2 1. cvičení

Věta. *[Pick et al., 2019, 9.4.1. Věta] (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce ,$g : [a, b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b)$. Nechť dále je f spojitá na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Věta. *[Pick et al., 2019, 9.4.5. Věta] (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu) Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou spojité nezáporné funkce na $[a, b)$. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, +\infty)$, pak $g \in \mathcal{N}(a, b)$ právě tehdy, když $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Věta. *[Pick et al., 2019, 9.4.8. Věta] (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu) Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k funkci f na $[a, b)$. Dále nechť $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ je na $[a, b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:*

1. *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.*
2. *Je-li F omezená na $[a, b)$ a $\lim_{x\to b-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Vyšetřete konvergenci následujících integrálů ($\alpha \in \mathbf{R}$ je parametr):

$$1.\ \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 5x + 3}}, \quad 2.\ \int_0^1 \frac{\log x}{1 - x^2} dx, \quad 3.\ \int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^\alpha} dx$$

$$5.\ \int_0^\infty \frac{x \sin x}{1 + x^2} dx \text{ (i absolutní konvergenci)}, \quad 6.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x) \tan^\alpha x \, dx \quad .$$

Nalezněte objemy

4. jednotkové koule, 7. anuloidu.

Výsledky a návody:

1. Konverguje ; U ∞ limitně srovnáme s $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

2. Konverguje; U 1 víme $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\log x}{1 - x} = 1$, a proto limitně srovnáme s 1.

U 0 srovnáme s $\log x$ a $\int_0^1 |\log x| < \infty$ zjistíme z per partes.

3. Konverguje pro $\alpha \in (2, 4)$; U 0 limitně srovnáme s $\frac{x^3}{x^\alpha}$.

U ∞ limitně srovnáme s $x^{1-\alpha}$.

5. Konverguje neabsolutně. Z Abel-Dirichleta víme, že $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konverguje a

$$\int_0^\infty \Big(\frac{x \sin x}{1 + x^2} - \frac{\sin x}{x}\Big) dx = \int_0^\infty \frac{-\sin x}{(1 + x^2)x} dx \text{ snadno konverguje - u } \infty \text{ srovnej s } \frac{1}{x^3}.$$

Nekonverguje absolutně:

$$\int_0^\infty \frac{x|\sin x|}{1 + x^2} dx \geq \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{x|\sin x|}{1 + x^2} dx \geq 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{k\pi}{1 + (k + 1)^2\pi^2} = +\infty.$$

6. Konverguje pro $\alpha \in (-3, 1)$; U 0 limitně srovnáme s $(1 - \cos x)x^\alpha \sim x^{2+\alpha}$.

U $\dfrac{\pi}{2}$ se chová jako $\dfrac{\log(\cos x)}{\cos^\alpha x}$. Vzhledem k $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = 1$

je tato funkce stejně integrovatelná, jako funkce $\dfrac{\log y}{y^\alpha}$ u 0, tedy pro $\alpha < 1$.

4. $\frac{4}{3}\pi$; Koule vznikne rotací plochy pod grafem funkce $y(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1,1)$ okolo osy x. Objem je tedy

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (\sqrt{1-x^2})^2 \, dx = \frac{4}{3}\pi \, .$$

7. $4\pi^2$; Uvažujme anuloid vzniklý rotací kruhu $\{[x,y] : x^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$ okolo osy x. Anuloid vznikne jako rozdíl tělesa vzniklého rotací plochy pod grafem funkce $y_1(x) = 2 + \sqrt{1-x^2}$ a funkce $y_2(x) = 2 - \sqrt{1-x^2}$.

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left[(2+\sqrt{1-x^2})^2 - (2-\sqrt{1-x^2})^2\right] dx = 16\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx \, .$$

3 2. cvičení

Věta. *[Pick et al., 2019, 9.4.1. Věta] (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \le f(x) \le g(x)$, $x \in [a,b)$. Nechť dále je f spojitá na $[a,b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a,b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$.*

Věta. *[Pick et al., 2019, 9.4.5. Věta] (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu) Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou spojité nezáporné funkce na $[a,b)$. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, +\infty)$, pak $g \in \mathcal{N}(a,b)$ právě tehdy, když $f \in \mathcal{N}(a,b)$.*

Věta. *[Pick et al., 2019, 9.4.8. Věta] (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu) Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k funkci f na $[a,b)$. Dále nechť $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ je na $[a,b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:*

1. *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.*
2. *Je-li F omezená na $[a,b)$ a $\lim_{x\to b-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.*

Vyšetřete konvergenci následujících integrálů ($\alpha \in \mathbf{R}$ je parametr):

1.
$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\log(1+e^x)}dx$$
Návod/řešení: Konverguje, u 0 srovnej s $1/\sqrt{x}$ a u ∞ srovnej s $2/x^{\frac{3}{2}}$.

