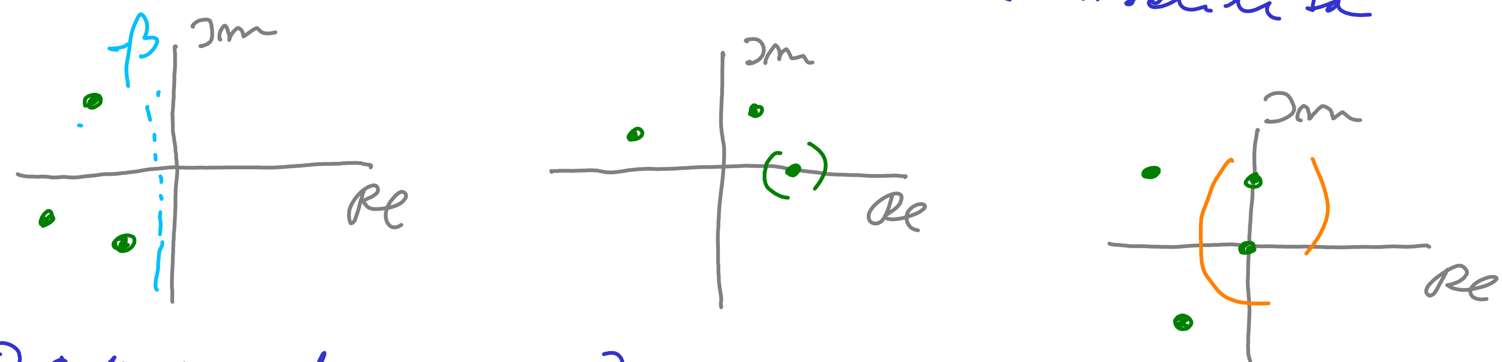
20. Stabilní, nestabilní a centrální varieta

Opakování: $X' = F(X) = \underbrace{MX}_{\text{linearizace}} + \underbrace{G(X)}_{\text{porucha řádu} \geq 2}$ ... v okolí $X_0 = 0$

$\sigma(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{C}$ ⇒ (ne)stabilita



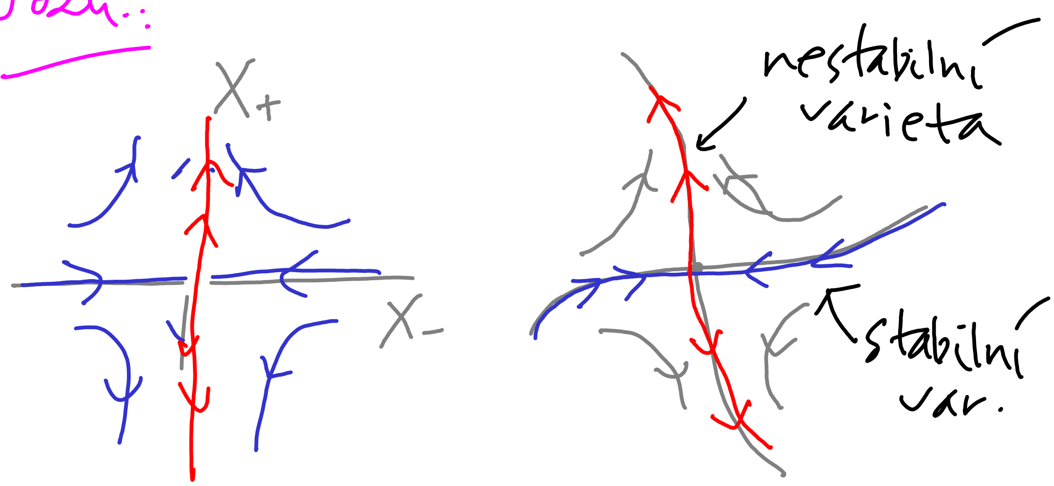
⇒ asympt. stab.

⇒ nestab.

? hraniční případ ?

- nestačí M, rozhodne $G(\cdot)$
- Ljap. fce La Salle
- $\boxed{\text{Kap. 20}}$

Pozn.:



lineární $X' = MX$

nelineární případ $\boxed{X' = F(X) = MX + G(X)}$

Pomocná úloha:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x' &= Ax + f(t,y) \in \mathbb{R}^n \ (\text{centr.} + \text{nest.}) \\ y' &= By + \underbrace{g(t,y)}_{\text{malé}} \in \mathbb{R}^m \ (\text{stab.}) \end{aligned}$$

$M = \left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & B \end{array}\right)$

$F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$

Předpoklady: $\operatorname{Re}\sigma(A) \geq 0 \iff Ax\cdot x \geq -\varepsilon|x|^2$ ($\varepsilon>0$ malé)

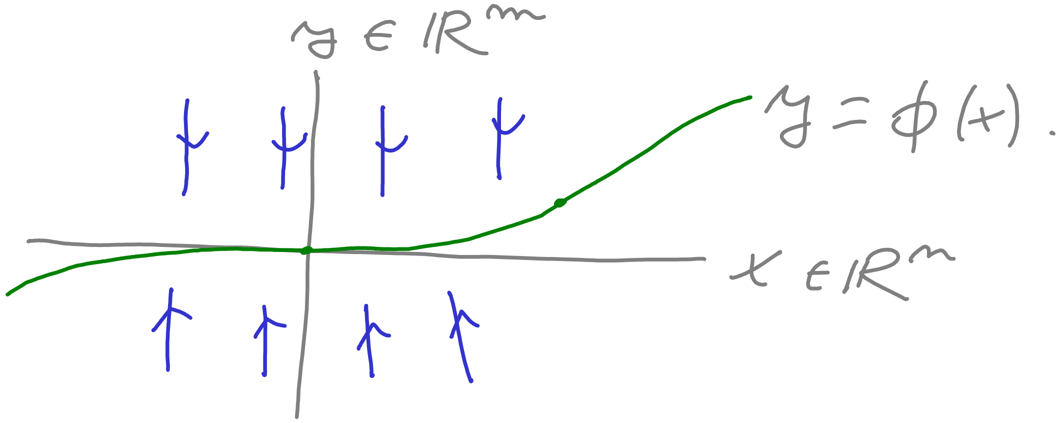
$$\operatorname{Re}\sigma(B) < 0 \iff \|e^{tB}\| \leq c_0 e^{-t\beta},\ \beta>0$$

$$f = g = 0 \text{ v } (x,y) = (0,0) \quad \forall t \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} |f|, |g| \leq \rho \\ \operatorname{Lip} f, g \leq \sigma \end{array}\right\} \text{ v } \mathbb{R}^{n+m}$$

malé

Cíl: $\exists$ tzv. centrální varieta invariantní vůči (1) $\boxed{y = \phi(x)}$,



Značení: $\mathcal{H} = \{\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m ;\ \phi(0) = 0,\ |\phi| \leq b,\ \operatorname{Lip}\phi \leq \ell\}$

Def. Řekneme, že $\phi \in \mathcal{H}$ splňuje vlastnost (INV), jestliže: $(x(t), y(t))$ řeší (1), $\phi(x(0)) = y(0)$, $\implies \phi(x(t)) = y(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Věta 20.1. nechť (jisté předpoklady na konstanty).

