$$(1)\quad \begin{aligned} x' &= Ax + f(x,y) \qquad x \in \mathbb{R}^n \ (\text{„centrální"}) \\ y' &= By + g(x,y) \qquad y \in \mathbb{R}^m \ (\text{„stabilní"}) \end{aligned}$$

<u>Předp.</u> $x \cdot Ax \geq -\varepsilon |x|^2$ $\qquad (\Leftarrow \operatorname{Re}\sigma(A) \geq 0)$

$\|e^{tB}\| \leq c_0\, e^{-t/\beta},\ t \geq 0$ $\qquad (\Leftarrow \operatorname{Re}\sigma(B) < 0)$

$f, g = 0$ v $(0,0)$

$|f|, |g| \leq \rho$, $\operatorname{Lip} f, g \leq \sigma$ v $\mathbb{R}^{n+m}$

<u>Cíl</u>: $\exists\, \phi \in \mathcal{X}$ splňující (INV) (tzv. „centrální varieta")

kde: $\mathcal{X} = \{\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m;\ \phi(0) = 0,\ |\phi| \leq b,\ \operatorname{Lip}\phi \leq \ell\}$

(INV) $(x(t), y(t))$ řeší (1), $y(0) = \phi(x(0)) \Rightarrow y(t) = \phi(x(t))\ \forall t$

$\Leftrightarrow$ graf $\phi = \{(x,y);\ y = \phi(x)\}$ je invariantní vůči (1)

<u>**L. 20.1**</u> $\phi \in \mathcal{X}$ splní (INV) $\Leftrightarrow$ ϕ splní (RED), kde

(RED) $p(t)$ řeší (2) $p' = Ap + f(p, \phi(p))$ („redukovaná rce")

$\Rightarrow (x(t), y(t)) := (p(t), \phi(p(t)))$ řeší (1)

<u>dk.</u> „$\Rightarrow$" nechť $p(t)$ řeší (2); označ $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ řeší (1)

s poč. podm. $\tilde{x}(0) = p(0)$
$\tilde{y}(0) = \phi(p(0))$

(INV) $\to$ $\tilde{y}(t) = \phi(\tilde{x}(t))\ \forall t$;

spec. $(1)_1$: $\tilde{x}' = A\tilde{x} + f(\tilde{x}, \underbrace{\phi(\tilde{x})}_{=\tilde{y}})$;

tj. $\tilde{x}(t)$ řeší (2) s p.p. $\tilde{x}(0) = p(0)$

jednoznačnost $\to$ $\tilde{x}(t) = p(t)\ \forall t$

$\tilde{y}(t) = \phi(p(t))$, neboli

$(p(t), \phi(p(t)))$ řeší (1), q.e.d.

„$\Leftarrow$" nechť $(x(t), y(t))$ řeší (1), $y(0)=\phi(x(0))$

označ $\tilde p(t)$ řešení (2) s ž.z. $\tilde p(0)=x(0)$

(RED) $\longrightarrow$ $(\tilde p(t), \phi(\tilde p(t)))$ řeší (1) s ž.z. $(\tilde p(0), \phi(\tilde p(0)))$

$= (x(0), \underbrace{\phi(x(0))}_{y(0)})$

jednoznačnost $\rightarrow$ $\tilde p(t) = x(t)$

$\phi(\tilde p(t)) = y(t) \quad \forall t,$

a sedy $y(t)=\phi(p(t))$ $\forall t$, q.e.d.

L.20.2 B jako výše; $f(t)$ spoj., omez. na $(-\infty,0]$

$\Rightarrow \exists!$ řešení rce $y'=By+f(t)$, omez. na $(-\infty,0]$;

navíc: $y(0)=\int_{-\infty}^{0} e^{-sB} f(s)\,ds$.

dk. obecné řeš. (v.k.): $y(t)=e^{tB}y(0)+\int_0^t e^{(t-s)B} f(s)\,ds$

$\Leftrightarrow \quad e^{-tB}y(t) = y(0) + \int_0^t e^{-sB} f(s)\,ds$

1. nechť $|y(t)|\le C$ na $(-\infty,0]$; pak

$|e^{-tB}y(t)| \le \|e^{-tB}\|\,|y(t)| \le C_0 e^{\beta t} C \to 0,\ t\to -\infty$

$|e^{-sB}f(s)| \le C_0 e^{\beta s} K \in L^1(-\infty,0)$

$\Rightarrow$ LS $\to 0$; integrál vpravo konverguje pro $t\to-\infty$

$y(0) = -\int_0^{-\infty}\dots = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} f(s)\,ds \Rightarrow$ nutný tvar $y(0)$,

jednoznačnost

2. existence? polož $y(0)=\int_{-\infty}^{0} e^{-sB} f(s)\,ds$; pak z v.k.