2.
$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2}dx$$
Návod/řešení: Konverguje pro $\alpha > 0$, pro $\alpha > 0$ na $(-\infty, -1]$ a $[1, \infty)$ srovnej s $e^{-\alpha|x|}$ nebo limitně srovnej s $\frac{1}{x^2}$. Pro $\alpha \le 0$ srovnej s 1. Na $[-1, 1]$ je funkce spojitá.

3.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\Big(\frac{1}{\sin x}\Big)dx$$
Návod/řešení: Konverguje. Použijte srovnávací kritérium a $|f(x)| \le 1$.

4.
$$\int_0^\infty \sin\Big(\sqrt{x^{2\alpha}+1} - x^\alpha\Big)dx$$
Návod/řešení: Konverguje pro $\alpha > 1$, U $+\infty$ limitně srovnáme se $\sin\Big(\frac{1}{\sqrt{x^{2\alpha}+1}+x^\alpha}\Big) \sim \frac{1}{x^\alpha}$ pro $\alpha > 0$ a pro $\alpha \le 0$ u $+\infty$ limitně srovnáme s 1. To konverguje pro $\alpha > 1$ a pro $\alpha > 1$ je funkce u 0 spojitá.

5.
$$\int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^\alpha(1/x)}\,dx$$
Návod/řešení: Konverguje pro $\alpha < \frac{3}{2}$, u 0 se chová jako $\frac{1}{\log^\alpha(1/x)}$, a tedy limitním srovnáním s $\frac{1}{\sqrt{x}}$ konverguje. U 1 limitně srovnáme s $\frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^\alpha}$.

6.
$$\int_0^\infty (\pi - 2\arctan x)^\alpha dx$$
Návod/řešení: Konverguje pro $\alpha > 1$. U 0 je spojitá. U ∞ limitně srovnáme s $\frac{1}{x^\alpha}$,neboť pomocí l'Hospitala zjistíme $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\arctan x}{\frac{1}{x}} = 4$.

7. Nalezněte obsah povrchu jednotkové koule v $\mathbf{R}^3$. Návod/řešení: $S = 4\pi$. Koule vznikne rotací funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$ kolem osy x. Tedy $S = 2\pi \int_a^b f\sqrt{1+(f')^2} = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})^2} = 2\pi \int_{-1}^1 1\,dx$.

8. Nalezněte obsah plochy mezi grafy funkcí $\frac{x^2}{2}$ a $\frac{1}{1+x^2}$. Návod/řešení: $S = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$. Z rovnice $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{1+x^2}$ dostaneme $x = \pm 1$. Pak $S = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[\arctan x - \frac{x^3}{6}\right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$.

9. Pomocí Riemanova integrálu spočtěte $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$, $p > 1$. Návod/řešení: $\frac{1}{p+1}$, $\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}\Big((\frac{1}{n})^p + (\frac{2}{n})^p + \ldots + (\frac{n}{n})^p\Big)$. Toto je Riemannovský součet funkce x^p, a tedy $\lim = \int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}$.

10. Buď $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor. Řekneme, že $A \in \mathcal{A}$ je *atom*, pokud pro každou $B \in \mathcal{A}$ platí $B \subset A \implies (B = A \vee B = \emptyset)$. Ukažte, že existuje σ-algebra, která má pouze jediný atom, totiž $\emptyset$.

    Návod/řešení: Stačí definovat $X = (0,1) \setminus \bigcup_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{2^j} k2^{-j}$ a $A \in \mathcal{A}$, pokud je možné ha zapsat ve tvaru $(k2^{-j}, K2^{-j})$ s k, K, j splňujícími $j \in \mathbb{N}$, $k < K$, $k, K \in \{0, \ldots, 2^j\}$.

11. Pokud σ-algebra obsahuje nekonečný spočetný systém neprázdných po dvou disjunktních množin, je nespočetná. Dokažte.

    If a σ-algebra contains infinite coutable system of nonempty pairwise disjoint sets, it is uncountable. Prove.

12. [Rudin, 1977, Sekce 1, Cvičení 1] Existuje nekonečná σ-algebra, která má pouze spočetně mnoho prvků?

    Návod/řešení: Neexistuje. Buď má alespoň spočetně atomů nebo má pouze konečně atomů. Pak ukážeme, že do ní patří striktně klesající posloupnost množin. V obou případech existuje spočetný systém neprázdných po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}$. σ-algebra obsahující takový systém už musí být nespočentná.

13. [Rudin, 1977, Sekce 1, Cvičení 5] Dokažte, že množina všech bodů, v nichž konverguje posloupnost měřitelných funkcí, je měřitelná množina.

    Návod/řešení: Označme posloupnost funkcí $f_n : X \to \mathbb{R}$, $A = \{x \in X, \exists a \in \mathbb{R} : f_n(x) \to a \quad \text{pro } n \to +\infty\}$. Z BC podmínky plyne

    $$A = \bigcap_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{n,m > n_0} \{|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{j}\},$$

    tedy A je měřitelná.