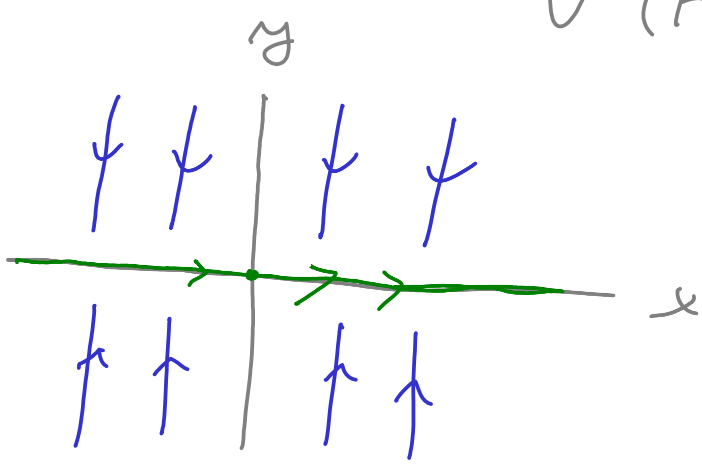
Pak $\exists!\ \Phi \in \mathcal{H}$ splňující (INV).

Příkl.
$$\begin{cases} x' = a x^3 \\ y' = -y \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

$\dots\ n = m = 1,\ A = 0,\ B = -1,\ g(x,y) = 0,\ f(x,y) = a x^3$

? stabilita $(0,0)$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \sigma(M) = \{0, -1\}$$



$\phi \equiv 0$ ... centr. varieta

$$\boxed{x' = a x^3}$$

rozhodne o stab. (celého systému!!)

Lemma 20.1 $\Phi \in \mathcal{H}$ splňuje (INV) $\iff$ splňuje (RED),

kde (RED): $p(t)$ řeší (2) $p' = Ap + f(p, \Phi(p))$

(„redukovaná rovnice")

$\Rightarrow (x(t), y(t)) := (p(t), \Phi(p(t)))$ řeší (1).

Dk. „$\Rightarrow$": nechť $p(t)$ řeší (2), označme $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ řešení (1) s poč. podm.

$$\tilde{x}(0) = p(0)$$
$$\tilde{y}(0) = \phi(p(0)).$$

dle (INV) $\Rightarrow$ $\tilde{y}(t) = \phi(\tilde{x}(t))$, pro $\forall t \in \mathbb{R}$

zejména: $(1)_1$: $\tilde{x}' = A\tilde{x} + f(\tilde{x}, \underbrace{\phi(\tilde{x})}_{=\tilde{y}})$

$$\tilde{x}(0) = p(0)$$

dle jednoznačnosti pro (2) $\Rightarrow$ $\tilde{x}(t) = p(t)$, pro $\forall t \in \mathbb{R}$

tj. $(\underbrace{p(t)}_{\tilde{x}}, \underbrace{\phi(p(t))}_{\tilde{y}})$ řeší (1), tj. (RED) platí.

„$\Leftarrow$": nechť $(x(t), y(t))$ řeší (1), $y(0) = \phi(x(0))$

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \quad y(t) = \phi(x(t)), \forall t$$

označ. $\tilde{p}(t)$ řešení (2) s poč. podm. $\tilde{p}(0) = x(0)$

dle (RED) $\Rightarrow$ $(\tilde{p}(t), \phi(\tilde{p}(t)))$ řeší (1) s poč. podm.

$$(\tilde{p}(0), \phi(\tilde{p}(0))) = (x(0), \underset{\phi(x(0))}{\overset{\shortparallel}{y(0)}})$$

dle jednoznačnosti pro (1) $\Rightarrow$ $\tilde{p}(t) = x(t)$, $\phi(\tilde{p}(t)) = y(t)$, $\forall t$

zel. $y(t) = \phi(\tilde{p}(t)) = \phi(x(t))\ \forall t$

z. (INV) zlad. $\square$

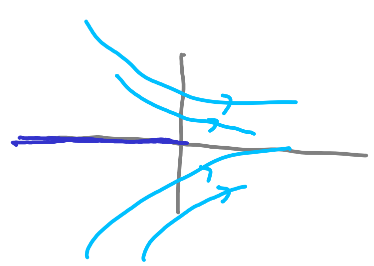
Pozn.: $\exists!$ globální řešení pro (1), (2)

($\Leftarrow$ globální lipsch. P.S.)

Lemma 20.2 Nechť $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\operatorname{Re}\sigma(B) < 0$, nechť $\gamma(t)$ spojité, omezené na $(-\infty, 0]$. Pak $\exists!$ řešení $y' = By + \gamma(t)$, omezené na $(-\infty, 0]$.

navíc platí: $y(0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB}\gamma(s)\,ds$. (*)

pozn.: úloha nestabilní pro $t \to -\infty$



Dk.: variace konstant:

$$y(t) = e^{tB}y(0) + \int_0^t e^{(t-s)B}\gamma(s)\,ds$$

$$\Leftrightarrow\ e^{-tB}y(t) = y(0) + \int_0^t e^{-sB}\gamma(s)\,ds \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

1. je-li $|y(t)| \le C \quad \forall t \in (-\infty, 0]$

pak $(PS) \to 0,\ t \to -\infty \quad \left(e^{\overset{>0}{(-t)}B} \to 0 \right)$

$$\Longrightarrow \quad y(0) + \int_0^{-\infty} e^{-sB} \gamma(s)\, ds = 0, \text{ tj. } (*)$$

--- jednoznačnost ($\exists$ nejvýše jedno)

2. existence: polož $y(0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} \gamma(s)\, ds$

má smysl: $\left| \int_{-\infty}^{0} \dots \right| \le \int_{-\infty}^{0} |e^{-sB} \gamma(s)|\, ds$

$$\le \underbrace{\|e^{-sB}\|}_{\le C_0 e^{Bs}} \cdot \underbrace{|\gamma(s)|}_{\le K}$$

$$\le C_0 K \int_{-\infty}^{0} e^{Bs}\, ds = \frac{C_0 K}{B}$$

dle v.ř.:

$$y(t) = e^{tB} \Big\{ \overbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{-sB} \gamma(s)\, ds}^{y(0)} \Big\} + \int_0^t e^{(t-s)B} \gamma(s)\, ds$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)B} \gamma(s)\, ds, \quad \text{a tedy}$$

$$|y(t)| \le \int_{-\infty}^{t} |\cdots|\, ds \le \int_{-\infty}^{t} \underbrace{\|e^{(t-s)B}\|}_{\le C_0 e^{-\beta(t-s)}} \cdot \underbrace{|\gamma(s)|}_{\le K}\, ds \le \frac{C_0 K}{\beta}$$

$\forall t \le 0$

$\Rightarrow$ $y(t)$ omezené na $(-\infty, 0]$. $\square$

Lemma 20.3. $\phi \in \mathcal{X}$ splňuje (INV) $\Leftrightarrow$ splňuje (PB),

kde (PB): $$\phi(p_0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} g(p(s), \phi(p(s)))\, ds$$

pro $\forall p_0 \in \mathbb{R}^n$

kde $p(t)$ řeší (2) s poč. podm.

