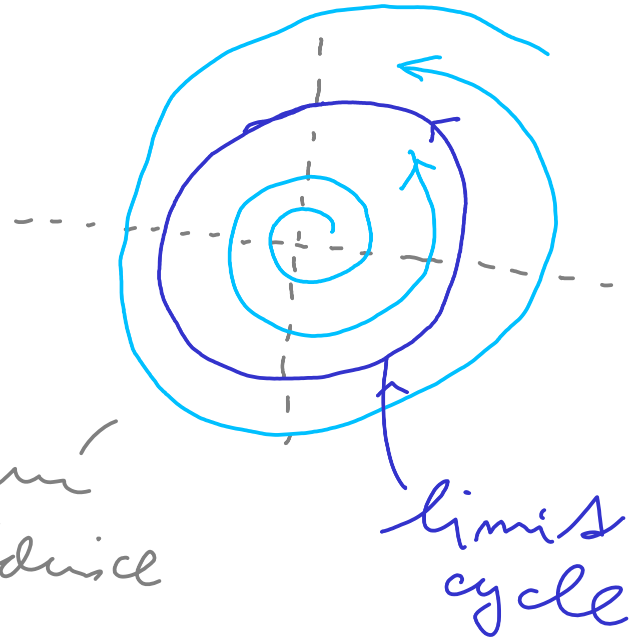
ad (2ii): $\omega(x_0) = S$

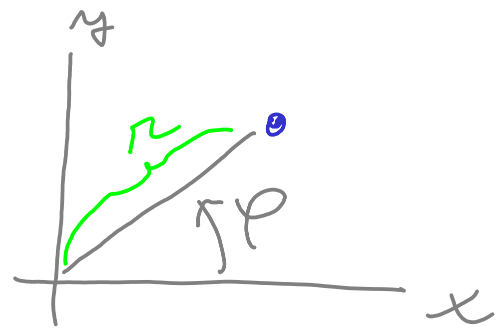


?? rovnice

$$\left[\begin{aligned} r' &= r(1-r^2) \\ \varphi' &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ polární souřadnice}$$

(Poincaré-Bendixon)

$\Downarrow$ kartézské ??



$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right| \frac{d}{dt}$$

$$x' = r'\cos\varphi - r\varphi'\sin\varphi$$
$$y' = r'\sin\varphi + r\varphi'\cos\varphi$$

$\Rightarrow$ $x' = r\cos\varphi(1-r^2) - r\sin\varphi$

$$\boxed{x' = x(1-x^2-y^2) - y}$$

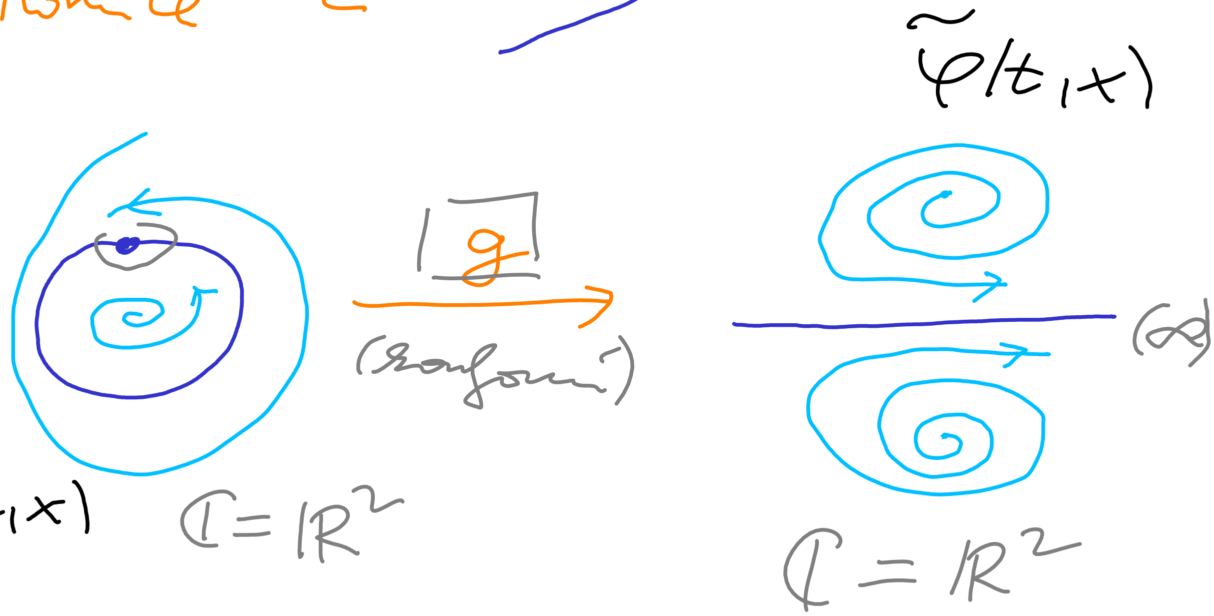
$y' = r(1-r^2)\sin\varphi + r\cos\varphi$