$y(t)=e^{tB}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{-sB} f(s)\,ds\right\} + \int_0^t e^{(t-s)B} f(s)\,ds = \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)B} f(s)\,ds$

odtud $|y(t)| \le \int_{-\infty}^{t} |\quad|\,ds \le C_0 K \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-s)}\,ds = \frac{C_0 K}{\beta}$; $\forall t\le 0$.

L.20.3. $\phi \in \mathcal{X}$ splní (INV) $\Leftrightarrow$ ϕ splní (PB), kde

(PB) $$\phi(p_0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} g(p(s), \phi(p(s)))\, ds \quad \forall p_0 \in \mathbb{R}^n$$

kde $p(\cdot)$ znovu je řešení (2) s.p.p. p_0.

---

dk. stačí ukázat (RED) $\Leftrightarrow$ (PB) (L.20.1: (RED) $\Leftrightarrow$ (INV))

„$\Rightarrow$" nechť $p_0 \in \mathbb{R}^n$ je libovolné, $p(t)$ .. řešení (2), $p(0) = p_0$

(RED) $\to$ $(p(t), \phi(p(t)))$ řeší (1), speciálně

$$(\phi(p))' = B\phi(p) + g(p, \phi(p));$$

neboli $y(t) := \phi(p(t))$ řeší $y' = By + \gamma(t)$,

kde $\gamma(t) = g(p(t), \phi(p(t)))$.

zjevně $y(t)$, $\gamma(t)$ spoj., omez. na $(-\infty, 0]$ (ϕ, g glob. omez.)

L.20.2 $\to$ $$y(0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} \gamma(s)\, ds\ ; \text{ neboli}$$

$$\phi(\underbrace{p(0)}_{p_0}) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} g(p(s), \phi(p(s)))\, ds\ ; \text{ tj. (PB)}.$$

„$\Leftarrow$" nechť $p(t)$ řeší (2) $\overset{?}{\Rightarrow}$ $(p(t), \phi(p(t)))$ řeší (1)

Pozorování: (PB) $\to$ $$\phi(p(t_1)) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} g(p(t_1+s), \phi(p(t_1+s)))\, ds$$

pro $\forall t_1 \in \mathbb{R}$, $\forall p(\cdot)$ řešení (2).

dk. Poz: $t_1 = 0$: přímo (PB)

obecně označ $p_1(\cdot) = p(\cdot + t_1)$; zjevně $p_1(\cdot)$

řeší (2) (autonomní rce!); $p_1(0) = p(t_1)$

a opět užij (PB) pro $t = 0$, $p(\cdot) = p_1(\cdot)$.

označme $\tilde{y}(t)$ řešení $y' = By + \varkappa(t)$ s.z.z. $y(0) = \phi(p(0))$

kde $\varkappa(t) = g(p(t), \phi(p(t)))$.

(PB) $\rightarrow$ $\tilde{y}(0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} \varkappa(s)\, ds$; dle L. 20.2 je $\tilde{y}(t)$

omezené na $(-\infty, 0]$.

$t_1 \in \mathbb{R}$ libovolné: $\tilde{y}_1(t) = \tilde{y}(t_1 + t)$ též omez. na $(-\infty, 0]$

zjevně $\tilde{y}_1(t)$ řeší $y' = By + \varkappa(t_1 + t)$, což dle L. 20.2

$$\tilde{y}_1(0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} \varkappa(t_1 + s)\, ds \text{ ; nyní rozbor:}$$

LS: $\tilde{y}_1(0) = \tilde{y}(t_1)$:

PS: $\int_{-\infty}^{0} e^{-sB} g(p(t_1+s), \phi(p(t_1+s)))\, ds \overset{\text{Pozorování}}{=} \phi(p(t_1))$,

tedy: $\tilde{y}(t_1) = \phi(p(t_1))$; $t_1 \in \mathbb{R}$ libovolné.

z rovnic pro $p(t)$, $\tilde{y}(t)$ vidíme: $(p(t), \underbrace{\phi(p(t))}_{= \tilde{y}(t)})$ řeší (1), q.e.d.

