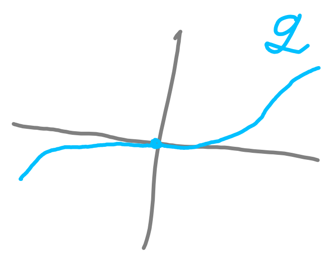
14. La Salleho věta

Příkl. (tlumené kyvadlo)

$$\cancel{m}x'' + \underbrace{g(x')}_{\text{odpor (tření)}} + \sin x = 0$$

- $g(0) = 0$
- $\underbrace{g(y)\,y \geq 0}$



očekáváme: stabilita (asymptot. stab.) bodu $(0,0)$.

$\Longleftrightarrow$
$$x' = y \qquad X = F(X)$$
$$y' = -\sin x - g(y)$$

$$X = \binom{x}{y} \ldots \nabla F(X) = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -\cos x, & -g'(y) \end{pmatrix}$$

v bodě $(0,0)$:
$$A = \nabla F(0) = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & -a \end{pmatrix}$$

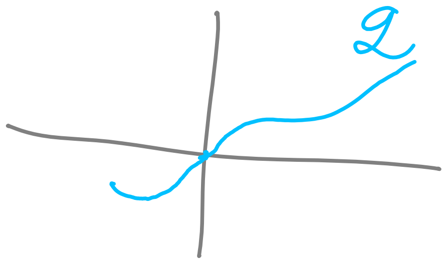
kde $a = g'(0)$

nechť: $a = g'(0) > 0$. Pak: $\operatorname{tr} A = -a < 0$

$\det A = 1 > 0$

$\Rightarrow$ A hurwiczovská

(tj. $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$)



$\Rightarrow$ $(0,0)$ asympt. stab.

Ljapunovské fce: $x'' + f(x) = 0$

$$V = \frac{1}{2}y^2 + F(x),$$

kde $F = \int f$

zde: $V = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos x)$

$V(0,0) = 0$

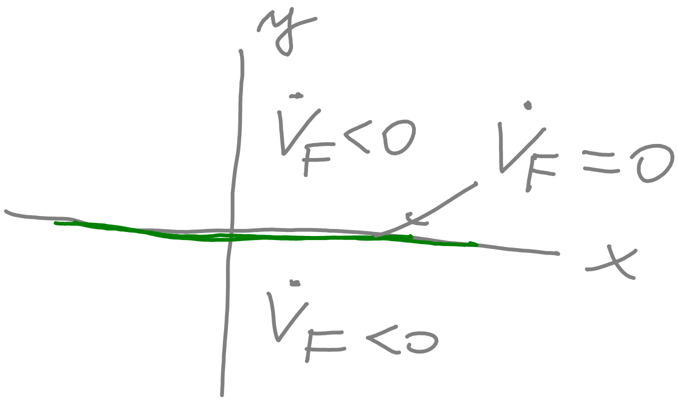
orbitální derivace:

$$\dot{V}_F = \frac{\partial V}{\partial x}x' + \frac{\partial V}{\partial y}y' = \cancel{\sin x \cdot y} + y \cdot (\cancel{-\sin x} - g(y))$$

$$= -g(y)y \le 0$$

$\Longrightarrow$ $(0,0)$ je stabilní (ODR, Př. 10)

?? asymptotická stabilita : potřeboval bych $\dot V_F < 0$ mimo $(0,0)$



ale: $g(0)=0$

$g(y)y>0$

pro $y\neq 0$

Věta 14.1 [La Salle]

nechť: (φ,Ω) je d.s. (1) $x' = f(x)$, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$

$\exists V(x):\Omega\to\mathbb{R}$, C^1, zdola omez.

$\exists l\in\mathbb{R}$ t.ž. $\Omega_l=\{x\in\Omega,\ V(x)<l\}$ je omezená

$\dot V_f(x)\le 0$ v Ω_l.

Označme: $R=\{x\in\Omega_l;\ \dot V_f(x)=0\}$

$M=\{y\in R,\ \gamma(y)\subset R\}$

Pozn.: $\forall x_0 \in \Omega_\ell$ je $\underbrace{\omega(x_0) \subset M}$.

Pozn.: M je největší inv. podm. R $^{*)}$

*) viz Věta 13.2

Dk.: fix $x_0 \in \Omega_\ell$, $\underbrace{y \in \omega(x_0)}$

? $y \in M$

označ: $x(t) = \varphi(t, x_0)$, $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot \underbrace{x'(t)}_{\overset{\shortparallel}{f(x(t))}} = \underbrace{\dot{V}_f(x(t))}_{\leq 0}$$

$\Rightarrow$ $t \mapsto V(x(t))$

nerostoucí, zdola omezená

$\Rightarrow$ $\exists\, c = \lim\limits_{t \to +\infty} V(x(t)) \in \mathbb{R}$

buď $\underline{y \in \omega(x_0)}$ libovolné

tj. $\exists\, t_k \to +\infty$ t.ž. $x(t_k) \to y$
$\quad k \to \infty$

$$V(x(t_n)) \to V(y)$$

tj. $\underline{V(y) = c}$

Věta 13.1. $\Rightarrow$ $\omega(x_0)$ je invariantní –

tj. $\varphi(t,y) \in \omega(x_0), \ \forall t$

$$\frac{d}{dt} V(\varphi(t,y)) \equiv c, \quad \text{''} \quad -$$

$$\Rightarrow \quad \dot{V}_f(\varphi(t,y)) = 0$$

tj. $\varphi(t,y) \in R \quad \forall t \in R$

neboli $\gamma(y) \subseteq R$

tj. $y \in M$. $\Box$

Příklad – dokončení:

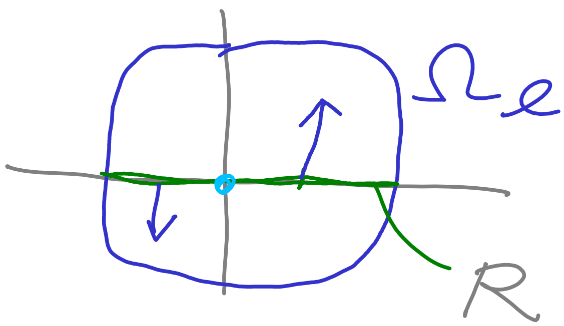
$$V = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos x)$$

$\ell > 0$ malé t.ž. $\Omega = V_\ell = \{(x,y);\ V(x,y) < \ell\}$

... okolí $(0,0)$

$$\dot{V}_F = -g(y)y \leq 0$$

$$R = \{(x,y);\ \dot V_F = 0\} = \Omega_e \cap \{y=0\}.$$



$$y' = -\sin x - g(y) \neq 0 \quad \forall y = 0,\ x \neq 0$$

Jediné: $\underline{M} = \{(0,0)\}$ $\Rightarrow$ jsou holor. řešení:

největší invariantní podm. R

$$\omega(x_0) = \{(0,0)\} \quad \forall x_0 \in \Omega_e$$

tj. asymp. stab.