$p(0) = p_0$, $p' = Ap + g(p, \phi(p))$.

Dk: ukážeme (RED) $\Leftrightarrow$ (PB)

„$\Rightarrow$": fix. $p_0 \in \mathbb{R}^n$ libovolné

nechť $p(t)$ řeší (2) s poč. podm.

$p(0) = p_0$

dle (RED): $(p(t), \underbrace{\phi(p(t))}_{})$ řeš. (1), speciálně

$\underbrace{y(t)}_{\text{omezené!!}} :=$ řeš. $(1)_2$, tj. řeš. $\boxed{y' = By + \gamma(t)}$, kde

(ϕ ... omezené)

$$\gamma(t) = \underbrace{g(p(t), \phi(p(t)))}_{\text{omezené!!}}$$

(g ... omezené)

L. 20.2. $\Rightarrow$ $$y(0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} \gamma(s)\, ds$$

tj. $$\phi(\underbrace{p(0)}_{= p_0}) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} g(p(s), \phi(p(s)))\, ds$$

$\Rightarrow$ (PB) platí.

„$\Leftarrow$": $\boxed{p(t) \text{ splňuje } (2)}$ $\overset{(PB)}{\underset{?}{\Longrightarrow}}$ $(p(t), \phi(p(t)))$ splňuje (1)

pozorování: (PB) $\overset{(*)}{\Longleftarrow}$

(ZPB): $$\phi(p(t_1)) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} g(p(t_1+s), \phi(p(t_1+s)))\, ds$$

$\forall t_1 \in \mathbb{R}$, $\forall p(t)$ řešení (2) ad $(*)$: označ: $p_1(t) = p(t+t_1)$, $t_1 \in \mathbb{R}$ pevné

zřejmě: $p_1(t)$ řeší (2) s poč. podm.

$$p_1(0) = p(t_1) =: p_0$$

dle (PB):
$$\underbrace{\phi(p_0)}_{= p(t_1)} = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} g(\underbrace{p_1(s)}_{= p(t_1+s)}, \phi(p_1(s)))\,ds$$

$\Rightarrow$ (ZPB)

---

označme: $\tilde{y}(t)$ ... řešení $\boxed{y' = By + \gamma(t)}$

kde $\gamma(t) = g(p(t), \phi(p(t)))$

s poč. podm. $y(0) = \phi(p(0))$.

víme:
$$\tilde{y}(0) = \phi(p(0)) \overset{(PB)}{=} \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} \underbrace{g(p(s), \phi(p(s)))}_{= \gamma(t) \text{ omezená na } (-\infty, 0]}\,ds$$

L. 20.2 $\Rightarrow$ $\tilde{y}(t)$ omezené na $(-\infty, 0]$.

nechť $t_1 \in \mathbb{R}$ libovolné (pevné) : polož $\tilde{y}_1(t) = \tilde{y}(t_1+t)$

stále omezené na $(-\infty, 0]$

opět L. 20.2 :
$$\tilde{y}_1(0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} g(t_1+s)\,ds$$

LS: $\tilde{y}_1(0) = \tilde{y}(t_1)$

PS:
$$\int_{-\infty}^{0} e^{-sB} g(p(t_1+s), \phi(p(t_1+s)))\,ds \overset{(ZPB)}{=} \phi(p(t_1))$$

CELKEM: $\Longrightarrow$ $\tilde{y}(t) = \phi(p(t))$, $\forall t \in \mathbb{R}$

neboli $(p, \underset{\tilde{y}}{\underset{\|}{\phi(p)}})$ řeší (1), tj. (RED) řeší. $\square$

Věta 20.1. nechť platí: (C3) $C_0\sigma\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1+\ell}{\beta-\varepsilon-\sigma(2+\ell)}\right) < 1$

(C1) $\frac{C_0\rho}{\beta} \le b$ (C2) $\frac{C_0\sigma(1+\ell)}{\beta-\varepsilon-\sigma(1+\ell)} \le \ell$

Pozor: $\exists!\, \phi \in \mathcal{X}$, splňující (INV).

Navíc: 1) Je-li $\nabla g(0,0) = 0$, pak $\nabla \phi(0) = 0$.

2) Jsou-li $f, g \in C^k$, pak $\phi \in C^k$ $(k \geq 1)$

Pozn.: (C1), (C2), (C3) $\Leftarrow$ $\beta > 0$ dáno, $\varepsilon > 0$ malé

b, l $(\mathcal{X})$ dáno

nal ρ, σ malé

Dk.: strategie: Banachova věta o kontrakci

L.20.3: (INV) $\Leftrightarrow$ ϕ je pevný bod funkcionálu

$\mathcal{T} : \phi(\cdot) \longmapsto \mathcal{T}\phi(\cdot)$, kde

$$[\mathcal{T}\phi](p_0) := \int_{-\infty}^{0} e^{-s B} g(p(s), \phi(p(s)))\, ds$$

kde řeší (2) $p' = Ap + f(p, \phi(p))$

$p(0) = p_0$

KROK 0. $\mathcal{X}$ ... úplný metr. pr.: uzavřené podm. $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$\|\phi\| = \sup_{p_0 \in \mathbb{R}^n} |\phi(p_0)|$$

KROK 1. $\mathcal{T}\mathcal{X} \subset \mathcal{X}$?

• $p_0 = 0 \overset{?}{\dashrightarrow} (\mathcal{T}\phi)(0) = 0$

$\Updownarrow$

$p(t) \equiv 0$ (należy $g(0,0)=0$, $\phi(0)=0$)

$$(\mathcal{T}\phi)(0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB} \underbrace{g(0,0)}_{=0}\, ds = 0$$

• $|\mathcal{T}\phi(p_0)| \leq b$?

$$|\mathcal{T}\phi(p_0)| \leq \int_{-\infty}^{0} \underbrace{|e^{-sB} g(p(s), \phi(p(s)))|}\, ds \leq \frac{C_0 \rho}{\beta} \overset{(\ast)}{\leq} b$$

$$\leq \underbrace{\|e^{-sB}\|}_{\leq C_0 e^{\beta s}} \cdot \underbrace{|g(\ldots)|}_{\leq \rho}$$

• $\mathrm{Lip}(\mathcal{T}\phi) \leq \ell$?