Věta 20.1. Nechť $\frac{c_0 \rho}{\beta} \leq b$, $\frac{c_0 \sigma(1+l)}{\beta - \varepsilon - \sigma(1+l)} \leq l$,

$c_0 \sigma \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1+l}{\beta - \varepsilon - \sigma(2+l)} \right) < 1$. Pak $\exists! \phi \in \mathcal{X}$, splňující (INV).

Dodatek 1 $f, g \in C^k$ + další nerovnosti $\Rightarrow \phi \in C^k$

Dodatek 2 $dg(0,0) = 0 \Rightarrow d\phi(0) = 0$ (totální diferenciál).

Pozn. $\varepsilon, c_0, \beta > 0$ (možno $\varepsilon = 0$) ... vlastnosti A, B

$b, l > 0$ ... definice $\mathcal{X}$

$\Rightarrow \exists\ \rho, \sigma > 0$ malé (odhady f, g) t.ž. V. 20.1. lze použít dk. V. 20.1 : L. 20.1 + 20.3: $\phi \in \mathcal{X}$ splní (INV) $\Leftrightarrow$

ϕ je pevný bod operátoru : $\phi \longmapsto T\phi$, kde

$$T\phi(p_0) := \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} g(p(s), \phi(p(s)))\, ds ,$$

kde $p(\cdot)$ řeší (2) $p' = Ap + f(p, \phi(p))$

$p(0) = p_0$

strategie důkazu: Banachova věta o kontrakci.

i) $\mathcal{X}$ -- úplný metr. pr.: uzavř. podmn. $C_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$;

normu $\|\phi\|_{\mathcal{X}} = \sup_{p_0} |\phi(p_0)|$;

připomeň, že $\mathcal{X} = \{\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m ;\ \phi(0) = 0,\ |\phi| \le b,\ \mathrm{Lip}\,\phi \le \ell\}$

ii) $T\mathcal{X} \subset \mathcal{X}$? $p_0 = 0 \to$ řešení (2) $p(t) \equiv 0$, tedy

$$T\phi(0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} g(0, \phi(0))\, ds = 0$$; dále pro $\forall p_0 \in \mathbb{R}^n$

$$|T\phi(p_0)| \le \int_{-\infty}^{0} |e^{-sB} g(p(s), \phi(p(s)))|\, ds \le \int_{-\infty}^{0} c_0 e^{\beta s} \rho\, ds = \boxed{\frac{c_0 \rho}{\beta} \le b}$$

Zbývá : $\mathrm{Lip}(T\phi) \le \ell$; $\mathrm{Lip}\, T < 1$; důkaz viz dále.

Pomocné odhady:

(P1) $y' \ge -ay - c \quad \forall t \le 0 \implies y(t) \le e^{-at}\left(y(0) + \frac{c}{a}\right) \forall t \le 0$

(kde $a, c > 0$) dk. viz. e^{at} ; $\int_t^0 d\tau, \dots$

(P2) $\left|\underset{g}{f}(p, \phi(p)) - \underset{g}{f}(q, \phi(q))\right| \le \sigma(1+\ell)|p-q|$

(P3) $|f(p, \phi(p)) - f(q, \psi(q))| \le \sigma\left((1+\ell)|p-q| + \|\phi - \psi\|_{\mathcal{X}}\right)$

dk.: $\pm f(q, \phi(p))$ $\quad \forall p, q \in \mathbb{R}^n,\ \phi, \psi \in \mathcal{X}$

odhad Lip $J\phi$: $p_0, q_0 \in \mathbb{R}^n$, $\phi \in \mathcal{X}$ dáno

$$J\phi(p_0) - J\phi(q_0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB}\{g(p(s),\phi(p(s))) - g(q(s),\phi(q(s)))\}\,ds$$

