(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^a}\,dx$ KONV. $\Leftrightarrow$ $a \in (1,3)$

(i) $x \in (0,1]$: $f(x) \sim x^{2-a}$, $x \to 0+$ … $2-a > -1$

$\boxed{a<3}$

(ii) $x \in [1,+\infty)$: $|f(x)| \leq \frac{1}{x^a}$; tj. $a > 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)$ konv.

zbývá: $a \leq 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ div. …

stačí pro $a=1$, neboť $f(x) \geq \frac{\sin^2 x}{x}$, $\forall a<1$.

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}.$$

avšak $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}$ div., $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}$ konv. (Dirichlet)

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ div.

---

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(e^x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \ldots + \int_0^{+\infty} \ldots = I_1 + I_2$ KONV., neboť:

(i) $x<0$: $0 \leq \sin e^x \leq e^x \Rightarrow I_1 \leq \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = 1$ … konv.

(ii) $x>0$: $\boxed{\text{subst. } e^x = y} \rightsquigarrow I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy$ konv.

Pozn.: víme již, že $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}$, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a}$ konvergují $\Leftrightarrow a>0$

③ $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} \operatorname{arctg} x \, dx$ KONV. $\Leftrightarrow$ $a \in (0,3)$

(i) $x \in (0,1]$: $f(x) \sim x^{2-a}$, $x \to 0+$ $\Rightarrow$ $a < 3$

(ii) $x \in [1,+\infty)$: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}$ konv. $\Leftrightarrow$ $a > 0$,

$g(x) = \operatorname{arctg} x$ .. omezené, monotónní, odražené od nuly $\Rightarrow$ nemění konvergenci.

---

④ $\int_0^1 \frac{1}{x^a} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ $\left|\begin{array}{l}\text{subst.}\\ \frac{1}{x} = y\end{array}\right|$ $= \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{2-a}} dy$ KONV.

$\Updownarrow$

$a < 2$

---

⑤ $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(x - \frac{1}{x}\right) dx$ .. KONV., neboť:

(i) $x \in (0,1]$: $|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ konv.

(ii) $x \geq 1$: $\sin\left(x - \frac{1}{x}\right) = \sin x \cdot \cos\frac{1}{x} - \cos x \cdot \sin\frac{1}{x}$

kde $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \cos\frac{1}{x}$ konv. (Abel-Dirichlet; $\cos\frac{1}{x}$ omez., monotónní pro $x \geq 1$)

podobně $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \cdot \sin\frac{1}{x}$ konv.