Pomocné odhady

(A1) $y' \geq -ay - c$, $\forall\, t \leq 0$ $\begin{pmatrix} a > 0 \\ c \geq 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow y(t) \leq e^{at}\left(y(0) + \frac{c}{a}\right)$, $\forall\, t \leq 0$ (d-w.)

(A2) $\quad \left|\overset{(g)}{f}(p,\phi(p)) - \overset{(g)}{f}(q,\phi(q))\right| \le \underline{\sigma(1+\ell)|p-q|}$

Bew: $\quad \pm \overset{(g)}{f}(q,\phi(p)) \qquad (\phi \in \mathcal{X},\ p,q \in \mathbb{R}^n)$

LS: $\quad |\quad| \le |f(p,\phi(p)) - f(q,\phi(p))|$

$$+ |f(q,\phi(p)) - f(q,\phi(q))|$$

$$\le \sigma|p-q| + \sigma \underbrace{|\phi(p) - \phi(q)|}_{\le \ell|p-q|}$$

(A3) $\quad \left|\overset{(g)}{f}(p,\phi(p)) - \overset{(g)}{f}(q,\psi(q))\right| \qquad (\phi,\psi \in \mathcal{X},\ p,q \in \mathbb{R}^n)$

$$\le \sigma\left((1+\ell)|p-q| + \|\phi-\psi\|_{\mathcal{X}}\right)$$

Bew: LS: $\le |f(p,\phi(p)) - f(q,\phi(p))|$

$$+ |f(q,\phi(p)) - f(q,\psi(q))|$$

$$\le \sigma\left(|p-q| + |\phi(p) - \psi(q)|\right)$$

$$\pm \psi(p)$$

$$\le \sigma\Big(|p-q| + \underbrace{|\phi(p)-\psi(p)|}_{\le \|\phi-\psi\|_{\mathcal{X}}} + \underbrace{|\psi(p)-\psi(q)|}_{\le \ell|p-q|}\Big)$$

---

pokračuj: $\mathrm{Lip}(J\phi) \overset{?!}{\le} \ell$: fixuj $p_0, q_0 \in \mathbb{R}^n$, $\phi \in \mathcal{X}$

$$J\phi(p_0) - J\phi(q_0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sB}\Big\{ g(p(s), \phi(p(s))) - g(q(s), \phi(q(s)))\Big\}\,ds$$

kde $p(\cdot)$ řeší (2) s poč. podm. p_0

$q(\cdot)$ — " — " — " — q_0

$$|J\phi(p_0) - J\phi(q_0)| \overset{(*)}{\le} \int_{-\infty}^{0} \|e^{-sB}\| \cdot \underbrace{|g(p(s), \phi(p(s))) - g(q(s), \phi(q(s)))|}_{\le \sigma(1+\ell)\,|p(s)-q(s)| \ (A2)}\,ds$$

$\le \cancel{(1+\sigma)}\,|p(s) - q(s)|$

odbočka: odhad $|r(t)|$, $t \le 0$

bzal $r(t) = p(t) - q(t)$

mivel: $r' = Ar + f(p,\phi(p)) - f(q,\phi(q))$

$\cdot r$ / $r' \cdot r = r \cdot Ar + r \cdot (f(\dots) - f(\dots))$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|r|^2 \geq -\varepsilon|r|^2 - \sigma(1+\ell)|r|^2$$

de A2: $|r \cdot (f(p,\phi(p)) - f(q,\phi(q))|$

$$\leq |r| \underbrace{|\qquad\qquad\qquad|}_{\leq \sigma(1+\ell)|r|}$$

de (A1): $|r|^2 = y$

$a = 2(\varepsilon + \sigma(1+\ell))$

$c = 0$

$\Rightarrow$ $|r(t)|^2 \leq e^{-at}|r(0)|^2$ $\forall t \leq 0$

$|r(t)| \leq e^{-(\varepsilon+\sigma(1+\ell))t}$ — " —

(*) $$|J\phi(p_0) - J\phi(q_0)| \le \int_{-\infty}^{0} c_0 e^{\beta s} \cdot \sigma(1+\ell) \underbrace{|r(s)|}_{< e^{-\varepsilon(1+\sigma(1+\ell))s} \cdot |r(0)|} ds$$

$$\le c_0 \sigma(1+\ell) \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{(\beta - \varepsilon - \sigma(1+\ell))s} ds}_{= \frac{1}{\beta - \varepsilon - \sigma(1+\ell)}} \cdot |p_0 - q_0|$$

(C2)

$$\le \boxed{\ell \cdot |p_0 - q_0|}$$

KROK 2: J kontrakce? fix. $p_0 \in \mathbb{R}^n$

$\phi, \psi \in \mathcal{X}$

$$|J\phi(p_0) - J\psi(p_0)| \le K \|\phi - \psi\|$$

(sup $p_0 \in \mathbb{R}^n$) kde $K < 1$

(nezávisí na p_0)

odtud:

$$J\phi(p_0) - J\psi(p_0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-s\beta} \{ g(p(s), \phi(p)) - g(q(s), \psi(q(s))) \}$$

kde $p(\cdot)$ řeší $p' = Ap + f(p, \underline{\underline{\phi}}(p))$, $p(0) = p_0$

$q(\cdot)$ řeší $q' = Aq + f(q, \underline{\underline{\psi}}(q))$, $q(0) = p_0$

mé úl.: odhad pro $r(t) = p(t) - q(t)$

$\boxed{r(0) = 0}$ (pomocí (A1), (A3))

$\Rightarrow |r(t)| \leq e^{-(\varepsilon + \sigma(2+e))t} \|\phi - \psi\|$

$\forall t \leq 0$

$\square$

---

ad dodatek 1: ve smyslu <u>totálního dif.</u>:

$$\frac{g(t,y)}{|t|+|y|} \to 0, \ (t,y) \to (0,0) \Rightarrow \frac{\phi(p_0)}{|p_0|} \to 0, \ p_0 \to 0$$

$$\frac{|\phi(p_0)|}{|p_0|} \leq \int_{-\infty}^{0} \|e^{-sB}\| \cdot \underbrace{\frac{|g(p(s), \phi(p(s)))|}{|p_0|}}_{h(p_0, s)} ds \to 0$$