Věta (Zobecněná Leviho věta). *Buďte funkce* $f_n : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ *měřitelné pro* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Jsou-li* $f_n \nearrow f$ *pro* $n \to +\infty a \int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu > -\infty$, *platí* $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \nearrow \int_X f \, \mathrm{d}\mu$.
2. *Jsou-li* $f_n \searrow f$ *pro* $n \to +\infty a \int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu < +\infty$, *platí* $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \searrow \int_X f \, \mathrm{d}\mu$.

Věta (Lebesgueova; o konvergentní majorantě). *Buď* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor s mírou a* f_n, f *měřitelné funkce takové, že* $f_n \to f$ *s.v. Nechť dále existuje funkce* $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *taková, že* $|f_n| \leq g$ *s.v. pro všechna* $n \in \mathbb{N}$. *Pak* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *a* $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$.

Nalezněte $\lim_{n\to\infty}$ z následujících integrálů:

1. $\int_0^1 x^n \, dx$, Návod/řešení: 0, Z Lebesgueovy věty a $0 \leq x^n \leq x$ nebo z Leviho.
2. $\int_0^{100} \frac{e^{x^3}}{1+nx} \, dx$, Návod/řešení: 0, Z Lebesgueovy věty a $0 \leq f_n \leq \frac{e^{x^3}}{1+x}$ nebo z Leviho.
3. $\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} \, dx$, Návod/řešení: 0, Z Lebesgueovy věty a $0 \leq f_n \leq \frac{1}{2}$.
4. $\int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n} e^{-x} \cos x \, dx$, Návod/řešení: 0, Z Lebesgueovy věty a $|f_n| \leq e^{-x} \frac{x+n}{n} \leq e^{-x}(x+1)$.
5. $\int_0^1 nx^{15} \sin\left(\frac{x^2}{n}\right) \, dx$, Návod/řešení: $\frac{1}{18}$; Bodová limita je $x^{17} \frac{\sin \frac{x^2}{n}}{\frac{x^2}{n}} \to x^{17}$. Z Lebesgueovy věty a $|f_n| \leq nx^{15} \frac{x^2}{n} = x^{17}$.
6. $\int_0^\infty e^{-x^n} \, dx$, Návod/řešení: 1; Z Lebesgueovy věty a $f_n \leq 1$ na $(0,1)$ a $f_n \leq e^{-x}$ na $(1,\infty)$, nebo z Leviho.
7. $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n \sqrt[n]{x}} \, dx$, Návod/řešení: 1; Bodová limita je $\frac{1}{e^x \cdot 1}$ a $\int_0^\infty e^{-x} = 1$. Z Lebesgueovy věty a $f_n \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0,1)$ a $f_n \leq \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n} \leq \frac{1}{1+\frac{x}{n}n+\frac{x^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}} \leq \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}$ na $(1,\infty)$.

Spočtěte (za pomoci Heineho věty) $\lim_{a\to\infty} F(a)$ a $\lim_{a\to 0+} F(a)$ pro $F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{1+x} \, dx$, Návod/řešení: 0 a ∞; Pro $a_n \to \infty$ a $a_n \geq 1$ platí $\frac{e^{-a_n x^2}}{1+x} \leq e^{-x^2}$, což je integrovatelné. Z Lebesgue a $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-a_n x^2}}{1+x} = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-a_n x^2}}{1+x} = 0$, a tedy podle Heineho $\lim_{a\to\infty} F(a) = 0$. Zřejmě $e^{-ax^2} \geq \frac{1}{e}$ pro $x \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$. Tedy $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{1+x} \geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \frac{1}{e(1+x)} = \frac{1}{e} \log\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + 1\right) \overset{a\to 0+}{\to} \infty$.

[Rudin, 1977, Sekce 1, cvičení 9] Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ měřitelný prostor, $f : X \to [0, +\infty]$, $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = c \in (0, +\infty)$, $\alpha \in (0, +\infty)$. Ukažte, že

$$\lim_{x\to+\infty} \int_X n \lg(1 + (f/n)^\alpha) \, \mathrm{d}\mu = \begin{cases} +\infty, & \text{pro } \alpha \in (0,1), \\ c, & \text{pro } \alpha = 1, \\ 0, & \text{pro } \alpha \in (1, +\infty). \end{cases}$$

5 4. cvičení

Důsledek (Levi). *Pro nezáporné měřitelné funkce f_n na X platí*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Důsledek (Lebesgue). *Jsou-li f_i měřitelné, $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ konverguje s.v., a $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|\sum_{i=1}^{n} f_i| \leq g$ s.v. pro všechna n, pak $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a*

$$\int \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i\right) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \, d\mu.$$

Vyjádřete následující integrály jako součet řady:

1.
$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} \, dx,$$

   Návod/řešení: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2}$;

   Rozvineme do $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^{n+1}}{n}$. Podle Leviho na $\sum_{n=1}^{\infty} -f_n$.