kde $p(t)$ řeš. (2) s.p.p. $p(0)=p_0$

$q(t)$ —"— —"— $q(0)=q_0$

odhad pro $r(t):= p(t)-q(t)$: zkus

$$r' = Ar + f(p,\phi(p)) - f(q,\phi(q)) \quad /\cdot r$$

$$r\cdot r' = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|r|^2 = r\cdot Ar + r\cdot\big(f(p,\phi(p)) - f(q,\phi(q))\big)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|r|^2 \geq -\varepsilon|r|^2 - \sigma(1+\ell)|r|^2$$

dle (P2); tj.: $\frac{d}{dt}|r|^2 \geq -a|r|^2$; $a = 2(\varepsilon+\sigma(1+\ell))$

tedy dle (P1) : $|r(t)|^{\cancel{2}} \leq e^{-\cancel{2}(\varepsilon+\sigma(1+\ell))t}|p_0-q_0|^{\cancel{2}}$; $t\leq 0$

$$\to |J\phi(p_0) - J\phi(q_0)| \leq \int_{-\infty}^{0} \|e^{-sB}\|\cdot\underbrace{|g(p(s),\phi(p(s))) - g(q(s),\phi(q(s)))|}_{\leq\, \sigma(1+\ell)|r(s)|,\ (P2)}\,ds$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} C_0 e^{\beta s}\cdot\sigma(1+\ell)\cdot|r(s)|\,ds$$

$$\leq C_0\sigma(1+\ell)\int_{-\infty}^{0} e^{(\beta-\varepsilon-\sigma(1+\ell))s}\,ds$$

$$= \boxed{\frac{C_0\sigma(1+\ell)}{\beta-\varepsilon-\sigma(1+\ell)} \leq \ell}$$

odhad Lip J : $p_0 \in \mathbb{R}^n$, $\phi, \psi \in \mathcal{X}$ dáno:

$$J\phi(p_0) - J\psi(p_0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB}\{g(p(s),\phi(p(s))) - g(q(s),\psi(q(s)))\}\,ds$$

kde $p(t)$ řeší $p' = Ap + f(p,\phi(p))$, $p(0) = p_0$

$q(t)$ řeší $q' = Aq + f(q,\psi(q))$, $q(0) = p_0$

odhad pro $r(t) = p(t) - q(t)$: $r' = Ar + f(p,\phi(p)) - f(q,\psi(q))$

$$r(0) = 0$$

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}|r|^2 = r\cdot r' = r\cdot Ar + r\cdot\big(f(p,\phi(p)) - f(q,\psi(q))\big)$$

$$\geq -\varepsilon|r|^2 - |r|\cdot|(\ldots)| \quad ; \quad \text{kde z (P3)}:$$

$$|r|\cdot|(\ldots)| \leq |r|\cdot\sigma\big((1+\ell)|r| + \|\phi-\psi\|_{\mathcal{X}}\big)$$

$$\leq \sigma(1+\ell)|r|^2 + \underbrace{\sigma|r|\cdot\|\phi-\psi\|_{\mathcal{X}}}_{\leq \sigma(|r|^2 + \|\phi-\psi\|^2_{\mathcal{X}})\cdot\cancel{\frac{1}{2}}} \quad \text{(Young)}$$

celkem:
$$\frac{d}{dt}|r|^2 \geq -2a|r|^2 - \sigma\|\phi-\psi\|^2_{\mathcal{X}}, \quad a = \varepsilon + \sigma(2+\ell)$$

dle (P1): $$|r(t)|^2 \leq \overbrace{\frac{\sigma}{\varepsilon+\sigma(2+\ell)}}^{\leq 1}\|\phi-\psi\|^2_{\mathcal{X}}\cdot e^{-2(\varepsilon+\sigma(2+\ell))t} \quad \forall t \leq 0.$$

odtud: $$|J\phi(p_0) - J\psi(p_0)| \leq \int_{-\infty}^{0} C_0 e^{\beta s}\sigma\big((1+\ell)\underbrace{|r(s)|}_{\leq \|\phi-\psi\|_{\mathcal{X}} e^{-(\varepsilon+\sigma(2+\ell))s}} + \|\phi-\psi\|_{\mathcal{X}}\big)\,ds$$

$$\leq \|\phi-\psi\|_{\mathcal{X}}\cdot \underbrace{C_0\sigma\cdot\int_{-\infty}^{0}(1+\ell)e^{(\beta-\varepsilon-\sigma(2+\ell))s} + e^{\beta s}\,ds}$$

$$\boxed{C_0\sigma\left(\frac{1+\ell}{\beta-\varepsilon-\sigma(2+\ell)} + \frac{1}{\beta}\right) < 1}$$

