n\right) \|y_1 - y_0\| \\ &< \varepsilon \|y_1 - y_0\|, \end{aligned}$$

kde jsme položili $\varepsilon = \sum_{j=n}^{\infty} k^j = \frac{k^n}{1-k}$, což je pro dostatečně velká n libovolně malé číslo.

Z předchozího vyplývá, že y_n je cauchyovská, neboť pro $m \ge n$ je i výraz $\|y_m - y_n\|$ libovolně malý, je-li $n \ge n_0$, kde n_0 je dostatečně velké přirozené číslo a tedy $\{y_n\}$ je konvergentní. Limitu označme $x(\lambda)$. Máme:

$$\begin{aligned} y_n &\to x(\lambda) \\ \varphi(y_n) = y_{n-1} &\to x(\lambda) \\ \varphi(y_n) &\to \varphi(x(\lambda)) \\ &\implies x(\lambda) = \varphi(x(\lambda)) \end{aligned}$$

Zbývá dokázat už jen jednoznačnost. Pro spor předpoklájme, že existují dva body $x, y \in X$, $x \ne y$, pro které platí $\varphi(\lambda, x) = \varphi(\lambda, y)$. Pak platí

$$\|x - y\| = \|\varphi(\lambda, x) - \varphi(\lambda, y)\| \le k \|x - y\|,$$

a jelikož je konstanta k ostře menší jedné, musí $x = y$, což je ve sporu s předpokladem.

(iii)

Z minulé části, volbou $y_0 = y$, dostáváme

$$\|y_{n+1} - y_0\| \le \sum_{i=0}^{n} k^i \|y_1 - y_0\| \le \frac{1}{1-k} \|\varphi(\lambda, y) - y\|.$$

Přechodem n do nekonečna pak dostáváme

$$\|x(\lambda) - y\| \le \frac{1}{1-k} \|y - \varphi(\lambda, y)\|.$$

(ii)

Potřebujeme ukázat

$$\lambda_n \to \lambda_0 \stackrel{?}{\Rightarrow} \|x(\lambda_0) - x(\lambda_n)\| \to 0.$$

Volme v bodě (iii) speciálně $y = x(\lambda_0)$ a $\lambda = \lambda_n$. Pak

$$\begin{aligned}\|x(\lambda_0) - x(\lambda_n)\| &\le \frac{1}{1-k}\,\|x(\lambda_0) - \varphi(\lambda_n, x(\lambda_0))\| = \\ &= \frac{1}{1-k}\,\|\varphi(\lambda_0, x(\lambda_0)) - \varphi(\lambda_n, x(\lambda_0))\|,\end{aligned}$$

což jde díky spojitosti φ k nule a tvrzení je dokázáno. □

Věta 16.2. *Mějme množinu* $\Omega = \mathbb{R}^n \times [0,T]$ *a funkci* $f \in \mathrm{Car}(\Omega)$. *Dále nechť platí*

$$\exists m(t) \in L^1([0,T])\ \forall t \in [0,T], \forall x, y \in \mathbb{R}^n : |f(x,t) - f(y,t)| \le m(t)\,|x-y|.$$

Pak existuje právě jedno řešení úlohy $x' = f(x,t)$ *s počáteční podmínkou* $x(0) = x_0$ *pro všechna* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Toto řešení závisí spojitě na počáteční podmínce* x_0.

Důkaz. Pokusme se napasovat na předešlou zobecněnou Banachovu větu o kontrakci. Položme $X := \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^n)$ s normou $\|x\| := \sup_{t\in[0,T]} |x(t)|\, e^{-Lt}$, kde konstanta $L > 0$ bude určena později. Dále definujme $\varphi\colon \mathbb{R}^n \times X \to X$ vztahem

$$\varphi(x_0, x)(t) := x_0 + \int_0^t f(x(s), s)\, ds.$$

Pomocí Lemmatu 16.1 vidíme, že platí

$$x \in X \text{ je řešení } \Leftrightarrow \varphi(x_0, x) = x.$$

Pokud dokážeme, že φ je kontrakce, z Věty 16.1 vyplynou všechna požadovaná tvrzení. Ukažme tedy, že φ je kontrakce uniformně vůči x_0. Označme $\hat{x} := \varphi(x_0, x)$, $\hat{y} := \varphi(x_0, y)$ pro $x, y \in X$ a $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Počítejme

$$\begin{aligned}|\hat{x}(t) - \hat{y}(t)| &= |\varphi(x_0,x)(t) - \varphi(x_0,y)(t)| \\ &= |\int_0^t f(x(s),s)\,ds - \int_0^t f(y(s),s)\,ds| \\ &= |\int_0^t f(x(s),s) - f(y(s),s)\,ds| \\ &\le \int_0^t |f(x(s),s) - f(y(s),s)|\,ds \\ &\le \int_0^t m(s)\,|x(s)-y(s)|\,ds \\ &\le \int_0^t m(s)\,|x(s)-y(s)|\,e^{-Ls}\,e^{Ls}\,ds \\ &\le \int_0^t m(s)\,\|x-y\|\,e^{Ls}\,ds \\ e^{-Lt}\,|\hat{x}(t) - \hat{y}(t)| &\le \|x-y\| \int_0^t m(s)\,e^{L(s-t)}\,ds\end{aligned}$$

Je třeba ukázat, že integrál vpravo je menší než $0,5$ v závislosti na námi vhodně zvolené dost velké konstantě L a libovolném $t \in [0,T]$. Pomůžeme si úvahou z TMI. Pro kladnou konstantu M můžeme funkci m rozdělit na dvě nezáporné funkce $m = m_1 + m_2$, které definujume následovně:

$$\begin{aligned} m_1(t) &= m(t) - M && m(t) > M && \forall t \in [0,T] \\ &= 0 && m(t) \le M && \forall t \in [0,T] \\ m_2(t) &= m(t) && m(t) < M && \forall t \in [0,T] \\ &= M && m(t) \ge M && \forall t \in [0,T] \end{aligned}$$

Z TMI víme, že pokud je funkce $m(t) \in L^1$, musí platit

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{R} :: \int_0^T m_1 \, ds < \varepsilon$$

Pokud dosadíme $\varepsilon = \frac{1}{4}$, dostaneme souhrnně:

$$\exists M > 0, \exists m_1, m_2 \in L^1; m = m_1 + m_2 :: \int_0^T m_1 < \frac{1}{4}, m_2(t) \le M$$

Odhadujme:

$$\begin{aligned} \int_0^T m(s)\, e^{L(s-t)}\, ds &= \int_0^T m_1(s)\, e^{L(s-t)}\, ds + \int_0^T m_2(s)\, e^{L(s-t)}\, ds \\ \int_0^T m_1(s)\, e^{L(s-t)}\, ds &\le \int_0^T m_1(s)\, 1\, ds \le \frac{1}{4} \\ \int_0^T m_2(s)\, e^{L(s-t)}\, ds &\le \int_0^T M e^{L(s-t)}\, ds \le M \int_0^T e^{L(s-t)}\, ds \\ &= M \int_0^T e^{-Lz}\, dz \le M \int_0^\infty e^{-Lz}\, dz \\ &= \frac{M}{L} < \frac{1}{4}, \qquad \text{což dosáhneme vhodně velkým } L. \end{aligned}$$

Právě dokázaný odhad použijme k dokončení důkazu:

$$\begin{aligned} e^{-Lt}\, |\hat{x}(t) - \hat{y}(t)| &\le \frac{1}{2}\|x - y\| \qquad / \sup_{t \in [0,T]} \\ \|\hat{x} - \hat{y}\| &\le \frac{1}{2}\|x - y\| \\ &\Rightarrow \|\varphi(x_0, x) - \varphi(x_0, y)\| \le \frac{1}{2}\|x - y\| \end{aligned}$$

□

18. Optimální regulace

18.1 Obecný případ

$$\begin{aligned} x' &= f(x,u) \qquad f\colon \Omega\times U \to \mathbb{R}^n \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{otevřená} \\ x(0) &= x_0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad U \subset \mathbb{R}^m (m < n) \end{aligned} \tag{18.1}$$

$$\mathcal{U} := \{u(t) : [0,T] \to U; \text{měřitelné}\} \quad \dots \quad \text{„přípustné regulace“}$$

Tato kapitola se zabývá následujícími obecnými typy úloh:

(i) regulovatelnost: Zda-li existuje pro dané x_0 a nějaké t regulační funkce $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ taková, že $x(t) = 0$.

(ii) To samé, jako v bodě (i), navíc však za nejkratší čas.

(iii) obecnější maximalizace funkcionálu $P[u(\cdot)] = g(x(T)) + \int_0^T r(x(t), u(t))\,dt$. Můžou nastat tyto varianty:

- $x(T)$ pevné, T volné
- $x(T)$ volné, T pevné

Příklad 18.1.

(i) 1D parkovací problém: Máme auto s počáteční pozicí a rychlostí. Ovládáním motoru (pomocí funkce $u(t)$) se snažíme co nejrychleji dostat do pozice nula s rychlostí nula. Tedy převedeno do rovnic, pohyb auta je dán rovnicí

$$mx'' = u,\ x(0) = x_0,\ v(0) = v_0,\ u(t) \in [-1,1],$$

kde m je hmotnost auta, x_0 počáteční pozice auta, v_0 počáteční rychlost auta, $u(t)$ regulace tahu motoru. Cílem je najít $u(t)$ tak, aby platilo $x(t) = x'(t) = 0$ za nejkratší možnou dobu t.

(ii) Investice vs. spotřeba: Funkce $x(t)$ značí kapitál firmy v čase t, $x(0) = x_0$ počáteční kapitál a v každém okamžiku se rozhodujeme, kolik z kapitálu zainvestujeme ($u(t)x(t)$, kde $u \in [0,1]$ udává míru nových investic) pro budoucí spotřebu a kolik rovnou spotřebujeme ($[1 - u(t)]x(t)$). Koeficient výnosnosti investic je $k > 0$. Náš příklad je zadán rovnicí $x' = kxu$. Snažíme se za čas $T > 0$ maximalizovat spotřebu, tedy funkcionál

$$P[u(\cdot)] = \int_0^T x(t)(1 - u(t))\,dt.$$

18.2 Lineární úloha

$$\begin{aligned} x' = Ax + Bu \qquad & A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad x(t)\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n \\ & B \in \mathbb{R}^{n\times m} \quad u(t) \in U := L^\infty([0,T];\mathbb{R}^m) \end{aligned} \tag{18.2}$$

Značení. Symbol

$$x_0 \xrightarrow[u]{t} 0$$

označuje, že regulace $u(\cdot)$ přivede úlohu ze stavu x_0 do stavu 0 v čase t.