$$\boxed{y' = y(1-x^2-y^2) + x}$$

ad (2 iv) : $\omega(x_0) = \pi$ … přímka

? ⇐ rovnice

možnost:



topologické konjugace

$$\boxed{g(\varphi(t,x_0)) = \tilde\varphi(t, g(x_0))}$$

?! vztah s rovnicím

(1) $x' = f(x) \Rightarrow \varphi$

($\tilde{1}$) $y' = \tilde f(x) \Rightarrow \tilde\varphi$

pozoruji: $x(t)$ řeší (1) $\Leftrightarrow$ $y(t) = g(x(t))$ řeší ($\tilde{1}$)

$\Rightarrow \quad y'(t) = \tilde{f}(y(t)) = \left(g(x(t))\right)'$

$$= \nabla g(x(t))\, x'(t)$$

$$x'(t) = f(x(t))$$

$\Rightarrow \quad \boxed{\tilde{f} \circ g = (\nabla g) f}$

---

ad Věta 13.2, bod 2 $\quad (\varphi, \Omega)$ d.s., $x_0 \in \Omega$

$K \subset \Omega$ kompakt

$\omega(x_0) \neq \emptyset, \ \omega(x_0) \not\subset K$

$\Leftrightarrow \quad \operatorname{dist}(\varphi(t, x_0), K) \to 0$

$t \to +\infty$

Dk: $\Leftarrow$ viz minule

$\Rightarrow$?? $\quad \operatorname{dist}(\varphi(t, x_0), K) \not\to 0$

$t \to +\infty$

tj.: $\exists \varepsilon > 0 \ \exists t_n \to +\infty$

s.t. $\operatorname{dist}(\varphi(t_k, x_0), K) > \varepsilon$

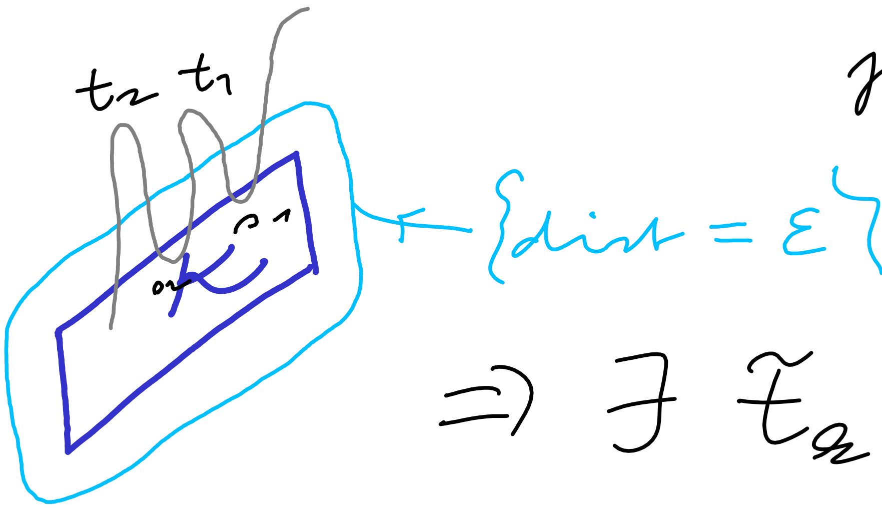
ale: $\exists\, y \in \omega(x_0) \subset K$

tj. $\exists\, s_k \to \infty$ s.t.

$$\varphi(s_k, x_0) \longrightarrow y, \quad k \to \infty$$

BÚNO: $\operatorname{dist}(\varphi(s_k, x_0), K) < \varepsilon$

pro $\forall\, k$



$\Rightarrow \exists\, \tilde{t}_k$ s.t.

$$\operatorname{dist}(\varphi(\tilde{t}_k, x_0), K) = \varepsilon \quad \forall\, k$$

BÚNO: $\varphi(\tilde{t}_k, x_0) \longrightarrow z \in \omega(x_0)$

ale $\operatorname{dist}(z, K) = \varepsilon$

tj. $z \notin K$ ↯

Pozn.: $x \mapsto \operatorname{dist}(x, K)$ spojité,

(d.ú.c.) dokonce 1-lipsch.