2.
$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} \, dx,$$

   Návod/řešení: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$;

   Rozvineme do $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x e^{-(n+1)x}$. Podle Lebesgua

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int |f_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-(n+1)x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < \infty.$$

3.
$$\int_0^1 \frac{x^p \log(x)}{1+x^2} \, dx, \text{ pro } p > 0,$$

   Návod/řešení: $\sum_0^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+p+1)^2}$;

   Rozvineme do $\sum_{n=0}^{\infty} x^p \log(x) (-1)^n x^{2n}$. Podle Lebesgua

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int |f_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x^p (-1) \log(x) x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+p+1)^2} < \infty.$$

4.
$$\int_0^{\infty} \log\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) dx,$$

   Návod/řešení: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1+(-1)^n}{n^2}$; Rozvineme jako

$$\log(1-e^{-x}) - \log(1+e^{-x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-e^{-nx}}{n} + \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}.$$

   Podle Lebesgua

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} 2\frac{e^{-nx}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} < \infty.$$

5.

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\, dx \text{ (pro } p, q > 0) \, dx,$$

Návod/řešení: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p+qn}$;

Zřejmě $\leq x^{p-1}$, a tedy integrál konverguje. Rozvineme do $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{p+qn-1}$. Podle Lebesgueovy věty pro funkce $F_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$

$$|\sum_{n=0}^{N} f_n| = |\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{p+qn-1}| = x^{p-1}\frac{1-(-x)^{Nq+1}}{1+x^q} \leq x^{p-1}\frac{2}{1+x^q} \in L^1(0,1).$$

6.

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\cos(\sqrt{x})\, dx.$$

Návod/řešení: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$;

Rozvineme do $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-x}\frac{x^n}{(2n)!}$. Podle Lebesgua $\sum_{n=0}^{\infty}\int |f_n| = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{x^n}{(2n)!}$. Indukcí snadno $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} = (n)!$ a $\sum \frac{n!}{(2n)!} < \infty$.

6 5. cvičení

Věta (Lebesgueova; o spojité závislosti integrálu na parametru). *Buďte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, T metrický prostor a $f : T \times X \to \mathbb{R}$ funkce. Nechť dále*

(i) *$f(t, \cdot)$ je měřitelná pro každé $t \in T$,*

(ii) *$f(\cdot, x)$ je spojitá na T pro s.v. $x \in X$,*

(iii) *existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že pro všechna $t \in T$ je $|f(t, \cdot)| \leq g$ s.v.*

Pak $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in T$ a funkce

$$F : t \mapsto \int f(t, \cdot) \, \mathrm{d}\mu$$

je spojitá na T.

U následujících integrálů vyšetřete pro jaká α konvergují a vyšetřete spojitost na definičním oboru:

1.
$$\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{1 + x^2} \, dx,$$
Návod/řešení: spojitá na $\mathbf{R}$; $|f(x, \alpha)| \leq \frac{1}{1+x^2} \in L^1$.

2.
$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}}{1 + x} \, dx,$$
Návod/řešení: spojitá na $(0, +\infty)$; Pro $\alpha \in [\delta, \infty)$ je $|f(x, \alpha)| \leq e^{-\delta x^2} \in L^1$.

3.
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} \, dx \text{ a nalezněte i } \lim_{\alpha \to \infty} \text{ a } \lim_{\alpha \to 0},$$
Návod/řešení: spojitá na $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;

Pro $|\alpha| > \delta$ je $|f(x, \alpha)| \leq \frac{1}{\sqrt{\delta^2}} = \frac{1}{\delta} \in L^1$.

Pro $\alpha \in [1, \infty)$ je 1 integrovatelná majoranta a podle Lebesguea a Heineho je

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} = \int_0^1 \lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} = \int_0^1 0 = 0.$$

Pro $|\alpha| \leq \delta$ je $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} \geq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+\delta^2}} \geq \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \log \delta \overset{\delta \to 0+}{\to} \infty$.

4.
$$\int_0^\infty \frac{x}{1 + x^\alpha} \, dx,$$
Návod/řešení: spojitá na $(2, \infty)$; Pro $\alpha \in [2 + \delta, \infty)$ je

$$|f(x, \alpha)| \leq \begin{cases} \frac{x}{1+x^{2+\delta}} & \text{pro } x > 1 \\ 1 & \text{pro } x < 1. \end{cases}$$

5.

$$\int_0^\infty \frac{\alpha e^{-\alpha x^2}}{1+x}\,dx \text{ a nalezněte i } \lim_{\alpha\to 0+},$$

Návod/řešení: spojitá na $[0,\infty)$; Pro $\alpha \in [\delta, K]$ je $|f(x,\alpha)| \le \frac{Ke^{-\delta x^2}}{1+x} \le Ke^{-\delta x^2} \in L^1$.