Definice. Množinu

$$\mathcal{R}(t) := \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot) \in \mathcal{U},\ x_0 \xrightarrow[u]{t} 0\}$$

nazveme *oblastí regulovatelnosti v čase t*.

Lemma 18.1. *Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matice a $k \in \mathbb{N}_0$ libovolná konstanta. Potom $A^k \in \mathrm{Lin}\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$.*

Důkaz. Označme $Z := \mathrm{Lin}\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$. Rozdělme úlohu dle k:

- $0 \le k \le n-1$: $A^k \in Z$ z definice Z.
- $k = n$: Použijeme Hamilton-Cayleyovu větu z lineární algebry znějící: Pokud máme charakteristický polynom $\gamma(\lambda)$ čtvercové matice A, pak $\gamma(A) = 0$, kde symbolem $\gamma(A)$ máme na mysli polynom

  $$\gamma(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_n.$$

  Pokud si tedy charakteristický polynom chytře rozepíšeme a dosadíme do něj matici A, dostaneme:

  $$\gamma(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n - \sum_{j=0}^{n-1} c_j\, \lambda^j$$

  $$\gamma(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^n = \sum_{j=0}^{n-1} c_j\, A^j$$

  Z posledního dostáváme, že $A^n \in Z$.
- $k > n$: Použijeme indukci. Předpokládejme, že $A^k \in Z$, tj. že $A^k = \sum_{j=0}^{n-1} d_j\, A^j$. Pokud vynásobíme tuto rovnici maticí A zprava, dostaneme platnou rovnost

  $$A^{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} d_j\, A^{j+1}.$$

  Víme, že $j+1 \le n$ a díky předchozím dvěma částem $A^{j+1} \in Z$ pro $j = 0, 1, \dots n-1$, tedy $A^{k+1} \in Z$.

□

Důsledek. *Mějme matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a vektor $b \in \mathbb{R}^n$. Pak pro $k \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$A^k b \in \mathrm{Lin}\{b, Ab, A^2 b, \dots, A^{n-1} b\}.$$

Definice. Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Matici řádu $n \times mn$

$$\mathcal{K}[A|B] := (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)$$

nazvěme *Kalmanovou maticí regulovatelnosti*.

Poznámka 18.2. Mějme $x_0 \in \mathcal{R}(t)$. Pro něj nalezneme regulaci $u(\cdot)$ takovou, aby platilo $x_0 \xrightarrow[u]{t} 0$. Řešení rovnice (18.2) vyjádříme pomocí variace konstant:

$$\begin{aligned} 0 = x(t) &= e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)\,ds \\ x_0 &= -\int_0^t e^{-sA}Bu(s)\,ds \end{aligned} \tag{18.3}$$

Poznámka 18.3. Zádrhelem je, že $f(x,u)$ není spojitá, neboť takovou podmínku na regulaci $u(\cdot)$ neklademe. Pro naše potřeby ovšem můžeme použít Caratheodoryovu teorii, která tento problém vyřeší za nás. Proto v dalším, i když to nebudeme explicitně psát, tuto teorii budeme hojně využívat.

Speciálně, pro x_0, u dané je x řešení systému 18.2 a je jednoznačně určeno.

Věta 18.1. *Je dána úloha* (18.2)*,* $t > 0$ *pevné. Potom* $\mathcal{R}(t) = \mathrm{Lin}\{g_1, g_2, \dots, g_{mn}\}$*, kde* g_j *jsou sloupce matice* $\mathcal{K}[A|B]$ *pro* $j \in \{1,2,\dots,mn\}$*.*

Důkaz. Zvolme $t > 0$ pevné. Nahlédněme, že $\mathcal{R}(t)$ je vektorový prostor. Mějme dva libovolné prvky $x_1, x_2 \in \mathcal{R}(t)$ a regulace $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ takové, že $x_1 \xrightarrow[u_1]{t} 0$ a $x_2 \xrightarrow[u_2]{t} 0$. Potřebujeme najít regulaci k bodu $ax_1 + bx_2$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Využijme vyjadření (18.3) a linearity integrálu:

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= -a\int_0^t e^{-sA}Bu_1(s)\,ds - b\int_0^t e^{-sA}Bu_2(s)\,ds = \\ &= -\int_0^t e^{-sA}Bau_1(s)\,ds - \int_0^t e^{-sA}Bbu_2(s)\,ds = \\ &= -\int_0^t e^{-sA}B[au_1(s) + bu_2(s)]\,ds \end{aligned}$$

Hledanou regulací je regulace $v = au_1 + bu_2$. Tedy $\mathcal{R}(t)$ je vektorový prostor. Pro dokončení důkazu nám tedy stačí ukázat platnost rovnosti

$$\mathcal{R}(t)^\perp = (\mathrm{Lin}\{g_1, g_2, \dots, g_{mn}\})^\perp.$$

„$\supseteq$“: Mějme $p \in (\mathrm{Lin}\{g_1, g_2, \dots, g_{mn}\})^\perp$. Pak

$$\begin{aligned} &p \perp g_j, && j = 1,2,\dots,mn, \\ &p \perp A^k b_i, && k = 0,1,\dots n-1;\ b_i \text{ sloupce matice B, } i = 1,2,\dots,m. \end{aligned}$$

Mějme $x_0 \in \mathcal{R}(t)$ libovolné. Budeme chtít ukázat, že $p \perp x_0$. Nechť máme vhodné $u(\cdot) \in L^\infty(0,t,\mathbb{R}^m)$ splňující (18.3). Pak máme:

$$\begin{aligned} p \cdot x_0 = p^\top x_0 = -p^\top \int_0^t e^{-sA}Bu(s)\,ds &= -\int_0^t p^\top e^{-sA}Bu(s)\,ds = \\ &= -\int_0^t \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k}{k!}\, p^\top \left(A^k Bu(s) \right) \right) ds = \\ &= -\int_0^t \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k}{k!} \sum_{i=1}^{m} \left(\underbrace{p^\top A^k b_i}_{=:\,\mathrm{arg}}\, u_i(s) \right) \right) ds \end{aligned}$$

$$\mathrm{arg} = \begin{cases} 0 & \text{pokud } k \le n-1 \ \text{ (z předpokladu)} \\ 0 & \text{pokud } k \ge n \ \text{ (použití Důsledku za Lemmatem 18.1)} \end{cases}$$

„$\subseteq$“: Nechť $p \in \mathcal{R}(t)^\perp$. Chceme ukázat, že $p \perp A^k b_j$ pro $k < n$, kde b_j je sloupec matice B. Zvolme pevné $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ a libovolné $\varphi(\cdot) \in L^\infty(0, t, \mathbb{R})$. Definujme regulaci $u(\cdot)$ po složkách následovně:

$$u_i(s) = \begin{cases} \varphi(s) \in L^\infty(0, t, \mathbb{R}^m), & \text{pokud } i = j, \\ 0, & \text{pokud } i \neq j. \end{cases}$$

Regulace $u(\cdot)$ je zjevně měřitelná. Z (18.3) máme

$$0 = p \cdot x_0 = p^\top x_0 = -\int_0^t p^\top e^{-sA} B u(s)\, ds = -\int_0^t \underbrace{p^\top e^{-sA} b_j}_{=: \text{y(s)}} \varphi(s)\, ds.$$

Jelikož je $\varphi(\cdot)$ libovolná, je integrál vždy roven 0, musí být $y \equiv 0$ na $[0, T]$, tedy i $y^{(k)} \equiv 0$. Z toho vyplývá:

$$\begin{aligned} y(s) &= p^\top (e^{-sA} b_j) & &\Rightarrow & y(0) &= p^\top b_j = 0 \\ y'(s) &= p^\top (-A e^{-sA} b_j) & &\Rightarrow & y'(0) &= -p^\top A b_j = 0 \\ &\vdots & & & &\vdots \\ y^{(k)}(s) &= p^\top \left((-1)^k A e^{-sA} b_j \right) & &\Rightarrow & y^{(k)}(0) &= (-1)^k p^\top A^k b_j = 0 \end{aligned}$$

□

Důsledek. *Množina $\mathcal{R}(t)$ nezávisí na $t > 0$.*

Důsledek. *Rovnice* (18.2) *je globálně regulovatelná (tj. $\mathcal{R}(t) = \mathbb{R}^n$ pro každé $t > 0$), právě když hodnost matice $\mathcal{K}[A|B]$ je n.*

18.3 Pozorovatelnost

$$\begin{aligned} x' &= Ax & \quad y &= Bx & \quad A &\in \mathbb{R}^{n \times n} \\ x(0) &= x_0 & & & B &\in \mathbb{R}^{n \times m} \end{aligned} \tag{18.4}$$

U problému pozorovatelnosti se ptáme, jestli znalost y postačuje k jednoznačnému určení řešení x. Typicky y nese méně informací, je to „částečné“ pozorování. Navíc bývá $m < n$.

Definice. Řekneme, že systém (18.4) je pozorovatelný na intervalu $[0, T]$ pro $T > 0$, jestliže pro libovolná řešení x_1, x_2 platí

$$Bx_1 \equiv Bx_2 \text{ na } [0, T] \quad \Rightarrow \quad x_1(0) = x_2(0).$$

Poznámka 18.4. Poznamenejme, že předchozí definice opravdu říká to, co jsme si předsevzali v úvodu. Platí totiž

$$x_1(0) = x_2(0) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \equiv x_2 \text{ na } [0, T] \quad \Leftrightarrow \quad \exists \tau \in [0, T] :: x_1(\tau) = x_2(\tau).$$

Věta 18.2. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Systém (18.4) *je pozorovatelný (pro každé $t > 0$).*

(ii) Systém $x' = A^\top x + B^\top u$ je globálně regulovatelný.

(iii) Matice $\mathcal{K}[A^\top|B^\top]$ má hodnost n.

Důkaz. Ekvivalence mezi druhým a třetím tvrzením je zřejmým důsledkem předešlé Věty 18.1. Podívejme se tedy na připojení prvního bodu tvrzení:

$\neg(i) \Rightarrow \neg(iii)$ Nechť tedy systém (18.4) není pozorovatelný. Existují tedy dvě různá řešení x_1 a x_2 na $[0,t]$, pro která platí $Bx_1 \equiv Bx_2$, avšak $x_1(0) \neq x_2(0)$. Definujme řešení $x(t) := x_1(t) - x_2(t)$ s nenulovou počáteční podmínkou $x_0 = x(0)$. Z variace konstant dostáváme

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{tA}x_0 && \Big/ \cdot B \\
Bx(t) &= Be^{tA}x_0 \equiv 0 && \Big/ \left(\frac{d}{dt}\right)^k \\
BA^k e^{tA}x_0 &\equiv 0 && \Big|_{t=0} \\
BA^k x_0 &= 0 \\
x_0^\top (A^\top)^k B^\top &= 0 && \forall k \in \{0,1,\dots,n-1\} \\
x_0 \cdot \left(B^\top | A^\top B^\top | \dots | (A^\top)^{n-1} B^\top\right) &= 0
\end{aligned}$$

Dostáváme, že x_0 je kolmé na sloupce matice $\mathcal{K}[A^\top|B^\top]$, takže hodnost této matice je ostře menší n.

