Pozn.: d.s. abstraktní: označ $\varphi_t := \varphi(t,\cdot)$

(i) $\varphi_0 = Id$

(ii) $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$ tj. $t \longmapsto \varphi_t$

$$\mathbb{R} \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}om(\Omega)}$$

homeomorf. $\Omega \to \Omega$

spec. $(\varphi_t)_{-1} = \varphi_{-t}$

podobné objekty: silné semigrupy
stoch. proc. (martingaly)

Př.: Buď (φ,Ω) d.s., $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oblast,
nechť $\varphi \in C^1$ $\Longrightarrow$ φ je řešící fce

$$\boxed{(1)\quad x' = f(x) \text{ v } \Omega}$$

kde $\boxed{f(y) := \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0,y)}$ $\forall y \in \Omega$.

Dk.: buď $x_0 \in \Omega$ pevné, libov.
označ $x(t) := \varphi(t,x_0)$, $t \in \mathbb{R}$

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ řeš. (1), $x(0) = x_0$.

$$x'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, \varphi(t, x_0)) = f(\underbrace{\varphi(t, x_0)}_{x(t)})$$

víme $x(t+h) = \varphi(t+h, x_0)$

$$= \varphi(h, \varphi(t, x_0))$$

Pozn. terminologie: (φ, Ω) d.s.

$x_0 \in \Omega$ stacionární bod: $\varphi(t, x_0) = x_0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

? stabilní (stac. bod): $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.ž.

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(t, x) - x_0| < \varepsilon$$

pro $\forall t \geq 0$

asympt. stab.: stabilní a navíc:

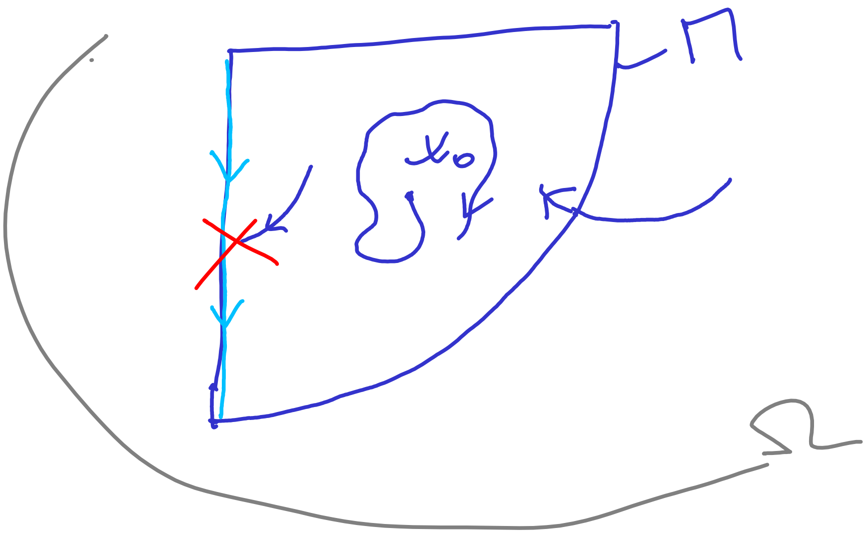
$$\exists \eta > 0 \ \forall x, \ |x - x_0| < \eta \Rightarrow \varphi(t, x) \to x_0, \quad t \to \infty.$$

$\Gamma \subset \Omega$ per. orbit: $\Gamma = \{\varphi(t, x_0), t \in [0, T]\}$

Pozn.: pozitivní invariance: praktické kritérium

(1) $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$, $x \in \Omega$ $\iff$ (φ, Ω)

$M \subset \Omega$? poz. inv. $\Leftarrow$ neprůchodnost hranice



1) $f(x)$ směřuje směrně dovnitř pro $x \in \partial M$

2) ∂M (její část) je samé řešení (jednozn.)

ad Věta 13.2. (φ, Ω) d.s., $x_0 \in \Omega$, $K \subset \Omega$ kompaktní!

$$\omega(x_0) = K \iff \operatorname{dist}(\varphi(t, x_0), K) \to 0 \quad t \to \infty$$

Dk.: „$\Leftarrow$": $\forall \varepsilon > 0\ \exists T > 0\ \forall t \geq T:$

$$\operatorname{dist}(\varphi(t, x_0), K) < \varepsilon$$

$$\iff \exists r \in K \text{ t.ž. } |\varphi(t, x_0) - r| < \varepsilon$$

volme $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$

$\Rightarrow \exists r_k \in K\ \exists t_k$ t.ž.

$$|\varphi(t_k, x_0) - r_k| < \frac{1}{k}$$

BÚNO: $t_k \to \infty$, $r_k \to r \in K$

$$\Rightarrow \underbrace{\varphi(t_k, x_0) \to r}\in K$$

a zároveň: $r \in \omega(x_0)$.

oprava: $y \in \omega(x_0)$ .. tj. $\exists\, t_k \to +\infty$

t.ž. $\underbrace{\varphi(t_k, x_0) \to y}$, $k \to \infty$

BÚNO: $\mathrm{dist}(\varphi(t_k, x_0), K) < \frac{1}{k}$

(t_k velké)

$\exists\, r_k \in K$ t.ž.

$$|\varphi(t_k, x_0) - r_k| < \frac{1}{k}$$

jako výše ... $r_k \to r \in K$, $r = y$

$$\Rightarrow \omega(x_0) \subseteq K$$