$p_0 \to 0$

.. Lebesgueova věta

dodatek 2: kontrakce v C^r $(r \geq 1)$ ∇

---

aplikace 1. [lokalizace] nechť $X' = F(X)$ na okolí $X_0 \in \mathbb{R}^{n+m}$

$X_0 = 0$ BÚNO

$F \in C^1(\mathcal{U}(0, 2\Delta))$

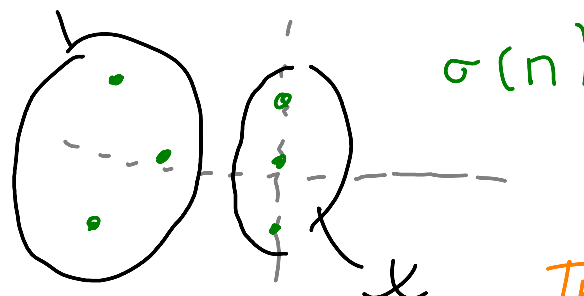
$\Delta > 0$

linearizace, 2. řádu

$$X' = MX + G(X)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= Ax + f(t,y) \\ y' &= By + g(t,y) \end{aligned}} \quad (1)$$



vidíme: $f = g = 0$ v $(0,0)$

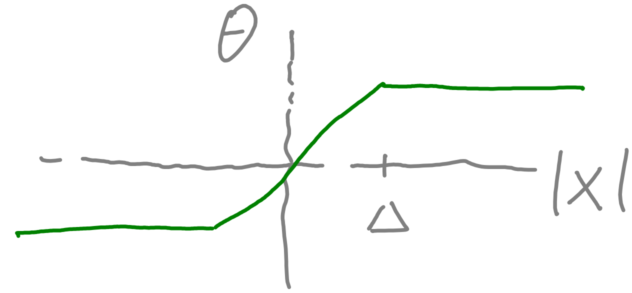
$\nabla f = \nabla g = 0$ v $(0,0)$, C^1 na $\mathcal{U}(0, 2\Delta)$ (malé)

$$\Longrightarrow \quad (*) \begin{cases} |f|, |g| \leq \rho \\ \mathrm{Lip}\, f, \mathrm{Lip}\, g \leq \sigma \end{cases} \quad \text{libovolně malé na}$$

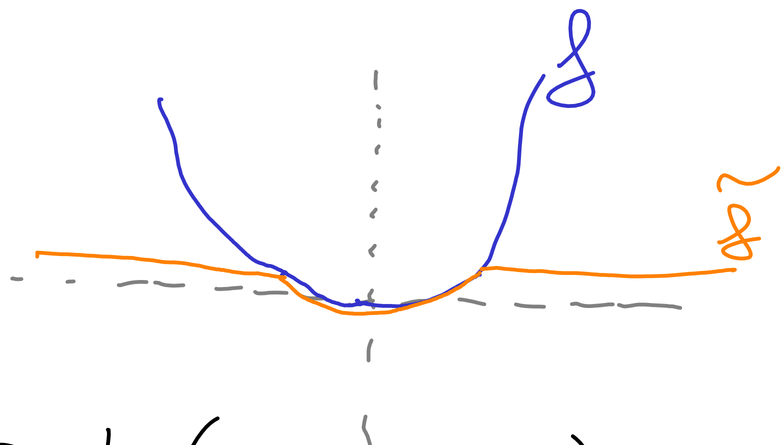
TRIK: změňme úlohu:

pomocná fce $\quad \theta(X) = \begin{cases} X, & |X| \leq \Delta \\ \frac{X}{|X|}\Delta, & \text{jinde} \end{cases}$

$\widetilde{(1)}$ $$x' = Ax + f(\theta(x,y))$$
$$y' = By + \underbrace{g(\theta(x,y))}$$



pozoruji: $\tilde{f}, \tilde{g}$ splní (*) globálně (v $\mathbb{R}^{n+m}$)



Věta 20.1. $\Rightarrow$ $\exists$ c.v. Φ (globální) pro $\widetilde{(1)}$

$\Rightarrow$ Φ je lokální c.v. pro (1)

splní (INV) ($\Leftrightarrow$ (RED))

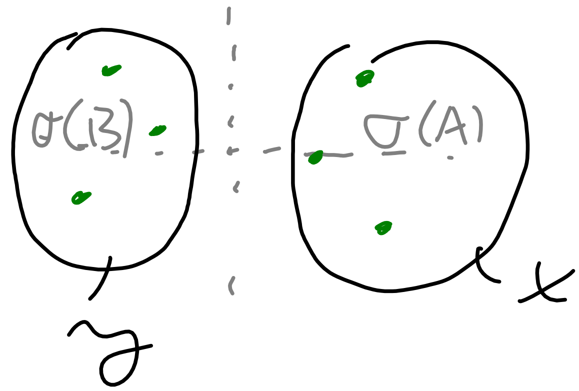
na $\mathcal{U}(0,\Delta)$, kde

$(1) = \widetilde{(1)}$

(2) lokální stabilní a nestabilní variety

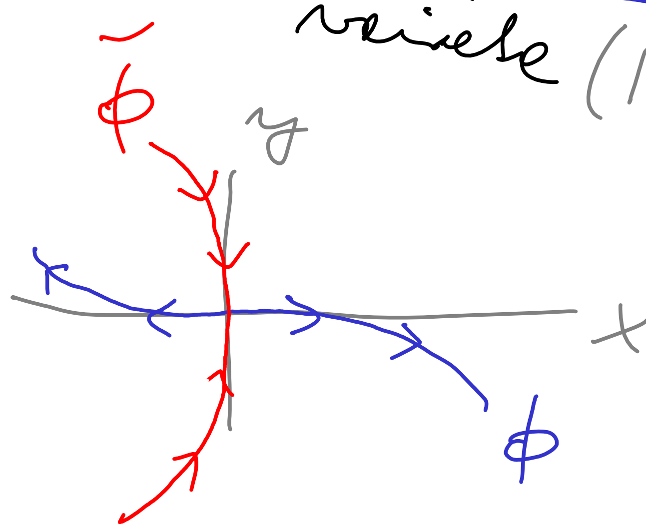
$(*)\quad X' = \underline{M}X + G(X)$ řekli $\sigma(M)\cap \mathrm{Im} = \emptyset$

$$x' = Ax + f(x,y)$$
$$y' = By + g(x,y)$$



$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & B \end{array}\right);$$

i) lokalizace & V. 20.1: $\Rightarrow$ lokální <u>nestabilní</u> varieta ($\parallel x$)



ii) TRIK: otočíme čas

x ... stabilní

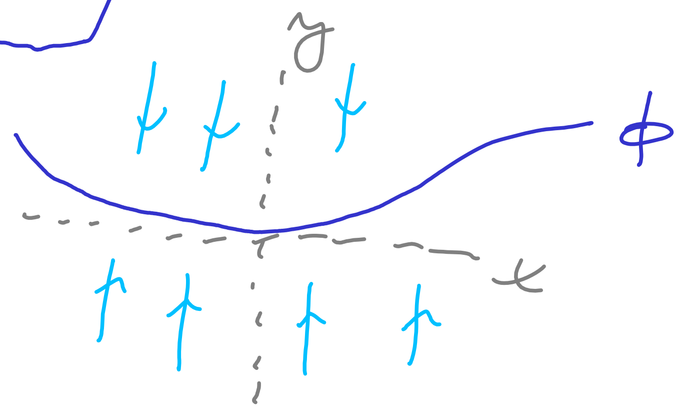
y .. nestabilní

Věta 20.1. $\Rightarrow$ lokální ~~ne~~stabilní varieta ($\parallel y$)