$\neg(iii) \Rightarrow \neg(i)$ Postupujme pozpátku předešlé části. Nechť má matice $\mathcal{K}[A^\top|B^\top]$ hodnost menší než n. Existuje pak nenulový vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ takový, že platí:

$$\begin{aligned}
x_0^\top \mathcal{K}[A^\top|B^\top] &= 0 \\
x_0^\top (A^\top)^k B^\top &= 0 && \forall k \in \{0,1,\dots,n-1\} \\
BA^k x_0 &= 0 && \forall k \in \{0,1,\dots,n-1\} \\
BA^k x_0 &= 0 && \forall k \in \{0,1,\dots\} \quad \text{Lemma 18.1} \\
B\frac{A^k s^k}{k!} x_0 &= 0 && \forall s \in \mathbb{R} \\
\sum_{k=0}^{\infty} B\frac{A^k s^k}{k!} x_0 &= 0 \\
Be^{sA}x_0 &= 0
\end{aligned}$$

Tedy $x_1(s) = e^{sA}x_0$ je netriviální řešení systému (18.4), jehož pozorování skrze B je nulové, tedy systém (18.4) není pozorovatelný. ☐

Věta 18.3 (Lokální regulovatelnost)**.** *Buď V okolí 0 v $\mathbb{R}^n$ a U okolí 0 v $\mathbb{R}^m$. Mějme funkci $f(x,u)\colon V \times U \to \mathbb{R}^n$, f je třídy $\mathcal{C}^1$ a platí $f(0,0) = 0$. Buď $\mathcal{U} = \{u\colon (0,t) \to U, \text{měřitelné}\}$. Označme $A = \nabla_x f(0,0)$ a $B = \nabla_u f(0,0)$. Nechť (klíčový předpoklad) $\mathcal{K}[A|B]$ má hodnost n. Potom systém*

$$x' = f(x,u), \qquad x(0) = x_0 \tag{18.5}$$

je lokálně regulovatelný, tj. $\mathcal{R}(t)$ obsahuje okolí 0 pro každé $t > 0$.

Důkaz. Mějme $t > 0$ pevné.

1. krok

Nejprve uvažme lineární úlohu

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bu \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{18.6}$$

Jelikož je $h(\mathcal{K}[A|B]) = n$, je systém (18.6) podle Věty 18.1 globálně regulovatelný. Vezměme $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}^n$ lineárně nezávislé. K nim díky globální regulovatelnosti nalezneme $u_1, u_2, \dots, u_n \in L^\infty([0,t], \mathbb{R}^n)$ takové, že $y_j \xrightarrow[u_j]{t} 0$ pro každé $j = 1, 2, \dots, n$.

Uvažme absolutně spojitou funkci z a systém

$$\begin{aligned} z' &= Az + Bu_j \quad \text{skoro všude} \\ z(0) &= y_j \end{aligned} \tag{18.7}$$

Díky Větě 16.2 o jednoznačnosti pro Caratheodoryovu úlohu máme $z(t) = 0$.

2. krok

Mějme $\lambda \in \mathbb{R}^n$ a položme $u_\lambda := \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$. Označme x_λ řešení rovnice

$$\begin{aligned} x'_\lambda &= f(x_\lambda, u_\lambda) \quad \text{na } [0,t] \\ x_\lambda(t) &= 0 \end{aligned} \tag{18.8}$$

Definujme funkci $\psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ předpisem $\psi(\lambda) := x_\lambda(0)$. Pak platí

$$\psi(\lambda) \xrightarrow[u_\lambda]{t} 0, \tag{18.9}$$

zároveň s tím $\psi(0) \equiv 0$ díky jednoznačnosti řešení příslušné rovnice.

Označme

$$D_i x_\lambda(t) := \frac{\partial}{\partial \lambda_i} x_\lambda(t) \Big|_{t=\lambda}$$

Víme, že:

$$\begin{aligned} x_\lambda(\tau) &= x_\lambda(t) + \int_\tau^t f(x_\lambda(s), u_\lambda(s))\, ds \\ D_i x_\lambda(\tau) &= \int_\tau^t \frac{\partial f}{\partial x} D_i x_\lambda(s) + \frac{\partial f}{\partial u} u_i \, ds \qquad \{f \in \mathcal{C}^1\} \end{aligned}$$

Označme $y_\lambda(\tau) := D_i x_\lambda(\tau)$. Pak $y_\lambda(\tau)$ řeší úlohu

$$\begin{aligned} y'_\lambda &= \nabla_x f(x_\lambda, u_\lambda) y_\lambda + \nabla_u f(x_\lambda, u_\lambda) u_i \\ y_\lambda(t) &= 0 \end{aligned} \tag{18.10}$$

Jelikož je $f \in \mathcal{C}^1$, existuje podle Caratheodoryovy teorie jednoznačně určené řešení. Pak pro všechna $\tau \in [0,t]$ je funkce $\lambda \mapsto x_\lambda(\tau)$ lokálně třídy $\mathcal{C}^1$ na okolí $0 \in \mathbb{R}^n$, z čehož plyne

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i} x_\lambda(\tau)\right) = \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\left(\frac{d}{d\tau} x_\lambda(\tau)\right). \tag{18.11}$$

3. krok

Funkce ψ je třídy $\mathcal{C}^1$ na okolí 0 (=: U_0), ukážeme, že $\nabla\psi(0)$ má hodnost n. Pak dle věty o lokálním difeomorfismu $\psi(U_0)$ obsahuje okolí 0. Tedy spolu s (18.9) dává, že systém (18.5) je lokálně regulovatelný. Ověřme tedy zbývající předpoklad:

V systému (18.8) položme $\lambda = 0$. Pak je i $u_\lambda = 0$ a $x_\lambda = 0$. Dostáváme nový systém

$$\begin{aligned} y_0'(\tau) &= \nabla_x f(0,0) y_0(\tau) + \nabla_u f(0,0) u_i = A y_0(\tau) + B u_i \\ y_0(\tau) &= y_i \qquad \{(18.7)\} \end{aligned}$$

Ovšem pak máme

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_i}(0) = \frac{\partial}{\partial\lambda_i} x_\lambda(0)\Big|_{\lambda=0} = D_i x_\lambda(0) = y_0(0) = y_i.$$

Jelikož byly vektory $y_1, y_2, \dots, y_n$ brány lineárně nezávislé, má i matice $\nabla\psi(0) = (y_1^\top, y_2^\top, \dots, y_n^\top)$ plnou hodnost n. $\square$

Časově optimální regulace s omezením

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bu & A &\in \mathbb{R}^{n\times n}; & x(t) &: [0,T] \to \mathbb{R}^n \\ x(0) &= x_0 & B &\in \mathbb{R}^{n\times m}; & u(t) &\in \mathcal{U} \end{aligned} \tag{18.12}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{u \colon (0,T) \to [-1,1]^m, \text{měřitelné}\} \quad \dots \quad \text{přípustné regulace} \\ \mathcal{R}(t) &= \{x_0 \in \mathbb{R}^n :: \exists u \in \mathcal{U}, x_0 \xrightarrow[u]{t} 0\} \\ \mathcal{R} &= \bigcup_{t>0} \mathcal{R}(t) \end{aligned}$$

Poznámka 18.5. Dále uvedeme poznatek z funkcionální analýzy, kterého budeme opakovaně využívat. Znění definice i věty jsou ve skutečnosti obecnější, pro naše účely jsou tyto speciální případy dostačující.

Definice. Buďte $u_n \in L^\infty(0,t;\mathbb{R}^n)$. Řekneme, že posloupnost $\{u_n\}$ konverguje *-slabě k prvku $u_0 \in L^\infty$, značeno $u_n \xrightarrow{*} u_0$, pokud

$$\int_0^t a(s)\cdot u_n(s)\,ds \to \int_0^t a(s)\cdot u_0(s)\,ds,$$

pro každou pevnou funkci $a(\cdot) \in L^1(0,t;\mathbb{R}^n)$.

Pomocná věta 8 (Alaoglu)**.** *Množina $\mathcal{U}$ je slabě *-sekvenciálně kompaktní, tj. pro libovolnou posloupnost $\{u_n\} \in \mathcal{U}$ existuje vybraná podposloupnost $\{\widetilde{u}_n\} \subset \{u_n\}$ a prvek $u_0 \in \mathcal{U}$ takový, že $\widetilde{u}_n \xrightarrow{*} u_0$ v $L^\infty(0,t;\mathbb{R}^n)$.*

Věta 18.6. *Množina $\mathcal{R}(t)$ je pro každé $t > 0$ konvexní, symetrická, uzavřená a pro $t_1 < t_2$ platí $\mathcal{R}(t_1) \subset \mathcal{R}(t_2)$.*

Důkaz. Pro názornost následujících úvah připomeňme, že se $x_0 \in \mathcal{R}(t)$ dá vyjádřit jako $x_0 = -\int_0^t e^{-sA} Bu(s)\,ds$, kde $u(\cdot)$ je příslušná regulace k x_0.

- Konvexita: Vezměme dvě libovolná řešení x_1, x_2 a příslušné regulace u_1, u_2 tak, aby $x_1 \xrightarrow[u_1]{t} 0$ a $x_2 \xrightarrow[u_2]{t} 0$. Hledáme regulaci k řešení $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \in [0,1]$. Tou je $\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2$ díky linearitě (18.3) ukázané výše.

- Symetričnost: Mějme $x_0 \in \mathcal{R}(t), x_0 \xrightarrow[u_0]{t} 0$. Pro $-x_0$ stačí vzít regulaci $-u_0$.

- Uzavřenost: Potřebujeme ukázat, že pro každou posloupnost prvků $x_n \in \mathcal{R}(t), x_n \to x^*$ je také prvek $x^* \in \mathcal{R}(t)$. Uvažme příslušné regulace u_n. Podle Alaoglua existuje k posloupnosti $\{u_n\}$ podposloupnost $\{\widetilde{u}_n\}$, která konverguje k prvku $\widetilde{u}^* \in \mathcal{U}$. Jelikož je $e^{-sA}B \in L^1(0,t)$, platí pak $\widetilde{x}_n \to x^*$, kde $x^* := -\int_0^t e^{-sA}Bu^*(s)\,ds$, tedy $x_0 \in \mathcal{R}(t)$.