Dodatek 2

cíl: $\frac{g(x,y)}{|x|+|y|} \to 0$, $(x,y)\to(0,0)$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\frac{\phi(p_0)}{|p_0|} \to 0$, $p_0 \to 0$

víme: $\phi(p_0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} g(p(s), \phi(p(s)))\,ds$; kde $p(t)$ řeší (2)

s z.z. $p(0)=p_0$

odhad: $|p(t)| \le e^{-(\varepsilon+\sigma(1+\ell))t} |p_0|$; $t \le 0$; viz výše (s. 6)

$$\frac{|\phi(p_0)|}{|p_0|} \le \int_{-\infty}^{0} |\dots| \frac{ds}{|p_0|} \le \int_{-\infty} \underbrace{C_0 e^{\beta s} \frac{|g(p(s), \phi(p(s)))|}{|p_0|}}_{=: h(p_0,s)} ds$$

ukážu: $\to 0$, $|p_0| \to 0$, dle Leb. věty.

$$|h(p_0,s)| = C_0\, e^{\beta s} \frac{|g(p(s), \phi(p(s)))|}{|p(s)|+|\phi(p(s))|} \cdot \frac{|p(s)|+|\phi(p(s))|}{|p_0|}$$

$$\le C_0\, e^{\beta s} \cdot \sigma \cdot e^{-(\varepsilon+\sigma(1+\ell))s} \in L^1(-\infty,0)$$

a zjevně: $s<0$ pevné: ; $p_0 \to 0 \Rightarrow |p(s)|+|\phi(p(s))| \to 0$,

a tedy: $\frac{|g(p(s), \phi(p(s)))|}{|p(s)|+|\phi(p(s))|} \to 0$ dle dod. předpokladu

tj. $h(p_0,s) \to 0$

Def. $\mathcal{K} = \{X=(x,y)\in \mathbb{R}^{n+m};\ |y|\le \mu|x|\}$ „kužel"

$\mathcal{V} = \{X=(x,y)\in \mathbb{R}^{n+m};\ |y|\ge \mu|x|\}$ a jeho „stín"

obecněji $\mathcal{K}(X_0)=\{X,\ X-X_0\in\mathcal{K}\}$

$\mathcal{V}(X_0)=\{X;\ X-X_0\in\mathcal{V}\}$

L.20.4. $\mu>0$ dáno, σ = lip f,g malé $\Rightarrow$

1. (pozitivní kuželové invariance): X_1, X_2 řeší (1), $X_1(0)\in\mathcal{K}(X_2(0))$
$\Rightarrow X_1(t)\in\mathcal{K}(X_2(t))\quad \forall t\ge 0$

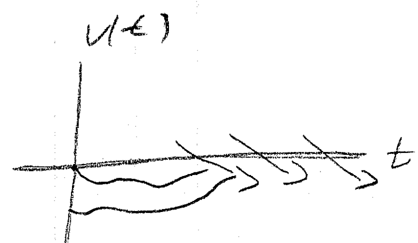
2. (exponenciální stabilita stínu): X_1, X_2 řeší (1), $X_1(t)\in\mathcal{V}(X_2(t))$
pro $\forall t\in I$ (interval) $\Rightarrow |X_1(t)-X_2(t)|\le c\, e^{-\gamma(t-s)}|X_1(s)-X_2(s)|$
pro $\forall\, t>s\in I$.