Pro spojitost v 0 zprava musíme spočítat $\lim_{\alpha\to 0+} F(\alpha)$. Substitucí $y = \sqrt{\alpha}x$ odhadneme $\int_0^\infty \frac{\alpha e^{-\alpha x^2}}{1+x} \le \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x^2} = \int_0^\infty \sqrt{\alpha} e^{-y^2} = \sqrt{\alpha}\int_0^\infty e^{-y^2} \overset{\alpha\to 0+}{\to} 0$.

6.

$$\int_0^1 \frac{1-x^\alpha}{\log x}\,dx,$$

Návod/řešení: spojitá na $(-1,\infty)$; V 1 lze spojitě dodefinovat a u 0 standardně srovnáme s $\frac{x^\alpha}{\log x}$.

Pro $\delta < 1$ a $\alpha \in [-1+\delta, 0]$ máme $|f(x,\alpha)| \le \frac{x^{-1+\delta}-1}{|\log x|}$ a pro $\alpha \in [0,K]$ je $|f(x,\alpha)| \le \frac{1-x^K}{|\log x|}$.

Věta (Záměna integrálu a derivace). *Buď $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval a $f : I \times X \to \mathbb{R}$ funkce. Nechť dále*

(i) *$f(t,\cdot)$ je měřitelná pro každé $t \in I$,*

(ii) *existuje $N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$, taková, že pro všechna $x \in X \setminus N$ a $t \in I$ existuje vlastní derivace $\frac{d}{dt} f(t,x)$,*

(iii) *existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že pro všechna $x \in X \setminus N$ a $t \in I$, $|\frac{d}{dt} f(t,x)| \le g(x)$,*

(iv) *existuje $t_0 \in I$ takové, že $f(t_0,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.*

Pak $f(t,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in I$, funkce

$$F : t \mapsto \int_X f(t,\cdot)\,\mathrm{d}\mu$$

je diferencovatelná na I a pro $t \in I$ platí

$$F'(t) = \int_X \frac{d}{dt} f(t,\cdot)\,\mathrm{d}\mu.$$

Spočtěte následující integrály (pomocí věty o záměně derivace a integrálu). Obor konvergence je u každého příkladu napsán.

$$1.\ \int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}},\ a > -1;\quad 2.\ \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2},\ a,b > 0\ (\text{Rada: } \int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2})$$

$$3.\ \int_0^\infty \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x},\ a,b > 0 \text{ nebo } a,b < 0;\quad 4.\ \int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin ax}{x},\ k > 0,\ a \in \mathbf{R};$$

$$5.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x),\ a,b > 0.$$

Návody:

$$1. \frac{\ln(a+1)}{2};\ \left|\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\right| = \left|xe^{-(a+1)x^2}\right| \le xe^{-\delta x^2} \text{ pro } a \in (-1+\delta,\infty).$$

$$2. \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a};\ \left|\frac{\partial f(x,a,b)}{\partial a}\right| = \left|-e^{-ax^2}\right| \le e^{-\delta x^2} \text{ pro } a \in (\delta,\infty).$$

$$\int_0^\infty -e^{-ax^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \Rightarrow F(a,b) = C(b) - \sqrt{\pi a} \text{ a } F(b,b) = 0.$$

$$3. \frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b};\ \left|\frac{\partial f(x,a,b)}{\partial a}\right| = \left|\frac{1}{1+a^2x^2}\right| \le \frac{1}{1+\delta^2x^2} \text{ pro } |a| \ge \delta.$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+a^2x^2} = \frac{\pi}{2a} \text{ a } F(b,b) = 0.$$

$$4.\ \arctan\frac{a}{k};\ \left|\frac{\partial f(x,a,k)}{\partial a}\right| = \left|e^{-kx}\cos ax\right| \le e^{-kx} \text{ pro } a \in \mathbf{R}.$$

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cos ax = \left[e^{-kx}\frac{a\sin ax - k\cos ax}{a^2+k^2}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{k}{a^2+k^2} \text{ a } F(0,k) = 0.$$

$$5.\ \pi\ln\frac{|a|+|b|}{2};\ \left|\frac{\partial f(x,a,b)}{\partial a}\right| = \left|\frac{2}{a}\frac{a^2\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\right| \le \frac{2}{\delta} \text{ pro } |a| > \delta$$

$$\text{Substitucí } \tan x = t \text{ spočteme } \frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = \frac{\pi}{a+b}.$$

8 8. cvičení

Důsledek (Fubiniova věta pro zúplněnou součinovou míru). *Buďte $(X,\mathcal{A},\mu)$ a $(Y,\mathcal{B},\nu)$ dva úplné prostory se σ-konečnými měrami. Pak pro každou funkci $f\in\mathcal{L}^*(\mu\hat{\otimes}\nu)$ platí:*