Téma: dyn. systémy v ($\mathbb{R}^2$

(viz kapitola 13 skripty pcODR)

úq

$$\begin{aligned} x' &= -y - f(x) \\ y' &= g(x) \end{aligned}$$

předpoklady:

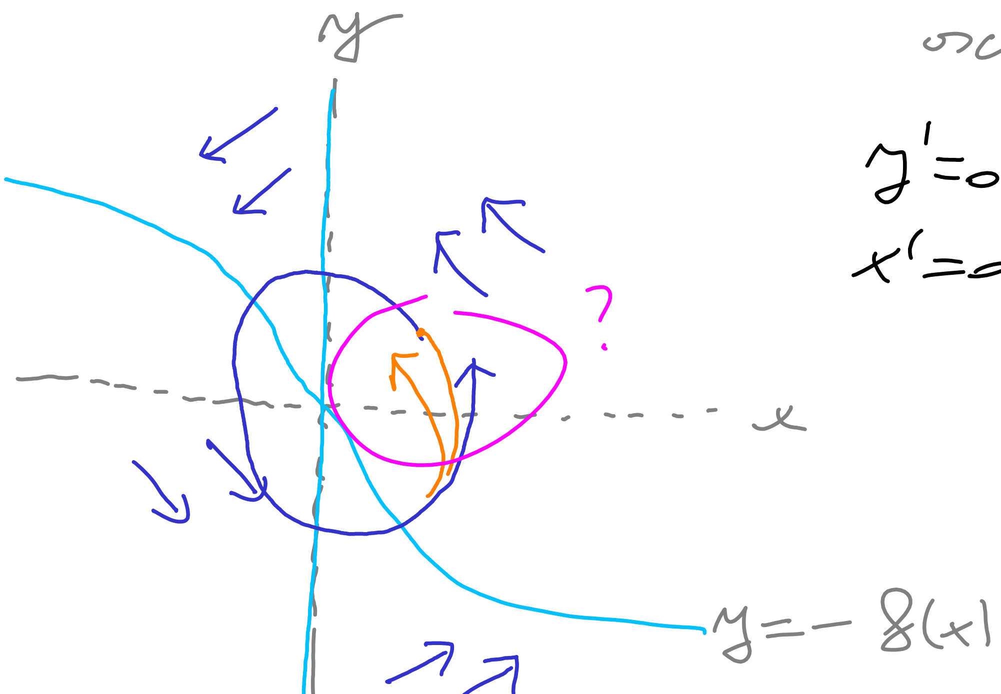
$f, g \in C^1$, rostoucí

$f(0) = g(0) = 0$

pozn.: $x'' = -y' - (f(x))' = -g(x) - f'(x)x'$

$$\Rightarrow \quad x'' + \underbrace{f'(x)}_{\geq 0} x' + g(x) = 0$$

≥ 0 ... tlumený (nelineární) oscilátor



$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x' = 0 \Leftrightarrow y = -f(x)$

? globální chování

(d) silnější předpoklady: $f'(x) > 0$ s.v.

$$\boxed{f'(0) > 0,\ g'(0) > 0}$$

linearizace

v bodě $(0,0)$: $X' = F(X)$

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} -f'(x), & -1 \\ g'(x), & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -f'(0), & -1 \\ g'(0), & 0 \end{pmatrix}}_{A}$$

$\Rightarrow$ A hurwitzovská

$(\operatorname{tr} A < 0,\ \det A > 0)$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ asymptoticky stabilní,

neboli: $\omega(z) = (0,0)$ pro $\forall z$ dost blízko $(0,0)$

Bendixson–Dulac: $\Omega = \mathbb{R}^2$

$B \equiv 1$

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-y - f(x)\right) + \frac{\partial}{\partial y} g(x)$$

$$= f'(x) > 0 \text{ s.v. } t$$

tj. $\operatorname{div}(-F) > 0$ s.v. v $\mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow$ $\nexists$ nestac. per. řešení

Pozorování: omezenost řešení pro $t \geq 0$.