Pozn.: nadále umíme centrální varietu;
viz. původní úloha (1) (přímé lokalizování)

(1) $x' = Ax + f(x,y)$
$y' = By + g(x,y)$

(2) $p' = Ap + f(p, \phi(p))$



Princip redukce stability:

$(0,0)$ je stabilní (resp. asymptoticky stabilní) pro (1)

$\Updownarrow$

0 má analogickou vlastnost pro (2)

Ověření: ϕ splňuje (INV) $\Leftrightarrow$ splňuje (RED), tj:

nechť $x(t)$ řeší (2), pak $(x(t), \phi(x(t)))$ řeší (1)

neboli $x' = Ax + f(x, \phi(x))$

$(\phi(x))' = B\phi(x) + g(x, \phi(x))$

nechť navíc $\phi \in C^1$

$(1)_2 \iff \nabla\phi(x)\,x' = B\phi(x) + g(t,\phi(x))$

$$[M\phi](x(t)) = 0 \quad \text{pro } \forall t \in \mathbb{R}$$

kde: $M\phi(x) = \nabla\phi(x)\left[Ax + f(t,\phi(x))\right] - B\phi(x) - g(t,\phi(x))$

Pozorování: $(INV) \iff (RED) \overset{\phi\in C^1}{\iff} (DR)$

kde (DR) $M\phi(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

(též lokálně)

Pozn.: m rovnic o m neznámých, typicky degenerující

řešení ??

aproximace !!

Věta 20.3. [aproximace c.v.]

nechť platí předpoklady Věty 20.1.,

nechť $\phi \in \mathcal{X}$ je příslušná c.v.

nechť $\psi(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je C^1 funkce,

splňující $\psi(0) = 0$, $\nabla\psi(0) = 0$.

nechť $\nabla\psi(x) = O(|x|^q)$, $x \to 0$, pro jisté $q > 1$. Pak $\phi(x) = \psi(x) + O(|x|^q)$ pro $x \to 0$.

Dk. (idea)

z věty 20.1.

$$\mathcal{Y} = \{\phi \in \mathcal{X},\ |\phi(x)| \le K|x|^q,\ \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

určíme níže

$$\mathcal{S} : \phi \longmapsto \mathcal{T}(\phi + \theta) - \theta$$

$\theta = \theta(x)$ ... C^1 fce t.ž. $\theta(x) = \psi(x)$ na $U(0,\delta)$

$= 0$ mimo $U(0,2\delta)$

Klíčový krok: $\mathcal{S}\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}$ $\Rightarrow$ jsem hotov!!

navíc: $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ uzavřené, $\mathcal{S}$ kontrakce

$\Rightarrow$ $\exists!\, \tilde{\phi} \in \mathcal{Y}$ t.ž. $\mathcal{S}\tilde{\phi} = \tilde{\phi}$

tj. $\mathcal{T}(\tilde{\phi} + \theta) = \tilde{\phi} + \theta \in \mathcal{X}$

$\tilde\phi+\theta$ je ř. v. $\mathcal{J}$ $\Rightarrow$ $\tilde\phi+\theta=\phi$

$$\Big[\phi(x)-\underline{\psi(x)} = \phi(x)-\underline{\theta(x)} = \tilde\phi(x) = \underline{O(|x|^q)}\Big]$$

c.v.

x malé

$\tilde\phi \in Y$

(dokonce glob.)

$\square$

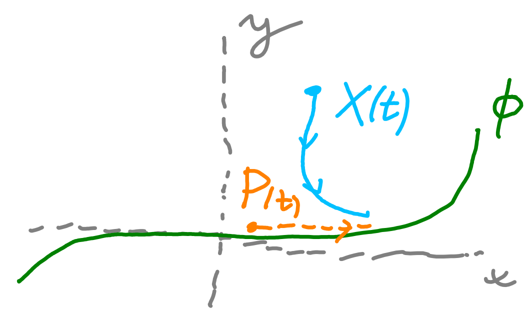
---

cíl: princip redukce stability

$\Uparrow$

asymptotická úplnost c.v.

("tracking property")



$X(t) = P(t) + O(e^{-\gamma t})$

$t \to \infty$

Pozn.

$\mathrm{Re}\,\sigma(B) < -\beta \iff y\cdot By \le -\beta|y|^2$

$\mathrm{Re}\,\sigma(A) \ge -\varepsilon \iff x\cdot Ax \ge -\varepsilon|x|^2$

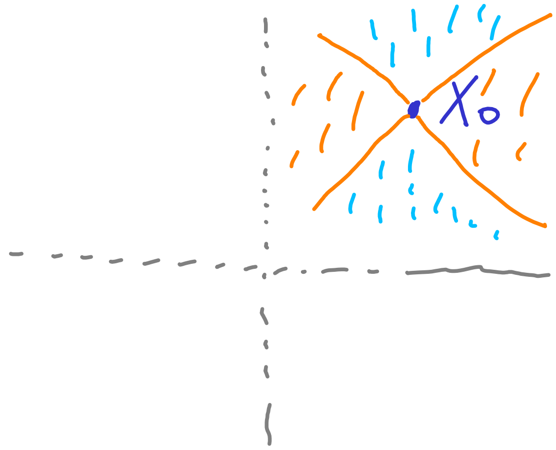
Def.

$\mathcal{K} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+m};\ |y|\le\mu|x|\}$ ... kužel

$\mathcal{V} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+m};\ |y|\ge\mu|x|\}$ ... stín

Obecněji: $\mathcal{K}(X_0) = \{X;\ X-X_0\in\mathcal{K}\}$

$\mathcal{V}(X_0) = \{X;\ X-X_0\in\mathcal{V}\}$



$$v(X_0) = \overline{\mathcal{K}(X_0)^c}$$

Lemma 20.4. Nechť $\mu > 0$, nechť σ je malé.