1. *funkce $f^y: x\mapsto f(x,y)$ je měřitelná na X pro s.v. $y\in Y$ a funkce $f_x: y\mapsto f(x,y)$ je měřitelná na Y pro s.v. $x\in X$*
2. *funkce $x\mapsto\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ je měřitelná na X a funkce $y\mapsto\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ je měřitelná na Y*
3. $$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\hat{\otimes}\nu)=\int_X\Big(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\Big)\,d\mu(x)=\int_Y\Big(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\Big)\,d\nu(y).$$

Za pomoci Fubiniovy věty ve dvou dimenzích spočtěte

$$3.\ \int_0^1\frac{x^b-x^a}{\log x}\,dx \text{ pro } a,b>-1,\quad 5.\ \int_0^\infty\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,dx \text{ pro } a,b>0.$$

Nalezněte míru následujících podmnožin $\mathbf{R}^2$

$$1.\ \{x^2<y<x+2\},\quad 2.\ \Big\{y\le x,\ 0<y<\frac{1}{x^2}\Big\}.$$

Spočtěte následující dvourozměrné integrály

$$4.\ \int_M (x^2+y^2)\,dxdy \text{ pro } M=\{|x|+|y|\le 1\},\quad 6.\ \int_M e^{-(x+y)}dxdy \text{ pro } M=\{0\le x\le y\},$$

$$7.\ \int_M\frac{x^2}{y^2}\,dxdy \text{ pro } M \text{ omezenou mezi křivkami } x=2,\ y=x \text{ a } xy=1,$$

$$8.\ \int_M(\sqrt{x}+y)\,dxdy \text{ pro } M=\{x^2+y^2\le x\}$$

Návody:

$$1. \frac{9}{2};\ \int_{-1}^2\int_{x^2}^{x+2}1\,dy\,dx=\int_{-1}^2(x+2-x^2)\,dx.$$

$$2.\ \frac{3}{2};\ \int_0^1\int_0^x 1\,dy\,dx+\int_1^\infty\int_0^{\frac{1}{x^2}}1\,dy\,dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^\infty\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$3. \log\frac{b+1}{a+1};\ \int_0^1\frac{x^b-x^a}{\log x}=\int\int_M x^y=\int_a^b\frac{1}{y+1}=\log\frac{b+1}{a+1}.$$

$$4.\ \frac{2}{3};\ 4\int_0^1\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy\,dx=4\int_0^1\Big((1-x)x^2+\frac{(1-x)^3}{3}\Big)\,dx$$

$$5. \sqrt{\pi b}-\sqrt{\pi a};\ \int_0^\infty\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}=\int\int_M e^{-yx^2}=\int_a^b\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}=\sqrt{\pi b}-\sqrt{\pi a}.$$

$$6.\ \frac{1}{2};\ \int_0^\infty\int_0^y e^{-(x+y)}\,dy\,dx=\int_0^\infty e^{-y}(1-e^{-y})\,dy$$

$$7.\ 2\frac{1}{4};\ \int_1^2\int_{\frac{1}{x}}^x\frac{x^2}{y^2}\,dy\,dx=\int_1^2 x^2\Big(x-\frac{1}{x}\Big)\,dx$$

$$8.\ \frac{8}{15};\ \int_0^1\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}(\sqrt{x}+y)\,dy\,dx=2\int_0^1\sqrt{x}\sqrt{x-x^2}=2\int_0^1(1-z)\sqrt{z}\,dz$$

9 9. cvičení

Věta (Věta o substituci). *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus a $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ Lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak*

$$\int_U f(\varphi(x))\,|\mathcal{J}\varphi(x)|\,dx = \int_{\varphi(U)} f(y)\,dy,$$

má-li jedna strana smysl.

Je-li navíc $B \subset \varphi(U)$ Lebesgueovsky měřitelná množina, platí

$$\int_{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(x))\,|\mathcal{J}\varphi(x)|\,dx = \int_B f(y)\,dy,$$

má-li jedna strana smysl.

Spočtěte následující dvourozměrné integrály

$$1.\ \int_M \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy \text{ pro } M = \{x^2+y^2 \le 1\},$$

$$2.\ \int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy \text{ pro } M = \{x^2+y^2 \le x\}.$$

Nalezněte míru následujích množin $M \subset \mathbf{R}^2$

$$3.\ \{(x+y)^3 < xy,\ x \ge 0,\ y \ge 0\},\ 4.\ \{x^3+y^3 < xy,\ x > 0,\ y > 0\},\ 5.\ \{2\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|} \le 1\},$$

$$6.\ \{1 < xy < 2, y < x < 3y\},\ 7. \{y < x^2 < 4y,\ 2x < y^2 < 3x\}\ .$$

Návody:

1. 2π; Polární souřadnice a $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \frac{r\,d\varphi}{\sqrt{1-r^2}}\Big)\,dr$

2. 2; Polární souřadnice a $0 \le x^2+y^2 \le x$ dá $0 \le r \le \cos\varphi$. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\cos\varphi} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2}}\Big)\,d\varphi.$

3. $\frac{1}{60}$; Transformace $x = r\cos^2\varphi$ a $y = r\sin^2\varphi$

transformuje M na $0 \le r \le \sin^2\varphi\cos^2\varphi$ a $J_f = 2r\sin\varphi\cos\varphi$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} 2r\sin\varphi\cos\varphi\,dr\Big)\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\varphi\cos^5\varphi\,d\varphi$$

4. $\frac{1}{6}$; Transformace $x = r\cos^{\frac{2}{3}}\varphi$ a $y = r\sin^{\frac{2}{3}}\varphi$

transformuje M na $0 \le r \le \sin^{\frac{2}{3}}\varphi\cos^{\frac{2}{3}}\varphi$ a $J_f = \frac{2}{3}r\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\sin^{\frac{2}{3}}\varphi\cos^{\frac{2}{3}}\varphi} \frac{2}{3}r\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi\,dr\Big)\,d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$

5. $\frac{1}{6}$; Transformace $x = \frac{1}{4}r\cos^4\varphi$ a $y = r\sin^4\varphi$

transformuje $M \cap \{x > 0,\ y > 0\}$ na $0 \le r \le 1,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ a tam $J_f = r\sin^3\varphi\cos^3\varphi > 0$.

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^1 r\sin^3\varphi\cos^3\varphi\,dr\Big)\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi$$

6. $\frac{1}{2}\log 3$; Transformace $u = xy,\ v = \frac{x}{y}$ neboli $x = \sqrt{uv}$ a $y = \sqrt{\frac{u}{v}}$

transformuje M na $1 \le u \le 3,\ 1 < v < 3$ a tam $J_f = \frac{1}{2v} > 0$. $\int_1^2 \Big(\int_1^3 \frac{1}{2v}\, dv\Big)\, du$.

7. 1; Transformace $u = \frac{x^2}{y},\ v = \frac{y^2}{x}$ neboli $x = \sqrt[3]{uv^2}$ a $y = \sqrt[3]{u^2 v}$

transformuje M na $1 \le u \le 4,\ 2 < v < 3$ a $J_f = \frac{1}{3}$. $\int_1^4 \Big(\int_2^3 \frac{1}{3}\, dv\Big)\, du$.

10 10. cvičení

Pomocí Fubiniovy věty nalezněte míru následujích podmnožin $\mathbf{R}^3$

$$1.\ \{0 < x < 3,\ 0 < y < 3,\ xy < z < 1\},\quad 2.\ \{x \ge 0,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le 1 - x - y\},$$

3. M omezená plochami $z = 1$ a $z = x^2 + y^2$.

Pomocí Fubiniovy věty spočtěte následující trojrozměrné integrály

4. $\int_M x\, dxdydz$ pro M omezenou $x = 0,\ y = 0\, z = 0,\ y = 3$ a $x + z = 2$

5. $\int_M z^2\, dxdydz$ pro $M = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2z\}$.

Pomocí Fubiniovy věty nalezněte míru následují podmnožiny $\mathbf{R}^4$

6. $\{x, y, z, w \in [0, 1],\ xy < z^2 w\}$.

Pomocí věty o substituci spočtěte následující trojrozměrné integrály

7. $\int_M 1\, dxdydz$ pro $M = \{x^2 + y^2 < z < 1\}$,

8. $\int_M z\, dxdydz$ pro $M = \{x^2 + y^2 \le z^2,\ z \in (0, 2)\}$,

9. $\int_M 1\, dxdydz$ pro $M = \Big\{\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} \le \frac{1}{1 + x^2}\Big\}$,

10. $\int_M 1\, dxdydz$ pro $M = \Big\{(2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 \le 1\Big\}$.

Návody:

1. $\log 9 - \frac{7}{12}$; $\int_0^3 \int_0^{\min(\frac{1}{x}, 3)} \int_{xy}^1 1\, dz\, dy\, dx =$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \int_0^3 \int_{xy}^1 1\, dz\, dy\, dx + \int_{\frac{1}{3}}^3 \int_0^{\frac{1}{x}} \int_{xy}^1 1\, dz\, dy\, dx\ .$$

2. $\frac{1}{6}$; $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1\, dz\, dy\, dx$

3. $\frac{\pi}{2}$; z je od 0 do 1 je řez kruh o poloměru $\sqrt{z}$: $\int_0^1 \pi(\sqrt{z})^2\, dz$.