Důsl.: $x(t) \to (0,0)$, $t \to +\infty$

pro <u>každé</u> řešení ✓

Dk. důsl. $x_0 \in \mathbb{R}^2$ libovolný

víme: $\varphi(t, x_0)$ omezené,

tj. rel. kompaktní

Poincaré–Bend.: <u>$\omega(x_0)$ musí obsahovat stac. bod.</u>

(jinak: $\exists$ nestac. per. řešení ↯)

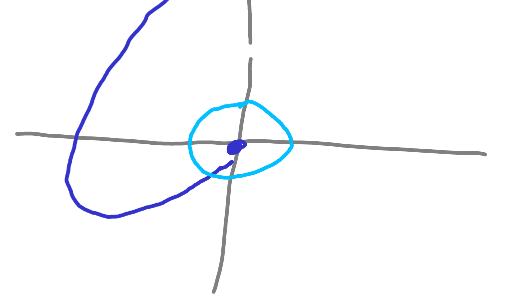
$(0,0)$ jediný stac. bod;

tj. $\omega(x_0) \ni (0,0)$

$\varphi(t_k, x_0) \to (0,0)$

pro jistou posl.

asympt. stab. $\Longrightarrow$ pro $\forall$ posl.



Dk. pozorování: omezenost řešení pro $t \geq 0$.

$$x'' + f'(x)x' + g(x) = 0 \quad / \cdot x'$$

$$x''x' + \underbrace{f'(x)(x')^2}_{\geq 0} + g(x)x' = 0$$

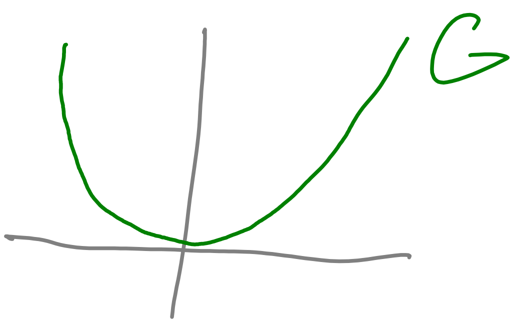
$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}(x')^2 + G(x)}_{V}\Big) \leq 0$$

kde $G(x) = \int_0^x g(\xi)\,d\xi$

$\Rightarrow$ $V(t) \leq V(0)$; $\forall t \geq 0$

$\Rightarrow$ omezenost $x' = y$

$G(x)$, a tedy x



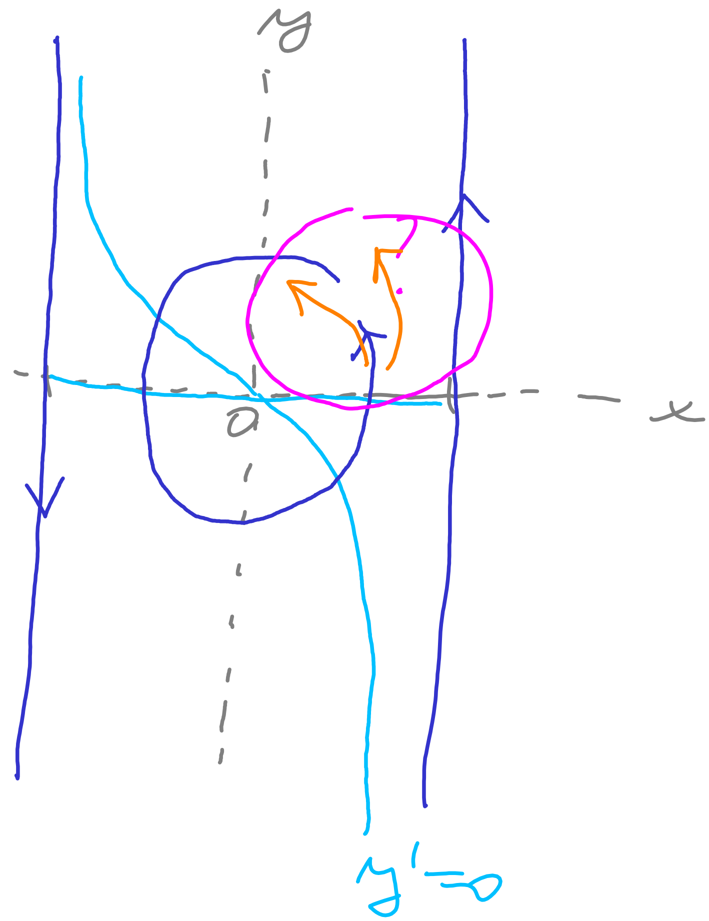
(B) další předpoklady: přísně

(La Salle)