- Pro bod x_0 a čas t_1 najdeme libovolnou regulaci u_1 splňující $x_0 \xrightarrow[u_1]{t_1} 0$. Pro čas $t_2 > t_1$ a bod x_0 pak volíme regulaci u_2 tvaru

$$u_2 = \begin{cases} u_1 & t \in [0, t_1] \\ 0 & t \in (t_1, t_2] \end{cases}$$

  Regulace u_2 tedy zjevně splňuje $x_0 \xrightarrow[u_2]{t_2} 0$. Jelikož jsme ukázali, že každá regulace má ve větším čase prodloužení, platí $\mathcal{R}(t_1) \subset \mathcal{R}(t_2)$ pro $t_1 < t_2$.

$\square$

Věta 18.7 (o lokální regulovatelnosti)**.** *Množina $\mathcal{R}(t)$ obsahuje okolí 0 pro každé $t > 0$ právě tehdy, když hodnost matice $\mathcal{K}[A|B]$ je n.*

Důkaz. Implikace zprava doleva plyne z Věty 18.3. Zabývejme se opačnou implikací. Tu dokážeme nepřímo. Předpokládejme tedy, že hodnost matice $\mathcal{K}[A|B]$ je ostře menší n. Existuje pak nenulový vektor $b \in \mathbb{R}^n$ splňující

$$b^\top A^k B = 0 \qquad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$$

Pak podle Lemmatu 18.1:

$$\begin{aligned} b^\top A^k B &= 0 \qquad & \forall k \in \mathbb{N}_0 \\ b^\top e^{-sA} B &= 0 \qquad & \forall s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Vezměme libovolný prvek $x_0 \in \mathcal{R}(t)$. Použijme vyjádření (18.3) $x_0 = -\int_0^t e^{-sA}Bu(s)\,ds$ pro vhodnou $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. Pak

$$b^\top x_0 = -\int_0^t \underbrace{b^\top e^{-sA}B}_{\equiv 0} u(s)\,ds = 0.$$

Jinak řečeno, pro nenulový vektor $b \in \mathbb{R}^n$ je množina $\mathcal{R}(t)$ podmnožinou $\{ab;\, a \in \mathbb{R}\}^\perp$, tedy maximálně $(n-1)$-dimenzionální nadroviny, tedy nemůže obsahovat n-dimenzionální okolí 0. $\square$

Věta 18.8 (Globální regulovatelnost)**.** *Nechť $h(\mathcal{K}[A|B]) = n$ a nechť $Re\lambda \leq 0$ pro $\forall \lambda \in \sigma(A)$. Potom $\mathcal{R} = \mathbb{R}^n$.*

Poznámka 18.6. Pokud by speciálně platilo $\mathrm{Re}\lambda < 0$ pro všechna $\lambda \in \sigma(A)$, tvrzení by pak bylo snadným důsledkem předchozí věty. Dodatečné předpoklady nám zajišťují asymptotickou stabilitu v 0, tedy bez pomoci regulace se dostaneme libovolně blízko 0. Ovšem z předešlé věty víme, že množina $\mathcal{R}(t)$ nějaké okolí 0 obsahuje.

Důkaz. Budeme postupovat sporem. Předpokládejme tedy, že $\mathcal{R} \neq \mathbb{R}^n$ a volme $z_0 \in \partial\mathcal{R}$. Jelikož je množina $\mathcal{R}$ sjednocením do sebe vnořených konvexních množin, je i ona konvexní, a tedy existuje tečná nadrovina. Buď b normálový vektor nadroviny v bodě dotyku z_0, b je tedy nenulový vektor z $\mathbb{R}^n$. Díky konvexitě musí množina $\mathcal{R}$ ležet v poloprostoru od nadroviny směrem opačným k vektoru b a pro každé $x_0 \in \mathcal{R}$ platí:

$$\begin{aligned} b \cdot (x_0 - z_0) &\leq 0 \\ b \cdot x_0 &\leq b \cdot z_0 \qquad \mu := b \cdot z_0 \\ b \cdot x_0 &\leq \mu \end{aligned} \tag{18.13}$$

Vezměme libovolný prvek $x_0 \in \mathcal{R}$. Pak platí:

$$\begin{aligned} x_0 &= -\int_0^t e^{-sA} B u(s)\, ds \\ b \cdot x_0 = b^\top x_0 &= -\int_0^t \underbrace{b^\top e^{-sA} B}_{=: v(s) \in \mathbb{R}^{1\times n} \text{ (tj. řádkový vektor)}} u(s)\, ds \end{aligned}$$

Tvrdím, že $v \not\equiv 0$. Předpokládejme, že je to identická 0. Pak je její k-tá derivace také identická 0, speciálně i v bodě 0: $v^{(k)}(0) = b^\top(-A)^k B = 0$, což je spor s tím, že hodnost Kalmanovy matice je n.

Zadefinujme novou regulaci:

$$\tilde{u}(s) = \begin{cases} 0 & v(s) = 0 \\ -\frac{v^\top(s)}{|v(s)|} & v(s) \neq 0 \end{cases}$$

Zjevně patří do přípustných regulací. Dále pro ni platí

$$b \cdot x_0 = -\int_0^t v(s)\tilde{u}(s)\, ds = \int_0^t |v(s)|\, ds.$$

V poslední části budeme chtít ukázat, že $\int_0^\infty |v(s)|\, ds = \infty$, což bude náš hledaný spor, neboť potom pro t velké platí $\int_0^t |v(s)|\, ds > \mu$, což odporuje nerovnosti (18.13).

Divergenci integrálu dokážeme sporem. Předpokládejme tedy, že je konvergentní. Pak je korektní definice $\Phi(t) := \int_t^\infty v(s)\, ds$. Dále označme $p(\lambda)$ charakteristický polynom matice A. Ten je tvaru

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Nad to zavedeme diferenciální operátor

$$p\left(-\frac{d}{dt}\right) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^n + a_1\left(-\frac{d}{dt}\right)^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Zkusme aplikovat tento operátor na vektor v a pak i na funkci Φ:

$$\begin{aligned}
\left[p\left(-\frac{d}{dt}\right)\right](v(t)) &= p\left(-\frac{d}{dt}\right)\left(b^\top e^{-tA}B\right) = \\
&= b^\top\left\{\left[p\left(-\frac{d}{dt}\right)\right]\left(e^{-tA}\right)\right\}B = \\
&= b^\top\left\{\left[\left(-\frac{d}{dt}\right)^n + a_1\left(-\frac{d}{dt}\right)^{n-1} + \cdots + a_n\right]\left(e^{-tA}\right)\right\}B = \\
&= b^\top\left\{\left(-\frac{d}{dt}\right)^n e^{-tA} + a_1\left(-\frac{d}{dt}\right)^{n-1} e^{-tA} + \cdots + a_n e^{-tA}\right\}B = \\
&= b^\top\left\{A^n e^{-tA} + a_1 A^{n-1} e^{-tA} + \cdots + a_n e^{-tA}\right\}B = \\
&= b^\top \underbrace{p(A)}_{=0} e^{-tA}B = 0
\end{aligned}$$

$$\left[-\frac{d}{dt}p\left(-\frac{d}{dt}\right)\right](\Phi(t)) = \left[p\left(-\frac{d}{dt}\right)\right]\underbrace{(-\Phi'(t))}_{v(t)} = 0$$

Poslední řádek nám neříká nic jiného, než že $\Phi(t)$ řeší ODR řádu $(n+1)$ s konstantními koeficienty. Pomocí pro spatření vám buď pouhé přepsání tohoto řádku:

$$\Phi^{(n+1)}(t) + a_1\Phi^{(n)}(t) + a_2\Phi^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n\Phi'(t) = 0$$

Charakteristický polynom matice z této ODR je $q(\mu) = -\mu p(-\mu)$. Jelikož je $p(\cdot)$ charakteristický polynom matice A, je $Re\,\mu_j \geq 0$ pro všechny kořeny charakteristického polynomu $q(\mu)$. Tedy $\Phi(t)$ jako řešení netriviální ($v \not\equiv 0$) musí být lineární kombinací členů $t^l e^{t\mu_j}$. Dostáváme, že $\Phi(t)$ je pro t velká kladné, což je spor, neboť platí

$$0 < \liminf_{t\to\infty} |\Phi(t)| \leq \lim_{t\to\infty} \int_t^\infty |v(s)|\,ds = 0$$

□

Definice. Regulaci $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ nazveme *regulací typu „bang-bang“* (česky „cik-cak“ nebo „bum-prásk“), jestliže $u_i(t) = \pm 1$ pro skoro všechna t a pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Věta 18.9 (Princip bang-bang)**.** *Nechť $x_0 \in \mathcal{R}(t)$, tj. existuje regulace $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ taková, že $x_0 \xrightarrow[u]{t} 0$. Pak existuje regulace $\widetilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ typu bang-bang taková, že $x_0 \xrightarrow[\widetilde{u}]{t} 0$.*

Definice. Nechť X je vektorový prostor, $K \subset X$ konvexní podmnožina. Bod $c \in K$ nazveme *extremálním*, jestliže c nelze napsat jako $\frac{1}{2}(x+y)$, kde $x, y \in K$, $x \neq y$. Ekvivalentně vyjádřeno, množina $K \setminus \{c\}$ je konvexní.

Příklad 18.7. Například v množině tvaru krychle jsou extremálními body všechny vrcholy, v množině kruhu je to celá kružnice.

Pomocná věta 9 (Krejn-Milman)**.** *Nechť X je lokálně konvexní vektorový prostor a buď $K \subset X$ neprázdná, konvexní a kompaktní množina. Pak K obsahuje extremální bod.*

Důkaz Věty 18.9. Označme

$$K := \{u(\cdot) \in \mathcal{U}; x_0 \xrightarrow[u]{t} 0\}.$$

Množina K je podprostor prostoru $L^\infty(0,t;\mathbb{R}^n)$ s *-slabou topologií.