Pak platí:

1. pozitivní invariance kuželu:

   $X_1(t), X_2(t)$ řeší (1), $X_1(0) \in \mathcal{K}(X_2(0))$

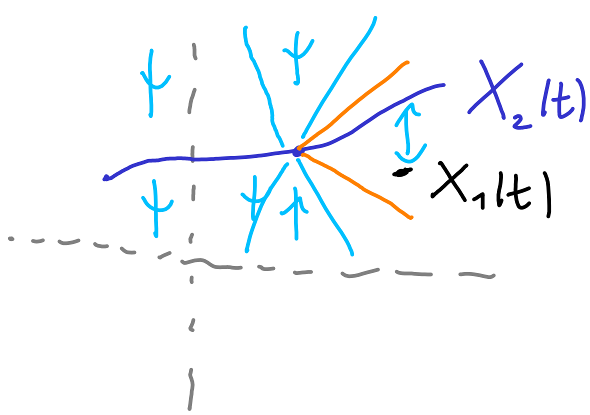
   $$\Rightarrow X_1(t) \in \mathcal{K}(X_2(t)) \text{ pro } \forall t \geq 0$$

2. exponenciální stabilita stínu:

   $X_1(t), X_2(t)$ řeší (1), nechť $X_1(t) \in \mathcal{V}(X_2(t))$ pro $\forall t \in I$, I interval

   $$\Rightarrow |X_1(t) - X_2(t)| \leq c e^{-\gamma(t-s)} |X_1(s) - X_2(s)|,$$

   pro $\forall s \leq t \in I$



Dk.: 1. označme $X_1 = (x_1, y_1)$, $\tilde{x} = x_1 - x_2$

$X_2 = (x_2, y_2)$ $\quad \tilde{y} = y_1 - y_2$

$$(1) \Rightarrow \quad \tilde{x}' = A\tilde{x} + \overbrace{f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)}^{=:\tilde{f}}$$

$$\tilde{y}' = B\tilde{y} + \underbrace{g(x_1,y_1) - g(x_2,y_2)}_{=:\tilde{g}}$$

platí: $|\tilde{f}|, |\tilde{g}| \leq \sigma(|\tilde{x}| + |\tilde{y}|)$

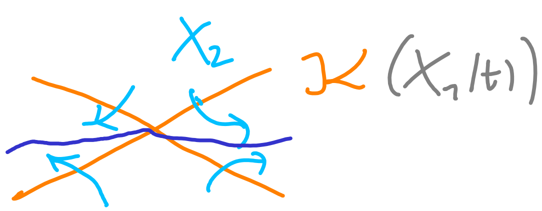
---

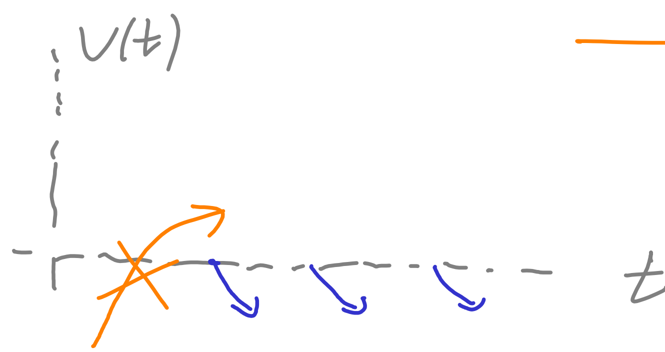
pomocná fce $V(t) := |\tilde{y}(t)|^2 - \mu^2 |\tilde{x}(t)|^2$

vidíme: $X_1(t) \in \mathcal{K}(X_2(t)) \iff V(t) \leq 0$

cíl: $V(0) \leq 0 \Rightarrow V(t) \leq 0, \ \forall t \geq 0$

stačí ověřit: $\boxed{V(t) = 0 \Rightarrow V'(t) < 0}$ $(*)$





výpočet: $V'(t) = \frac{d}{dt}\left(|\tilde{y}(t)|^2 - \mu^2 |\tilde{x}(t)|^2 \right)$

$$= 2\tilde{y}\cdot\tilde{y}' - \mu^2\, 2\tilde{x}\cdot\tilde{x}'$$

$$= 2\tilde{y}\cdot\left(B\tilde{y} + \tilde{g}\right) - 2\mu^2\tilde{x}\cdot\left(A\tilde{x} + \tilde{f}\right)$$

$$\leq -2\beta|\tilde{y}|^2 + 2|\tilde{y}||\tilde{g}| + 2\mu^2\varepsilon|\tilde{x}|^2 + 2\mu^2|\tilde{x}||\tilde{f}|$$

$$\leq -2\beta \overbrace{|\tilde{y}|^2}^{\mu^2|\tilde{x}|^2} + 2\sigma|\tilde{y}|\cdot(|\tilde{x}| + \underbrace{|\tilde{y}|}_{=\mu|\tilde{x}|})$$

$$+ 2\mu\varepsilon|\tilde{x}|^2 + 2\sigma\mu^2|\tilde{x}|(|\tilde{x}| + \overbrace{|\tilde{y}|}^{\mu|\tilde{x}|})$$

nechť: $V(t) = 0 \iff |\tilde{y}| = \mu|\tilde{x}|$, a tedy

$$V'(t) \leq 2|\tilde{x}|^2\cdot\left((-\beta+\varepsilon)\mu^2 + \sigma(1 + 2\mu + \mu^2)\right)$$

$$= -C|\tilde{x}|^2,$$ pokud $\sigma > 0$ je malé

vidím: $V'(t) < 0$, (ledaže $\tilde{x}(t) = 0$, leč pak $\tilde{y}(t) = 0$, a tedy $X_1 \equiv X_2$ ... triviální)

2\. podobně: nechť $\underbrace{|\tilde{y}(t)| \ge \mu |\tilde{x}(t)|}$, $\forall t \in I$

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \quad \frac{d}{dt}|\tilde{y}|^2 \le -2\gamma |\tilde{y}|^2$$

počítej:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}|\tilde{y}|^2} = 2\tilde{y}\cdot\tilde{y}'$$

$$= 2\tilde{y}\cdot(B\tilde{y} + \tilde{g})$$

$$\le -2\beta|\tilde{y}|^2 + 2\sigma|\tilde{y}|(|\tilde{y}| + \underbrace{|\tilde{x}|}_{\le \mu^{-1}|\tilde{y}|})$$

$$\le -2\underbrace{(\beta - \sigma(1+\mu^{-1}))}_{=:\gamma\ (>0)}\underbrace{|\tilde{y}|^2}$$

integruji:

$$|\tilde{y}(t)| \le e^{-\gamma(t-s)}\underbrace{|\tilde{y}(s)|}_{\le |X_1(s)-X_2(s)|}$$

pro $\forall s \le t \in I$

P.S.: $|\tilde{y}(s)| \le |\tilde{y}(s)| + |\tilde{x}(s)| = |X_1(s) - X_2(s)|$

L.S.: $|\tilde{y}(t)| = \frac{1+\mu^{-1}}{1+\mu^{-1}}|\tilde{y}(t)| = \frac{1}{1+\mu^{-1}}\left(|\tilde{y}(t)| + \underbrace{\mu^{-1}|\tilde{y}(t)|}_{\ge |\tilde{x}(t)|}\right)$

$$\ge \frac{1}{1+\mu^{-1}}|X_1(t) - X_2(t)|$$

$\square$

Věta 20.2. [asymptotické úplnost c.v.]

Nechť $\phi \in \mathcal{X}$ je jako ve Větě 20.1.
Nechť $\mu > l$ je velké, nechť σ je malé.