ad 3(iii), z DÚ1

$$x' = -y(1-x^2)$$
$$y' = x + y(1-x^2)$$

? globální chování



Bendixson-Dulac:

v $\Omega = \{|x|<1\}$

volme $B = \frac{1}{1-x^2}$

$$\underbrace{\operatorname{div}(BF)}_{=(-y,\ \frac{x}{1-x^2}+y)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(-y)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1-x^2}+y\right)}_{=1} = \underline{\underline{1}}$$

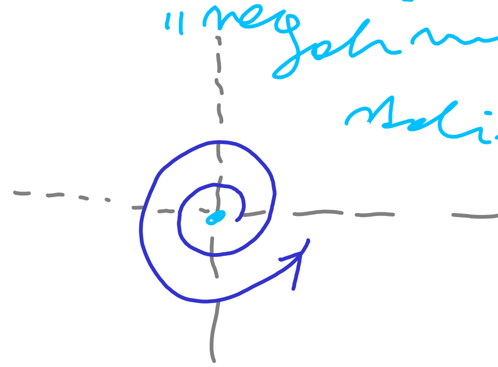
$\Rightarrow$ $\nexists$ nestacionární periodické řešení v Ω

Pozorování: $(0,0) \notin \omega(x_0)$ pro žádné $x_0 \neq (0,0)$

(neboť $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, a tedy

(0,0) odpuzuje blízké řešení)

viz DÚ2



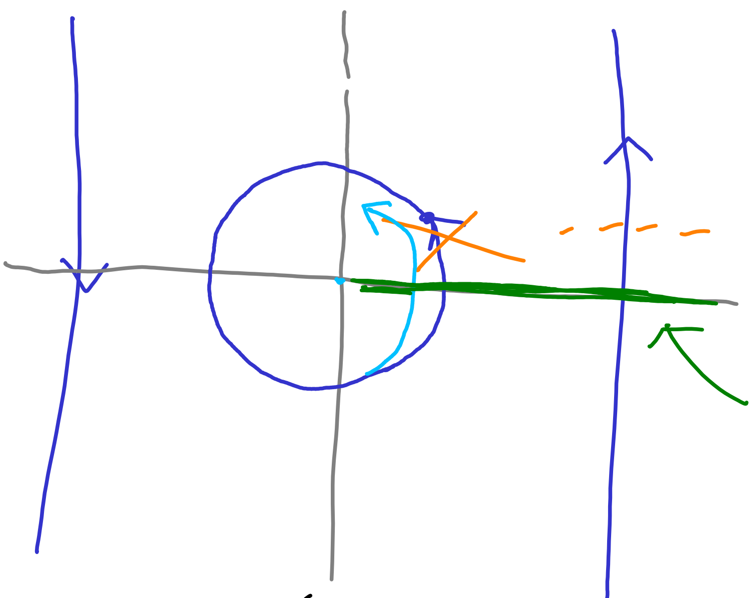
„nestabilní ohnisko"

Tvrdíme: $\omega(x_0) = \Pi_1 \cup \Pi_2$

pro $\forall x_0 \neq (0,0)$

$x_0 \in \Omega$

dk.:



- - - - Bend.-Dulac

monotonie

orbita: uzavřený: nelze ($\nexists$ per. řešení)

dovnitř: nelze (omezený; spor s Poinc.–Bend.)

$\Downarrow$

$\forall$ orbity neomezené

průsečíky s transverzálou

$$\boxed{y_a \nearrow 1}$$

$\left(y_a \to a < 1 \Rightarrow \exists \text{ per. řešení} \right)$

$$\omega(x_0) = \Pi_1 \cup \Pi_2$$

Pozn.: nesouvislá ω-limitní množina

(srov. s V. 13.1)