1. krok

Splnění předpokladů Krejn-Milmanovy věty:

- K je neprázdná.
- K je konvexní. Pro $u_0, u_1 \in K$ vezměme lineární kombinaci $u_a = au_1 + (1-a)u_0$, $a \in [0,1]$ a díky (18.3) a linearitě integrálu máme $u_a \in K$.
- K je kompaktní. Vezměme $u_n \in K$. Podle Alauglovy věty existuje $u \in \mathcal{U}$ takové, že $u_n \xrightarrow{*} u$ (BÚNO u_n teď značí vhodnou vybranou podposloupnost u_n), tj.

  $$\int_0^t a(s)u_n(s)\,ds \to \int_0^t a(s)u(s)\,ds \qquad \text{pro každou } a \in L^1(0,t;\mathbb{R}^n)$$

  $$x_0 = -\int_0^t \underbrace{e^{-sA}B}_{\in L^1(O,t)} u_n(s)\,ds \to x_0 = -\int_0^t e^{-sA}Bu(s)\,ds$$

  Tedy $u \in K$.

Z Krejn-Milmanovy věty dostáváme existenci extremálního bodu $\tilde{u}$ množiny K.

2. krok

Ukažme, že $\tilde{u}$ je typu bang-bang. Pro spor předpokládejme, že není. Pak existuje $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ a $E \subset \{0,t\}$ množina kladné míry taková, že $\forall s \in E : |u_i(s)| < 1$.

Tvrdím navíc, že k $\varepsilon > 0$ existuje $\widetilde{E} \subset E$ množina kladné míry taková, že $\forall s \in \widetilde{E} : |u_i(s)| < 1 - \varepsilon$. Rozepišme množinu E:

$$E = \{s \in (0,t); |u_i(s)| < 1\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{s \in (0,t) : |u_i(s)| < 1 - \frac{1}{n}\}}_{=:F_n}$$

$$|E| = \lim_{n\to\infty} |F_n|$$

Pak musí existovat index $n_0 > 0$ takový, že $|F_{n_0}| > 0$. Položme tedy $\varepsilon = \frac{1}{n_0}$, $\widetilde{E} = F_{n_0}$. Zvolme $v \in \mathcal{U}$ splňující $v(s) = (0,\ldots,0,\underbrace{\varphi(s)}_{i},0,\ldots,0)^\top$, kde $\varphi(s)$ je měřitelné zobrazení $(0,t) \to \mathbb{R}$ splňující podmínky:

- $\varphi(s) = 0$ pro $s \in (0,t) \setminus \widetilde{E}$

- $\varphi(s) \leq \varepsilon, \varphi(s) \neq 0$ pro $s \in \widetilde{E}$
- $\int_{\widetilde{E}} e^{-sA} b_i \varphi(s)\, ds = 0$

Tato funkce existuje, neboť jde o kolmici na funkce $e^{-sA} b_j$ v $L^2(\widetilde{E}; \mathbb{R})$, což je Hilbertův prostor. Pak

$$\int_0^t e^{-sA} B v(s)\, ds = \int_0^t e^{-sA} b_i \varphi(s)\, ds = \int_{\widetilde{E}} e^{-sA} b_i \varphi(s)\, ds = 0$$

Dále vezměme $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ následovně:

- $u_1 := \widetilde{u} + v$
- $u_2 := \widetilde{u} - v$

Jsou $u_1, u_2 \in K$? Zjevně $u_i(t) \in [-1,1]^m$, neboť $\tilde{u} \leq 1 - \varepsilon$ na $\tilde{E}$ a $|\varphi| \leq \varepsilon$. Pak už jen

$$-\int_0^t e^{-sA} B u_i(s)\, ds = -\int_0^t e^{-sA} B\ u(s)\, ds - \int_0^t e^{-sA} B[\pm v(s)](s)\, ds = x_0 + 0 = x_0$$

Dále platí, že $u_1 \neq u_2$, neboť $v \not\equiv 0$. Pak platí $\tilde{u} = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$. Ovšem to je spor s předpokladem extremálnosti $\tilde{u}$. □

Věta 18.10. *Nechť $x_0 \in \mathcal{R}$. Potom existují $t^* \leq t$ a $u^* \in \mathcal{U}$ tak, že $x_0 \xrightarrow[u^*]{t} 0$ a t^* je minimální čas.*

Důkaz. Označme $t^* := \inf\{t > 0; x_0 \in \mathcal{R}(t)\}$. Tato množina je neprázdná, zdola omezená, tedy infimum existuje a je nezáporné. Z definice infima existuje posloupnost časů $t_n \in \mathcal{R}$, která shora konverguje k t^*. Jelikož jsou všechny $t_n \in \mathcal{R}$, existuje ke každému regulace $u_n \in \mathcal{U}$ takové, že $x_0 \xrightarrow[u_n]{t_n} 0$. BÚNO existuje čas $T > 0$ takový, že pro každé n platí $0 \leq t^* < t_n < T$. Položme $u_n = 0$ na (t_n, T). Je vidět, že pro každou regulaci u_n platí $x_0 \xrightarrow[u_n]{T} 0$.

Použitím Alaogluovy věty získáváme existenci regulace $u^* \in \mathcal{U}$ splňující $u_n \to u^*$. Potřebujeme ukázat, že $x_0 \xrightarrow[u^*]{t^*} 0$. Počítejme

$$\begin{aligned} x_0 &= -\int_0^T e^{-sA} B u_n(s)\, ds \\ &= -\int_0^{t^*} e^{-sA} B u_n(s)\, ds - \int_{t^*}^{t_n} e^{-sA} B u_n(s)\, ds - 0 \end{aligned}$$

Integrand druhého integrálu je omezená funkce, můžeme tedy tento integrál odhadnout výrazem $K|t_n - t^*|$, který jde k 0 pro $t_n \to t^*$. Dále je funkce $e^{-sA}B$ třídy L^1, díky čemuž a z definice $\omega*$-konvergence platí celkově

$$x_0 \xrightarrow[t_n \to t^*]{} -\int_0^{t^*} e^{-sA} B u^*(s)\, ds.$$

□

Důsledek (Vět 18.9 a 18.10)**.** *Nechť $x_0 \in \mathcal{R}$. Pak existuje čas t^* a regulace $\widetilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ typu bang-bang takové, že $\xrightarrow[\widetilde{u}]{t^*} 0$ a čas t^* je minimální.*

Věta 18.11 (Pontrjaginův princip maxima)**.** *Nechť* $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$*, nechť* $x_0 \xrightarrow[u^*]{t^*} 0$*, kde* t^* *je minimální čas. Pak existuje* $h \in \mathbb{R}^n$*,* $h \neq 0$ *takový, že*

$$h^\top e^{-sA} B u^*(s) = \max_{\eta \in [-1,1]^m} h^\top e^{-sA} B \eta \quad \textit{pro s.v. } s \in (0, t^*) \tag{PM}$$

Poznámka 18.8. Tato věta je podobného ražení jako Lagrangeovy multiplikátory ze základního kursu analýzy. Ta nám říká pouze o nutné podmínce pro extrém. Použitím této podmínky na konkrétní případ získáme často konečnou množinu možných extrémů, ze kterých pravý prvek nalezneme například dosazením. Stejně tak budeme tuto větu používat k hledání časově optimálních regulací.

Důkaz. Klíčovým krokem je pozorování, že $x_0 \in \partial\mathcal{R}(t^*)$. Dokažme sporem. Předpokládejme tedy, že x_0 leží uvnitř. Volme různé body $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathcal{R}(t^*)$ takové, aby $x_0 \in \operatorname{int} \operatorname{co} \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$. Ke každému x_i existuje regulace $u_i(\cdot) \in \mathcal{U}$ taková, že $x_i \xrightarrow[u_i]{t^*} 0$. Označme $\widetilde{x}_i(t)$ příslušné trajektorie. Zvolme $\delta > 0$ malé, aby $x_0 \in \operatorname{co} \{\widetilde{x}_1(\delta), \widetilde{x}_2(\delta), \ldots, \widetilde{x}_{n+1}(\delta)\}$. Jinými slovy jsme se po příslušných řešení posunuli o čas δ blíž k 0, tedy víme, že $\widetilde{x}_i(\delta) \subset \mathcal{R}(t^* - \delta)$. Jelikož je $\mathcal{R}$ konvexní, musí $x_0 \in \mathcal{R}(t^* - \delta)$, což je spor s minimalitou t^*. Tedy x_0 opravdu musí ležet na hranici.

Mějme tedy bod $x_0 \in \partial\mathcal{R}(t^*)$. Jelikož je tato množina konvexní a uzavřená, existuje opěrná nadrovina (ze stejného důvodu, jako v důkazu Věty 18.8), tedy:

$$\exists g \in \mathbb{R}^n, g \neq 0 :: g \cdot (x_1 - x_0) \geq 0, \quad \forall x_1 \in \mathcal{R}(t^*)$$

Vyjádříme tyto dva body a dosadíme do předchozí nerovnosti.

$$\begin{aligned} x_0 &= -\int_0^{t^*} e^{-sA} B u^*(s)\, ds \\ x_1 &= -\int_0^{t^*} e^{-sA} B u(s)\, ds \quad \text{pro vhodné } u(\cdot) \in \mathcal{U} \\ \Rightarrow \quad & \int_0^{t^*} g^\top e^{-sA} B [u^*(s) - u(s)]\, ds \geq 0 \end{aligned} \tag{INT}$$

Podmínku (PM) dokážeme sporem. Předpokládejme tedy, že existuje měřitelná množina $E \subset (0, t^*)$ s kladnou mírou, pro kterou platí:

$$\forall s \in E \; \exists \eta_s \in [-1, 1]^m :: g^\top e^{-sA} B u^*(s) < g^\top e^{-sA} B \eta_s$$

Definujme novou regulaci:

$$\tilde{u}(s) = \begin{cases} u^*(s) & s \notin E \\ \eta_s & s \in E \end{cases}$$

Dá se ukázat (je to však obtížné), že je tato regulace měřitelná, tedy že $\widetilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$. Dále rozepišme (INT):

$$0 \leq \int_0^{t^*} g^\top e^{-sA} B [u^*(s) - u(s)]\, ds = \int_E g^\top e^{-sA} B u^*(s) - g^\top e^{-sA} B \eta_s\, ds$$

Jelikož počítáme poslední integrál přes množinu E, musí být integrál ostře menší 0, což je ve sporu se zbytkem řádku. $\square$

18.4 Obecný Pontrjaginův princip maxima

18.4.1 Pontrjagin s pevným časem

$$
\begin{aligned}
x' &= f(x,u) & \mathcal{U} &= \{u\colon (0,T) \to U \text{ měřitelné}\}\\
x(0) &= x_0 & f&\colon \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^n\\
P\big[u(\cdot)\big] &= g\big(x(T)\big) + \int_0^T r\big(x(s),u(s)\big)\,ds & g&\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\\
& & r&\colon \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}
\end{aligned}
\tag{18.14}
$$

Problém (nazýván Meyerův) tkví v maximalizaci operátoru $P[u(\cdot)]$, kde $u \in \mathcal{U}$, $T > 0$ pevně dáno, $x(T)$ není určeno.