dk. $X_1=(x_1,y_1)$, $X_2=(x_2,y_2)$ ... $\tilde{x}=x_1-x_2$
$\tilde{y}=y_1-y_2$

$$(1)\Rightarrow\quad \tilde{x}'=A\tilde{x}+f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)$$
$$\tilde{y}'=B\tilde{y}+g(x_1,y_1)-g(x_2,y_2)$$

budeme užívat odhady: $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le\sigma(|\tilde{x}|+|\tilde{y}|)$
$\quad(g)\qquad\quad(g)$

ad 1. označ $V(t)=|\tilde{y}(t)|^2-\mu^2|\tilde{x}(t)|^2$



cíl: $V(0)\le 0 \Rightarrow V(t)\le 0\ \forall t\ge 0$;

stačí ukázat: $V(t)=0\Rightarrow V'(t)<0$

výpočet: $V'(t)=\left(|\tilde{y}|^2-\mu^2|\tilde{x}|^2\right)'=2\tilde{y}\cdot\tilde{y}'-2\mu^2\tilde{x}\cdot\tilde{x}'$

$=2\tilde{y}\cdot\left(B\tilde{y}+g(\dots)-g(\dots)\right)-2\mu^2\tilde{x}\cdot\left(A\tilde{x}+f(\dots)-f(\dots)\right)$

$\le -2\beta|\tilde{y}|^2+2\sigma|\tilde{y}|(|\tilde{x}|+|\tilde{y}|)+2\mu^2\varepsilon|\tilde{x}|^2+2\mu^2\sigma|\tilde{x}|(|\tilde{x}|+|\tilde{y}|)$

... je-li $V(t)=0$, pak $|\tilde{y}|=\mu|\tilde{x}|$; tj. dále

$=2|\tilde{x}|^2\left[(-\beta+\varepsilon)\mu^2+\sigma(1+2\mu+\mu^2)\right]=-c|\tilde{x}|^2$

$c > 0$ $\left(\Leftarrow \beta - \varepsilon > 0 ,\ \mu > 0 ,\ \sigma \dots \text{malé} \right)$

$\Rightarrow V'(t) < 0$ (ledaže $|\tilde{x}(t)| = 0$; leč pak $V(t) = 0 \Rightarrow \tilde{y}(t) = 0$
tj. $X_1 \equiv X_2$ ... není co řešit)

ad 2. nechť $|\tilde{y}| \geq \mu |\tilde{x}|$, $t \in I$; pak podobně

$$\frac{d}{dt} |\tilde{y}|^2 = 2 \tilde{y} \cdot \tilde{y}' = 2 \tilde{y} \cdot B \tilde{y} + 2 \tilde{y} \cdot \left(g(\dots) - g(\dots) \right)$$

$$\leq -2 \beta |\tilde{y}|^2 + 2 \sigma |\tilde{y}| \left(|\tilde{x}| + |\tilde{y}| \right) \text{; leč } |\tilde{x}| \leq \mu^{-1} |\tilde{y}|$$

$$\leq -2 |\tilde{y}|^2 \underbrace{\left[\beta - \sigma (1 + \mu^{-1}) \right]}_{\gamma > 0 \text{ (opět } \sigma \text{ malé)}} \leq -2 \gamma |\tilde{y}|^2$$

integrací: $\underbrace{|\tilde{y}(t)|}_{\geq} \leq e^{-\gamma (t-s)} \underbrace{|\tilde{y}(s)|}_{\leq |X_1(s) - X_2(s)|} \quad \forall\, t > s \in I$

$$|\tilde{y}(t)| \geq (1 + \mu^{-1})^{-1} \left(|\tilde{y}| + \mu^{-1} |\tilde{y}| \right) \geq |\tilde{y}| + |\tilde{x}| = |X_1 - X_2| .$$

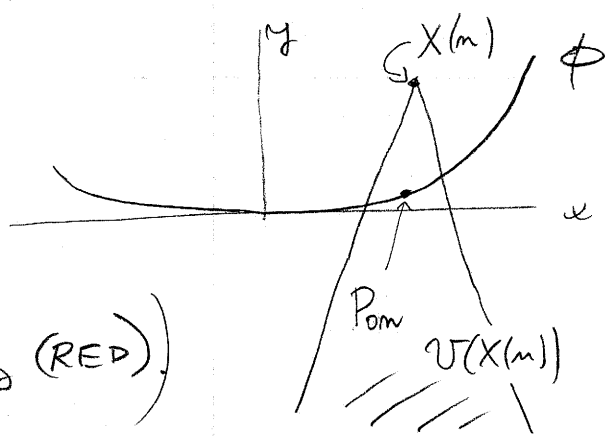
Věta 20.2. (Asymptotická rychlost c.v.) nechť $\mu > l$, σ = lip f, g malé (L. 20.4). Pak pro $\forall\, X(t)$ řešení (1) $\exists\, p(t)$ řešení (2) t.ž. $|X(t) - P(t)| \leq c\, e^{-\gamma t} |X(0) - P(0)|$; $t \geq 0$, kde $P(t) = (p(t), \phi(p(t)))$. navíc: $X(0)$ malé $\Rightarrow P(0)$ (lze volit) malé.

