

DÚ3

TERMÍN: pátek 13.11.

1. Najděte vlastní čísla (a příslušné vlastní funkce) úlohy

$$x'' + \lambda x = 0 \quad t \in [0, 1]$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(1) + \alpha x(1) = 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

2. Najděte vlastní čísla a příslušné vlastní funkce úlohy

$$(t^2 x')' + \lambda x = 0 \quad t \in [1, 2]$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{cases} x(1) = 0 \\ x(2) = 0 \end{cases}$$

4. Najděte nutnou a postačující podmínku na funkci $f(t)$, aby existovalo řešení úlohy

$$x'' + x = f(t)$$

s okrajovými podmínkami $x(0) = x(\pi) = 0$. Problém řešte:

- (a) přímo, tj. najděte obecné řešení pomocí variace konstant a diskutujte možnost splnění daných okrajových podmínek
- (b) aplikací Lemmatu 17.7 – s přihlédnutím k úloze 1i) výše

3. Určete oblast regulovatelnosti systému

$$\begin{aligned}x' &= xyu \\ y' &= \operatorname{arctg} x - \operatorname{arccotg} y.\end{aligned}$$

Jak, pokud vůbec, se tato množina změní bez požadavku esenciální omezenosti funkce u ?

4. Aniž byste hledali přesná řešení, navrhnete regulační postup (globálně regulovatelného) systému

$$\begin{aligned}x' &= \sin y \\ y' &= x + u.\end{aligned}$$

6. Pro jakou volbu vektoru $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ jsou následující systémy globálně regulovatelné?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} u$$

Matici A volíme postupně jakožto

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zkuste výsledek nejprve uhodnout (resp. odůvodnit intuitivně) na základě chování systému bez regulace (tj. pokud $u = 0$).

7. Ukažte, že rovnice

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = u$$

je globálně regulovatelná.