Definice. Pro úlohu (18.14) dále definujme

- *hamiltonián*
$$H(x,p,u) = p^\top f(x,u) + r(x,u)$$
- *adjungovanou úlohu*
$$
\begin{aligned}
(p^\top)' &= -\nabla_x H(x,p,u)\\
p_i' &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}(x,p,u) = -\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x,u) - \frac{\partial r}{\partial x_i}(x,u)
\end{aligned}
$$

Věta 18.12 (Pontrjaginova s pevným časem)**.** *Nechť je $u^*(\cdot)$ lokální maximum Mayerova problému a x^* odpovídající řešení úlohy* (18.14)*. Potom existuje AC funkce $p^*\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$ řešení adjungované rovnice*

$$
\begin{aligned}
[(p^*)^\top]' &= -\nabla_x\, H(x^*,p^*,u^*)\\
[p^*(T)]^\top &= \nabla_x\, g(x^*(T))
\end{aligned}
\tag{ADJ}
$$

takové, že pro skoro všechna $t \in (0,T)$ platí

$$H(x^*(t),p^*(t),u^*(t)) = \max_{\eta\in\mathcal{U}} H(x^*(t),p^*(t),\eta). \tag{PM}$$

18.4.2 Pontrjagin s pevným koncovým bodem

$$
\begin{aligned}
x' &= f(x,u) & \mathcal{U} &= \{u\colon (0,\infty) \to U \text{ měřitelné}\}\\
x(0) &= x_0 & f&\colon \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^n\\
P\big[u(\cdot)\big] &= \int_0^{t^*} r\big(x(s),u(s)\big)\,ds & r&\colon \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}
\end{aligned}
\tag{18.15}
$$

Věta 18.13 (Pontrjaginova s pevným koncovým bodem)**.** *Nechť je $u^*(\cdot)$ lokální minimum úlohy* (18.15) *a x^* odpovídající řešení. Potom existuje řešení $p^*\colon [0,t^*] \to \mathbb{R}^n$ a konstanta $q \in \mathbb{R}$ taková, že pro skoro všechna $t \in (0,t^*)$ platí*

$$
\begin{aligned}
[(p^*)^\top]' &= -\nabla_x\, H(x^*,p^*,u^*),\\
H(x^*(t),p^*(t),u^*(t)) &= \max_{\eta\in\mathcal{U}} H(x^*(t),p^*(t),\eta).
\end{aligned}
$$

Navíc platí

$$H(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) = 0,$$
$$kde\ H(x,p,u) = p^\top f(x,u) + q\, r(x,u)$$

19. Bifurkace

$$x' = f(x,\mu) \qquad \begin{array}{l} x(t) \in \mathbb{R}^n \\ \mu \in \mathbb{R} \ldots \text{bifurkační parametr} \end{array} \tag{19.1}$$

Bod (x_0, μ_0) je bod bifurkace, pokud pro $\mu = \mu_0$ nastává podstatná změna chování řešení v okolí bodu x_0. Podstatnou změnou myslíme změnu počtu a/nebo typu stability stacionární bodů.

Bifurkační diagram:

19.0.3 Základní typy bifurkace

Příklad 19.1.

(i) $x' = \mu - x^2$ – typ sedlo - uzel (viz Obr. 19.1)

(ii) $x' = \mu x - x^2 = x(\mu - x)$ – typ transkritická (viz Obr. 19.2)

(iii) $x' = \mu x - x^3 = x(\mu - x^2)$ – typ vidličková (viz Obr. 19.3)

Poznámka 19.2. Z předchozích příkladů vidíme, že každý bod bifurkace (x_0, μ_0) je stacionární bod splňující $\partial_x f(x_0, \mu_0) = 0$ (kvůli změně stability v tomto bodě).

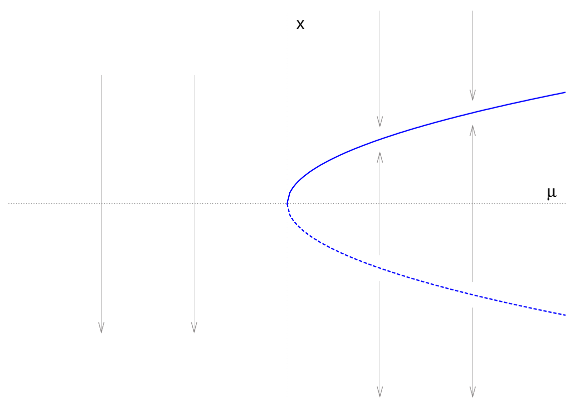
Poznámka 19.3. Pokud platí $f(x_0, \mu_0) \neq 0$, je pro parametry μ blízké μ_0 také $f(x_0, \mu) \neq 0$, tudíž chování řešení je díky Větě 13.3 o rektifikaci stále stejné. Tedy v bodě (x_0, μ_0) nedochází k bifurkaci.

Definice. Bod $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nazveme *hyperbolickým stacionárním bodem* rovnice $x' = h(x)$, jestliže $h(x_0) = 0$ a navíc $Re\lambda \neq 0$ pro všechna $\lambda \in \sigma(A)$, kde $A = \nabla_x h(x_0)$.

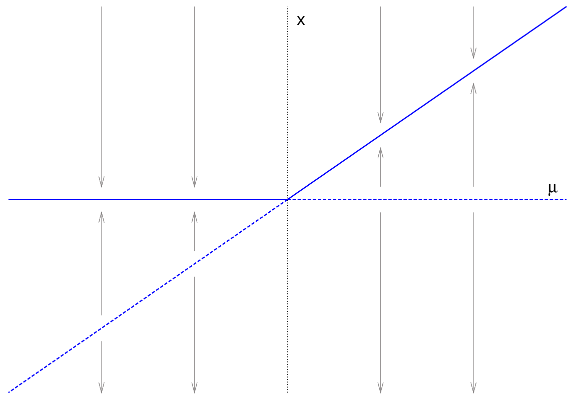
Poznámka 19.4. Pokud je x_0 hyperbolický stacionární bod, pak lze určit stabilitu pomocí vět o linearizaci.

Lemma 19.1. *Buď $p(z) = \sum_{j=0}^{k} a_j z^{k-j}$ polynom a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ jeho kořeny. Uvažme polynom $\widetilde{p}(z) = \sum_{j=0}^{k} \tilde{a}_j z^{k-j}$. Potom*

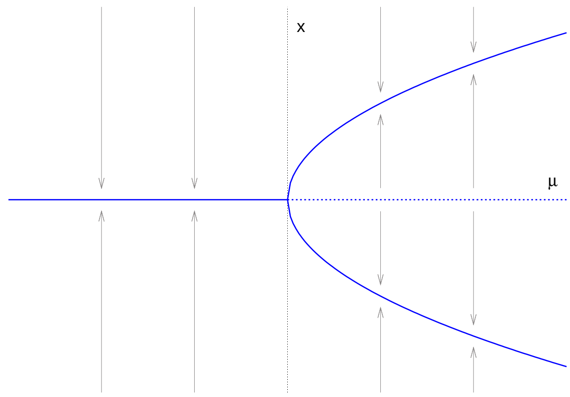
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall j : |a_j - \tilde{a}_j| < \delta \Rightarrow \textit{kořeny } \tilde{p}(z) \textit{ leží v } \bigcup_{i=1}^{k} U(\lambda_i, \varepsilon).$$



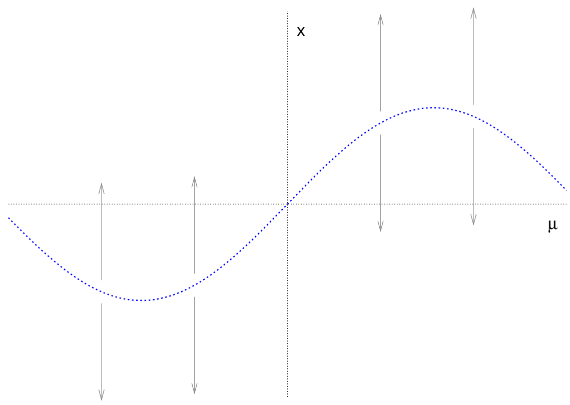
Obrázek 19.1: sedlo - uzel



Obrázek 19.2: transkritická



Obrázek 19.3: vidličková



Obrázek 19.4: žádná bifurkace

Věta 19.1. *Mějme funkci $f(x,\mu)\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^1$ na okolí bodu $(0,0)$ a nechť $x_0 = 0$ je hyperbolický stacionární bod rovnice $x' = f(x,0)$. Potom existují kladné konstanty δ, Δ takové, že pro každé $\mu \in U(0,\delta)$ existuje právě jeden hyperbolický stacionární bod $x(\mu) \in U(0,\Delta)$ rovnice $x' = f(x,\mu)$. Navíc $x(\mu)$ má stále stejný typ stability a funkce $\mu \mapsto x(\mu)$ je třídy $\mathcal{C}^1$.*

Důkaz. Tuto větu dokážeme aplikací věty o implicitně zadaných funkcí (VIF) ze základního kurzu matematické analýzy. Ověřme předpoklady:

- $f(x,\mu) \in \mathcal{C}^1$
- $f(0,0) = 0$
- $\nabla_x f(0,0) = A$ regulární $(Re\lambda \neq 0\ \forall \lambda \in \sigma(A))$

Pak podle VIF existují okolí V bodu μ_0 a okolí W bodu x_0 taková, že pro každé $\mu \in V$ existuje právě jedno $x \in W$ s vlastností $f(x,\mu) = 0$, tedy ekvivalentně $x = x(\mu)$. Funkce $\mu(\cdot)$ je také třídy $\mathcal{C}^1$. Okolí V, W odpovídají příslušným okolím ze zadání.

Zbývá dokázat hyperbolicita. Zkoumejme linearizovanou stabilitu. Označme p_μ charakteristický polynom matice $\nabla_x f(x(\mu),\mu)$. Pro $\mu \to 0$ se koeficienty charakteristického polynomu p_μ blíží koeficientům charakteristickému polynomu matice A. Pak podle Lemmatu 19.1 se k sobě blíží i kořeny polynomů a jelikož jsou reálné hodnoty kořenů jednoho polynomu nenulové, musí totéž platit i pro kořeny druhého polynomu. ☐

Poznámka 19.5. Z poznámky 19.3 a Věty 19.1 plyne, že nutnou podmínkou bifurkace je přítomnost nehyperbolického stacionárního bodu.