Dk.: pro $n = 1, 2, \dots$ volme $P_{0n} \in$ graf $\phi \cap$ int $U(X(n))$

tj. $P_{0n} = (p_{0n}, \phi(p_{0n}))$; dále označ

$p_n(t)$ ... řešení (2) s p.p. $p(n) = p_{0n}$

$\Rightarrow P_n(t) = (p_n(t), \phi(p_n(t)))$ ... řešení (1) s poč. podm. $P_n(n) = P_{0n}$ (díky (RED))



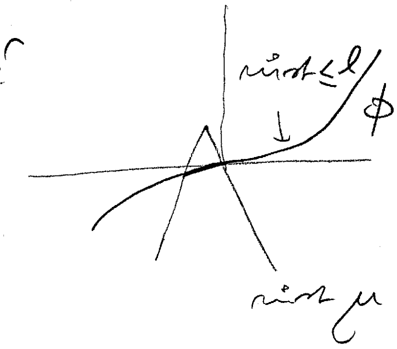
klíčové pozorování: $P_n(t) \in \operatorname{int} \mathcal{V}(X(t))$ $\forall t \in (-\infty, n]$

... neboť ($\mathcal{L}$. 20.4): $\mathcal{K}(X(t))$ je pozitivně invariantní

$\iff$ $\mathcal{K}^c(X(t)) = \operatorname{int} \mathcal{V}(X(t))$ je negativně invariantní.

dále „pozoruji": $M = \mathcal{V}(X(0)) \cap \text{graf}\,\phi$ je omezené

... díky $\mu > \ell$



$\Downarrow$

$\exists$ podposl. (značené stejně) $P_n(0) \to P_0$,

a snadno si rozmyslíme: $p_n(t) \overset{loc}{\rightrightarrows} p(t)$, kde

opět $p(t)$ řeší (2); $P(t) = (p(t), \phi(p(t)))$ řeší (1) a také

s p.p. $p(0) = p_0$ $\quad P(t) \in \mathcal{V}(X(t))$ pro $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{L}$.20.4: $|X(t) - P(t)| \leq c e^{-\gamma t} |X(0) - P(0)|$; $t \geq 0$

---

konec: $X(0) \to 0 \Rightarrow M$ se „stahuje" do $(0,0)$, tedy $P_0 \to 0$

opět z nákresu: $\mu > \ell$.

Důsl. (Redukce stability). $(0,0)$ je (as.) stab. pro (1) $\iff$ 0 (as.) stab. pro (2)

Dk.: několik implikací, ... $(0,0)$ stab. (1) $\Rightarrow$ 0 stab. (2)

0 nestab. (2) $\Rightarrow$ $(0,0)$ nestab. (1)

jasné ... díky (RED) (řešení (2) je zač. řešení (1)).

---

ukažme: 0 (as.) stab. (2) $\Rightarrow$ $(0,0)$ (as.) stab. (1)

nechť $X = (x,y)$ řeší (1), $X(0)$ blízko $(0,0)$ .. dle V. 20.2.

$\exists P(0) \in$ graf ϕ, blízko $(0,0)$, t.ž.

$$|X(t) - P(t)| \leq c e^{-\gamma t} |X(0) - P(0)|.$$

(2) (as.) stab. $\Rightarrow$ $p(t)$ je blízko 0 ($\to 0$) pro $t \to \infty$

$\Rightarrow$ totéž pro $P(t) = (p(t), \phi(p(t)))$

$\Rightarrow$ — " — $X(t)$ díky uv. odhadu výše