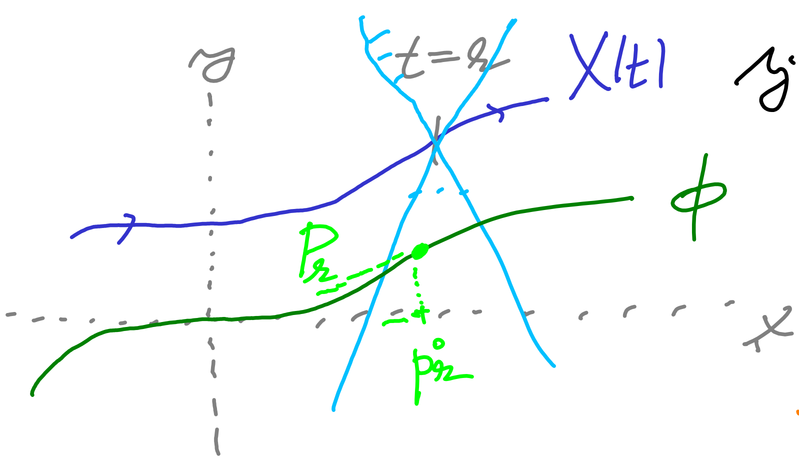
Pak: pro libovolné $X(t)$ řešení (1) existuje $p(t)$ řešení (2) t.ž.

$$|X(t) - P(t)| \leq c e^{-\gamma t} |X(0) - P(0)|, \quad \forall t \geq 0,$$

kde $P(t) = (p(t), \phi(p(t)))$. (řešení (1) na graf ϕ)

Navíc: $X(0)$ malé $\Rightarrow$ $p(0)$ malé.

Dk.: pro $k = 1, 2, \ldots$ volme $P_k^0 \in \operatorname{graf} \phi \cap V(X(k))$



tj. $P_k^0 = (p_k^0, \phi(p_k^0))$,

kde $p_k^0 \in \mathbb{R}^n$

označme: $P_k(t)$

... řešení (2) s poč. podm.

$P_k(k) = p_k^0$

BÚNO: $P_k \in \operatorname{int} V(X(k))$

$$\Rightarrow P_k(t) := (p_k(t), \phi(p_k(t)))$$

řeš. (1), a leží v grafu ϕ.

lokální porovnání: $P_r(t) \in V(X(t))$, pro $\boxed{\forall t \le r}$

$\Uparrow$

L. 20.4: $K(X(t))$ dopředně invariantní

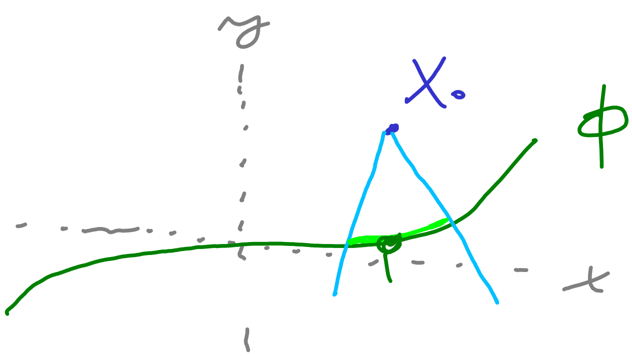
$\Updownarrow$

$K(X(t))^c = \operatorname{int} V(X(t))$ zpětně invariantní

musíc: $\Gamma = V(X(0)) \cap$ graf ϕ je omezená (*)

$\Uparrow$

$\boxed{\mu > \ell}$



dk: nechť $\tilde{\Pi} = (\tilde{x}, \phi(\tilde{x})) \in \Gamma$

1) $|y_0 - \phi(\tilde{x})| \ge \mu |x_0 - \tilde{x}|$

$$\phi(\tilde{x}) = \phi(x_0) + \phi(\tilde{x}) - \phi(x_0)$$

LS: $\le |y_0 - \phi(x_0)| + \underbrace{|\phi(\tilde{x}) - \phi(x_0)|}_{\le \ell |\tilde{x} - x_0|}$

$$\Rightarrow \mu|x_0-\tilde{x}| \le |y_0-\varphi(x_0)| + \ell|\tilde{x}-x_0|$$

$$|x_0-\tilde{x}| \le \underbrace{\frac{1}{\mu-\ell}}_{=:\,C}\cdot|y_0-\varphi(x_0)|$$

$\Rightarrow \exists$ podposl. $P_k(0) \to P_0 \in \operatorname{graf}\varphi$

$$P_0 = (p_0, \varphi(p_0))$$

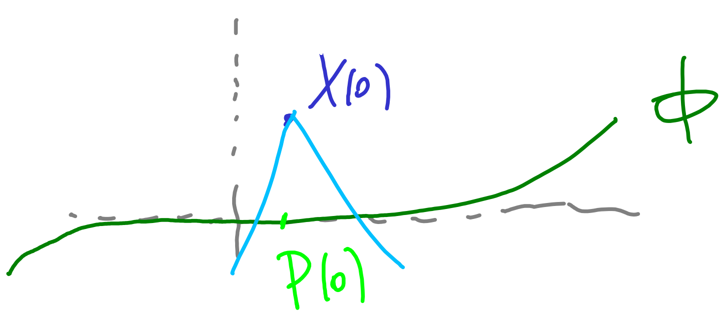
$k\to\infty \Rightarrow$ (Arz.-Asc.) $\exists$ podposl. $p_k(t) \overset{loc}{\rightrightarrows} p(t)$, v $\mathbb{R}$

kde $\boxed{p(t)\ \text{řeší}\ (2),\ p(0)=p_0}$

víme: $P(t) \in V(X(t)),\ \forall t \in \mathbb{R}$

L. 20.4: $|X(t)-P(t)| \le c\,e^{-\gamma t}|X(0)-P(0)|.$

Dodatek:



$\square$

Důsledek: princip redukce stability:

(0,0) stabilní (resp. asympt. stabilní) pro (1)

$\Updownarrow$

0 má tuto vlastnost pro (2)

Dk: ... několik implikací,

zřejmé: (0,0) (as.) stabilní pro (1) $\Rightarrow$ 0 (as.) stab. pro (2)

0 nestabilní pro (2) $\Rightarrow$ (0,0) nest. pro (1)

ukážeme: 0 (as.) stab. pro (2) $\overset{?}{\Longrightarrow}$ (0,0) (as.) stab. pro (1)

nechť $X=(x,y)$ řeší (1), nechť $X(0)$ je blízko (0,0)

dle V. 20.2: $\exists\, P(0) \in \operatorname{graf}\phi \cap V(X(0))$ blízko (0,0) t.ž.

$$X(t) = P(t) + O(e^{-\gamma t}),\ t\to\infty$$

leč: $P(t) = (p(t), \phi(p(t)))$, kde $p(t)$ řeší (2) navíc $p(0)$ blízko 0

$\Rightarrow$ $p(t)$ je vektor 0, za $\forall t \geq 0$
$(\to 0)$

$\Rightarrow$ Tako je za $(p(t), \phi(p(t))) = P(t)$

" — $X(t)$