Lemma 19.2 (O vydělení). *Buď $k \in \mathbb{N}$ a mějme funkci $h(x,\lambda) \in \mathcal{C}^k$ splňující $h(0,\lambda) = 0$ lokálně na okolí bodu $(0,0)$. Pak existuje funkce $H(x,\lambda) \in \mathcal{C}^{k-1}$ na okolí bodu $(0,0)$ taková, že $h(x,\lambda) = xH(x,\lambda)$ a navíc platí:*

$$\begin{aligned}
H(0,0) &= \partial_x h(0,0) && \textit{pro } k \geq 1\\
\partial_x H(0,0) &= \frac{1}{2}\partial^2_{xx} h(0,0) && \\
\partial_\lambda H(0,0) &= \partial^2_{x\lambda} h(0,0) && \textit{pro } k \geq 2\\
\partial^2_{xx} H(0,0) &= \frac{1}{3}\partial^3_{xxx} h(0,0) && \textit{pro } k \geq 3
\end{aligned}$$

Důkaz. Zadefinujme funkci H vztahem

$$H(x,\lambda) := \int_0^1 \partial_x h(\sigma x,\lambda)\, d\sigma.$$

Ověřme správnost definice, tedy podmínku ze zadání:

$$\begin{aligned}
xH(x,\lambda) &= \int_0^1 x\partial_x h(\sigma x,\lambda)\, d\sigma = \int_0^1 \partial_\sigma h(\sigma x,\lambda)\, d\sigma\\
&= h(x,\lambda) - h(0,\lambda) = h(x,\lambda)
\end{aligned}$$

Integrand je spojitý, integruje se přes omezený interval, máme tedy konstantní integregrovatelnou majorantu. Můžeme tedy zaměňovat parciální derivace a integrál. Počítejme:

$$
\begin{aligned}
H(0,0) &= \int_0^1 \partial_x h(0,0)\,d\sigma = \partial_x h(0,0)\\
\partial_x H(x,\lambda) &= \int_0^1 \partial^2_{xx} h(\sigma x,\lambda)\sigma\,d\sigma\\
\partial_x H(0,0) &= \int_0^1 \partial^2_{xx} h(0,0)\sigma\,d\sigma = \partial^2_{xx} h(0,0)\int_0^1 \sigma\,d\sigma =\\
&= \frac{1}{2}\partial^2_{xx} h(0,0)
\end{aligned}
$$

Analogickým derivováním dospějeme ke zbylým vztahům. □

Věta 19.2. *Mějme funkci $f{:}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^2$ na okolí bodu $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Nechť dále platí*

$$
\begin{aligned}
f(0,0) &= 0, & \partial_x f(0,0) &= 0,\\
\partial_\mu f(0,0) &\neq 0, & \partial^2_{xx}(0,0) &\neq 0.
\end{aligned}
$$

Pak rovnice $x' = f(x,\mu)$ má v bodě $(0,0)$ bifurkaci typu sedlo-uzel.

Důkaz. Aplikujme VIF na funkci $f(x,\mu)$. Ověřme předpoklady:

- $f \in \mathcal{C}^2$
- $f(0,0) = 0$
- $\nabla_\mu f(0,0) \neq 0$

Existuje tedy $\mathcal{C}^2$ funkce $x \mapsto \mu(x)$ z okolí $U(0,\delta)$ do $U(0,\Delta)$ pro vhodné kladné konstanty δ, Δ, kde grafem $\mu(x)$ jsou řešení rovnice $f(x,\mu) = 0$ na $U(0,\delta) \times U(0,\Delta)$. Vyšetřeme průběh $\mu(x)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(x,\mu(x)) &= \partial_x f(x,\mu(x)) + \partial_\mu f(x,\mu(x))\mu'(x) = 0\\
\mu'(0) &= -\frac{\partial_x f(0,0)}{\partial_\mu f(0,0)} = 0\\
\frac{d^2}{dx^2} f(x,\mu(x)) &= \partial^2_{xx} f(x,\mu(x)) + 2\partial^2_{x\mu} f(x,\mu(x))\mu'(x) +\\
&\quad + \partial^2_{\mu\mu} f(x,\mu(x))(\mu'(x))^2 + \partial_\mu f(x,\mu(x))\mu''(x) = 0\\
\mu''(0) &= -\frac{\partial^2_{xx} f(0,0)}{\partial_\mu f(0,0)} \neq 0
\end{aligned}
$$

Tedy $\mu(x)$ má extrém v bodě $(0,0)$, ovšem konvexita se nemění. To odpovídá bodu bifurkace sedlo-uzel. □

Věta 19.3. *Mějme funkci $f{:}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^2$ na okolí bodu $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Nechť dále platí*

$$
\begin{aligned}
f(0,0) &= 0 & f(0,\mu) &= 0 \quad \forall \mu \in U(O,\widetilde{\delta})\\
\partial_x f(0,0) &= 0 & \partial_\mu f(0,0) &= 0\\
\partial^2_{xx}(0,0) &\neq 0 & \partial^2_{x\mu} f(0,0) &\neq 0
\end{aligned}
$$

Pak rovnice $x' = f(x,\mu)$ má v bodě $(0,0)$ transkritickou bifurkaci.

Důkaz. Potřebujeme popsat $f(x,\mu) = 0$. Díky Lemmatu 19.2 si můžeme zjednodušit úlohu tím, že se budeme snažit popsat $F(x,\mu) = 0$, kde $F \in \mathcal{C}^1$ je funkce splňující $f(x,\mu) = xF(x,\mu)$. Aplikujeme VIF:

- $F(x,\mu) \in \mathcal{C}^1$
- $F(0,0) = \partial_x f(0,0) = 0$
- $\partial_\mu F(0,0) = \partial^2_{x\mu} f(0,0) \neq 0$

Pak existuje $\mathcal{C}^1$ funkce $x \mapsto \mu(x)$ z okolí $U(0,\delta)$ do $U(0,\Delta)$ pro vhodné kladné konstanty δ, Δ, kde grafem $\mu(x)$ jsou řešení rovnice $F(x,\mu) = 0$ na $U(0,\delta) \times U(0,\Delta)$. Vyšetřeme průběh $\mu(x)$:

$$\frac{d}{dx} F(x,\mu(x)) = \partial_x F(x,\mu(x)) + \partial_\mu F(x,\mu(x))\mu'(x) = 0$$

$$\mu'(0) = -\frac{\partial_x F(0,0)}{\partial_\mu F(0,0)} = -\frac{\frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(0,0)}{\partial^2_{x\mu} f(0,0)} \neq 0$$

V tomto případě se netriviální řešení $\mu(x)$ opět dostane do bodu $(0,0)$, ovšem zde nemá extrém, tedy pokračuje do protilehlého kvadrantu. Složením s řešením $\mu(x) = 0$ dostáváme bifurkační diagram transkritické bifurkace. □

Věta 19.4. *Mějme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^3$ na okolí bodu $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Nechť dále platí*

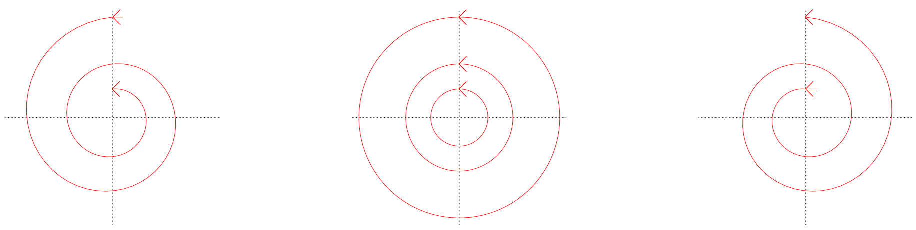
$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 & f(0,\mu) &= 0 \quad \forall \mu \in U(0,\widetilde{\delta}) \\ \partial_x f(0,0) &= 0 & \partial_\mu f(0,0) &= 0 \\ \partial^2_{xx}(0,0) &= 0 & \partial^2_{x\mu} f(0,0) &\neq 0 \\ \partial^3_{xxx}(0,0) &\neq 0 \end{aligned}$$

Pak rovnice $x' = f(x,\mu)$ má v bodě $(0,0)$ vidličkovou bifurkaci.

Důkaz. Sloučíme zde postupy z předešlých dvou důkazů. Nejdříve si pomůžeme Lemmatem 19.2, místo přímého popisu $f(x,\mu) = 0$ se podíváme na $F(x,\mu) = 0$, kde $F \in \mathcal{C}^2$ je funkce splňující $f(x,\mu) = xF(x,\mu)$. Aplikujeme VIF:

- $F(x,\mu) \in \mathcal{C}^2$
- $F(0,0) = 0$
- $\partial_\mu F(0,0) = \partial_{x\mu} f(0,0) \neq 0$

Pak existuje $\mathcal{C}^2$ funkce $x \mapsto \mu(x)$ z okolí $U(0,\delta)$ do $U(0,\Delta)$ pro vhodné konstanty δ, Δ, kde grafem $\mu(x)$ jsou řešení rovnice $F(x,\mu) = 0$ na $U(0,\delta) \times U(0,\Delta)$. Vyšetřeme průběh $\mu(x)$:



Obrázek 19.5: Ztráta stability lineární soustavy

$$\frac{d}{dx}F(x,\mu(x)) = \partial_x F(x,\mu(x)) + \partial_\mu F(x,\mu(x))\mu'(x) = 0$$

$$\mu'(0) = -\frac{\partial_x F(0,0)}{\partial_\mu F(0,0)} = -\frac{\frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(0,0)}{\partial^2_{x\mu} f(0,0)} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}F(x,\mu(x)) &= \partial^2_{xx} F(x,\mu(x)) + 2\partial^2_{x\mu} F(x,\mu(x))\mu'(x)+ \\ &+ \partial^2_{\mu\mu} F(x,\mu(x))(\mu'(x))^2 + \partial_\mu F(x,\mu(x))\mu''(x) = 0\end{aligned}$$

$$\mu''(0) = -\frac{\partial^2_{xx} F(0,0)}{\partial_\mu F(0,0)} = -\frac{\frac{1}{2}\partial^3_{xxx} f(0,0)}{\partial^2_{x\mu} f(0,0)} \neq 0$$

V tomto případě se netriviální řešení $\mu(x)$ opět dostane do bodu $(0,0)$, zde má extrém, tedy pokračuje do sousedního kvadrantu. Složením s řešením $\mu(x) = 0$ dostáváme bifurkační diagram vidličkové bifurkace. □

19.0.4 Hopfova bifurkace

Podívejme se na motivační příklad k této teorii.

Příklad 19.6. Mějme následující systém a prozkoumejme chování řešení.

$$\begin{aligned} x' &= \mu x - y \\ y' &= x + \mu y \end{aligned} \qquad A_\mu = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\sigma(A_\mu) = \{\mu \pm i\}$$

Podívejme se na chování řešení v závislosti na parametru μ:

- $\mu < 0$: stabilní počátek, všechna řešení do něj míří (viz Obr. 19.5(a))
- $\mu = 0$: periodická řešení kolem počátku (viz Obr. 19.5(b))
- $\mu > 0$: nestabilní počátek, všechna řešení míří z něj (viz Obr. 19.5(c))

Věta 19.5 (Hopfova bifurkace)**.** *Mějme funkci* $f(x,y,\mu)\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *třídy* $\mathcal{C}^2$ *na okolí bodu* $(0,0,0)$ *splňující* $f(0,0,\mu) = (0,0)$*. Mějme systém:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = f(x,y,\mu) \tag{19.2}$$

Označme $A_\mu = \nabla_{x,y} f(0,0,\mu)$ a $\sigma(A_\mu) = \{\alpha(\mu) \pm \omega(\mu)\}$. Předpokládejme, že $\alpha, \omega \in \mathcal{C}^2$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) \neq 0$, $\omega(0) > 0$. Pak existují kladné konstanty δ, Δ a $\mathcal{C}^1$ funkce $a \mapsto \mu(a)$; $(0,\delta) \to (-\Delta, \Delta)$ taková, že pro všechna $a \in (0,\delta)$ existuje netriviální periodické řešení (19.2) *procházející bodem $(x_0, y_0) = (a, 0)$ pro $\mu = \mu(a)$.*

Důkaz. Kvůli označení vlastních čísel matice A_μ můžeme BÚNO předpokládat, že systém (19.2) je ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(\mu)x - \omega(\mu)y + f^1(x,y,\mu), \qquad |f^1| = O(x^2+y^2),\\ y' &= \omega(\mu)x + \alpha(\mu)y + f^2(x,y,\mu), \qquad |f^2| = O(x^2+y^2). \end{aligned} \tag{19.3}$$

Převedeme do polárních souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta &= \alpha r\cos\theta - \omega r\sin\theta + \tilde{f}^1(r,\theta,\mu) \\ r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta &= \omega r\cos\theta + \alpha r\sin\theta + \tilde{f}^2(r,\theta,\mu) \\ r' &= \alpha r \underbrace{+\tilde{f}^1\cos\theta + \tilde{f}^2\sin\theta}_{=:R(r,\theta,\mu)} \\ r\theta' &= \omega r \underbrace{-\tilde{f}^1\sin\theta + \tilde{f}^2\cos\theta}_{=:rQ(r,\theta,\mu)} \\ r' &= \alpha r + R(r,\theta,\mu) \qquad R = O(r^2) \\ \theta' &= \omega \quad + Q(r,\theta,\mu) \qquad Q = O(r) \end{aligned} \tag{19.4}$$

Uvažme teď μ blízko 0 a r velmi malé. Pak platí následující odhady:

- $\omega(\mu) \geq \frac{1}{2}\omega(0) > 0 \qquad \{\omega(0) > 0\}$
- $|Q| \leq \frac{1}{4}\omega(0) \qquad \{\omega$ nezávisí na r, Q ano$\}$

Dosazením do (19.4) dostáváme $\theta' \geq \frac{1}{4}\omega(0) > 0$. θ je rostoucí funkce, tedy i prostá. Můžeme provést záměnu za časovou proměnnou (tj. $t \leftrightarrow \theta(t)$). Máme také $r = r(\theta)$.

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{\alpha(\mu)r + R(r,\theta,\mu)}{\omega(\mu) + Q(r,\theta,\mu)} = (\alpha r + R)\,\frac{1}{\omega}\,\frac{1}{1+\omega^{-1}Q} = \\ &= \left(\frac{\alpha r}{\omega} + \frac{R}{\omega}\right)\left(1 - \omega^{-1}Q + (\omega^{-1}Q)^2 - \dots\right) = \\ &= \frac{\alpha(\mu)}{\omega(\mu)}r + P(r,\theta,\mu) \qquad P = O(r^2) \end{aligned}$$

Označme $\lambda = \alpha/\omega$:

$$\frac{dr}{d\theta} = \lambda(\mu)r + P(r,\theta,\mu) \tag{19.5}$$

Vlastnosti:

$$
\begin{aligned}
&P(0,\theta,\mu)=0 && \{P=O(r^2)\} && \text{(VL1)}\\
&\partial_r P(0,\theta,\mu)=0 && \{P=O(r^2)\} && \text{(VL2)}\\
&\partial^2_{r\mu} P(0,\theta,\mu)=0 && \{\text{(VL2)}\} && \text{(VL3)}\\
&P \text{ je } 2\pi\text{-periodická vůči } \theta && \{Q,R,P \text{ závisí na } \cos\theta,\sin\theta\} && \\
&\lambda(0)=0 && \{\text{z předpokladů na } \alpha,\omega\} && \text{(VL4)}\\
&\lambda'(0)=\frac{\alpha'(0)}{\omega(0)}\neq 0 && \{\text{z předpokladů na } \alpha,\omega\} && \text{(VL5)}
\end{aligned}
$$

Klíčové pozorování: Najdeme periodické řešení systémů (19.3) nebo (19.4) právě tehdy, když je r 2π-periodické řešení (19.5), tj. $r(0)=r(2\pi)$. Označme $\hat{r}=\hat{r}(\theta,a,\mu)$ jako řešení (19.5) s počáteční podmínkou $r(0)=a$. Dále na chvíli zafixujeme u systému (19.5) všechny složky kromě proměnné θ, podle které řešíme tuto diferenciální rovnici. Aplikujme tedy variaci konstant:

$$
\begin{aligned}
r' &= \lambda r + P(\theta) \qquad / \cdot e^{-\lambda\theta}\\
(re^{-\lambda\theta})' &= P(\theta)e^{-\lambda\theta},\\
r(\theta)e^{-\lambda\theta} &= a + \int_0^\theta e^{-\lambda s}P(s)\,ds,
\end{aligned}
$$

Požadovaná rovnost $r(2\pi)=r(0)=a$ je ekvivalentní:

$$
0=\underbrace{a(1-e^{-\lambda(\mu)2\pi})+\int_0^{2\pi} e^{-\lambda(\mu)s}P(\hat{r}(s,a,\mu),s,\mu)\,ds}_{h(a,\mu)}.
$$

Vlastnosti:

$$
\begin{aligned}
&\hat{r}(\theta,0,\mu)\equiv 0 && \{\text{díky jednoznačnosti řešení}\}, && \text{(VL6)}\\
&\partial_\mu \hat{r}(\theta,0,\mu)\equiv 0. && && \text{(VL7)}
\end{aligned}
$$

Užijme Lemma 19.2. Chceme vyloučit $a=0$, což je počátek, tj. triviální periodické řešení. Ověřme předpoklady:

- $h\in\mathcal{C}^2$
- $h(0,\mu)\equiv 0 \qquad \{\text{(VL6)}\}$

Existuje tedy $H(a,\mu)\in\mathcal{C}^1$ splňující $h(a,\mu)=aH(a,\mu)$ a platí:

- $H(0,0)=\partial_a h(0,0)$
- $\partial_\mu H(0,0)=\partial^2_{a\mu}h(0,0)$

Cílovým krokem je aplikace VIF na H v okolí bodu $(0,0)$. Ověřme předpoklady VIF:

- $H\in\mathcal{C}^1$

- $$\partial_a h(a,\mu) = (1 - e^{-\lambda(\mu)2\pi}) + \int_0^{2\pi} e^{-\lambda(\mu)s} \partial_r P(\hat{r}(s,a,\mu),s,\mu)\partial_a \hat{r}(s,a,\mu)\,ds$$

$$H(0,0) = \partial_a h(0,0) = 0 \qquad \{(\text{VL4}),(\text{VL6})\}$$

$$\begin{aligned}\partial^2_{a\mu} h(a,\mu) = {} & 2\pi\lambda'(\mu)e^{-\lambda(\mu)2\pi} + \\ & + \int_0^{2\pi} -\lambda'(\mu)se^{-\lambda(\mu)s}\partial_r P(\hat{r}(s,a,\mu),a,\mu)\partial_a\hat{r}(s,a,\mu) + \\ & + e^{-\lambda(\mu)s}\partial^2_{rr}P(\hat{r}(s,a,\mu),s,\mu)\partial_a\hat{r}(s,a,\mu)\partial_\mu\hat{r}(s,a,\mu) + \\ & + e^{-\lambda(\mu)s}\partial^2_{r\mu}P(\hat{r}(s,a,\mu),s,\mu)\partial_a\hat{r}(s,a,\mu) + \\ & + e^{-\lambda(\mu)s}\partial_r P(\hat{r}(s,a,\mu),s,\mu)\partial^2_{a\mu}\hat{r}(s,a,\mu)\,ds\end{aligned}$$

$$\partial_\mu H(0,0) = \partial^2_{a\mu}h(0,0) = 2\pi\lambda'(0) \neq 0$$
$$\{(\text{VL2}),(\text{VL3}),(\text{VL5}),(\text{VL6}),(\text{VL7})\}$$

Tedy aplikací VIF dostáváme existenci $\delta, \Delta > 0$ a $\mathcal{C}^1$ fce takové, že $a \mapsto \mu(a); (-\delta,\delta) \to (-\Delta,\Delta)$. Dvojice $(a,\mu(a))$ je jediné řešení $H(a,\mu) = 0$ v $(-\delta,\delta) \times (-\Delta,\Delta)$. □

Věta 19.6 (2. Hopfova věta)**.** *Nechť jsou splněny předpoklady Hopfovy Věty* (19.5)*, nechť navíc*

$$A_0 = \nabla_{x,y} f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Potom existuje hladká (obecně nelineární) záměna souřadnic taková, že v polárních souřadnicích má systém tvar

$$r' = d\mu r + ar^3 + O(r^5)$$

přičemž pro r, μ malá můžeme členy pátého a vyšších řádu zanedbat[1]*. Navíc $d = \alpha'(0)$ a*

$$\begin{aligned}16a = f^1_{xxx} + f^1_{xyy} + f^2_{xxy} + f^2_{yyy} + \frac{1}{\omega_0}\Big[& f^1_{xy}(f^1_{xx} + f^1_{yy}) \\ & - f^2_{xy}(f^2_{xx} + f^2_{yy}) - f^1_{xx}f^2_{xx} + f^1_{yy}f^2_{yy}\Big] \text{ *celé v bodě* } (0,0,0). \quad (19.6)\end{aligned}$$

[1]zanedbat v tom smyslu, že původní systém se chová kvalitativně stejně jako rovnice $r' = d\mu r + ar^3$, pokud $a \neq 0$