4. 4; $\int_0^2\int_0^3\int_0^{2-x} x\,dz\,dy\,dx$

5. $\frac{59}{480}\pi$; Pro $z\in[0,\frac{1}{2}]$ je řez kruh o poloměru $\sqrt{2z-z^2}$, pro $z\in[\frac{1}{2},1]$ je řez kruh o poloměru $\sqrt{1-z^2}$: $\int_0^{\frac{1}{2}} z^2\pi(\sqrt{2z-z^2})^2\,dz+\int_{\frac{1}{2}}^2 z^2\pi(\sqrt{1-z^2})^2\,dz$.

6. $\int_0^1\int_0^1\int_0^{z^2w}\int_0^1 1\,dx\,dy\,dz\,dw+\int_0^1\int_0^1\int_{z^2w}^1\int_0^{\frac{z^2w}{y}} 1\,dx\,dy\,dz\,dw$

7. $\frac{\pi}{2}$; Válcové souřadnice $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=a,$ pak $J_f=r>0$.

$x^2+y^2<z<1$ transformuji na $r^2<a<1$: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 r\,da\,dr\,d\varphi$.

8. 4π; Válcové souřadnice $\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^a ar\,dr\,d\varphi\,da.$

9. $\sqrt{6}\pi^2$; Upravené válcové souřadnice $y=\sqrt{2}r\cos\varphi,\ z=\sqrt{3}r\sin\varphi,\ x=a,$

pak $J_f=\sqrt{6}r>0.$ $\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{1}{a^2+1}}}\sqrt{6}r\,dr\,d\varphi\,da$.

10. $4\pi^2$; Válcové souřadnice dají $(2-r)^2+a^2\le 1,$ a tedy $r\in[1,3]$.

$\int_0^{2\pi}\int_1^3\int_{-\sqrt{1-(2-r^2)}}^{\sqrt{1-(2-r^2)}} r\,da\,dr\,d\varphi$.

11 11. cvičení

Spočtěte následující trojrozměrné objemy či integrály

1. $\mathcal{L}^3(M)$ pro $M = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 2z,\ x^2 + y^2 \le z^2\}$,

2. Spočtěte 1. jak přes sférické, tak i válcové souřadnice},

3. $\mathcal{L}^3(M)$ pro $M = \left\{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 \le x^2 y\right\}$ a $a, b, c > 0$,

4. $\mathcal{L}^3(M)$ pro $M = \{a(x^2 + y^2) + z \le a,\ z \ge 0\}$ v závislosti na $a \in \mathbf{R}$.

5. $\mathcal{L}^3(M)$ pro $M = \left\{(x + y + z)^2 < y,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\right\}$,

6. $\int_M e^{xyz} x^2 y \, dxdydz$ pro $M = \{x \ge 0,\ y \ge 1,\ z \ge 1,\ xyz \le 1\}$

za použití substituce $x = u,\ y = \dfrac{u+v}{u},\ z = \dfrac{u+v+w}{u+v}$.

Návody:

1. π; Sférické souřadnice převedou $x^2 + y^2 + z^2 \le 2z$ na $0 < r < 2\sin\psi$ a

$x^2 + y^2 \le z^2$ na $\cos^2\psi < \sin^2\psi$. Odtud $\sin\psi > 0$ a $\cos^2\psi < \sin^2\psi$, tedy $\psi \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

$$\int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\sin\psi} r^2 \cos\psi \, dr \, d\psi \, d\varphi.$$

2. π; Válcové souřadnice převedou $x^2 + y^2 + z^2 \le 2z$ na $r^2 + a^2 \le 2a$ a

$x^2 + y^2 \le z^2$ na $r^2 \le a^2$. Z první nerovnosti $2a - a^2 \ge 0$, tedy $a \in (0, 2)$.

Dále $r^2 \le \min\{2a - a^2, a^2\}$ a $2a - a^2 = a^2$ pro $a = 1$.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^a r \, dr \, da \, d\psi + \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2a-a^2}} r \, dr \, da \, d\psi \ .$$

3. $\dfrac{\pi a^7 b^6 c}{192}$; Zobecněné sférické souřadnice $x = ar\cos\varphi\cos\psi,\ y = br\sin\varphi\cos\psi$,

$z = cr\sin\psi$ a $J_f = abcr^2\cos\psi$. Podmínku převedu na $0 \le r^4 \le a^2 b r^3 \cos^2\varphi \cos^3\psi \sin\varphi$.

Odtud $\sin\varphi > 0$. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a^2 b\cos^2\varphi\cos^3\psi\sin\varphi} abcr^2 \cos\psi \, dr \, d\psi \, d\psi$.

4. ∞ pro $a < 0$ a $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{a(1-r^2)} r \, dz \, dr \, d\varphi$ pro $a > 0$ přes válcové souřadnice.

5. $\dfrac{1}{60}$; Zobecněné sférické souřadnice $x = ar\cos^2\varphi\cos^2\psi,\ y = br\sin^2\varphi\cos^2\psi$,

$z = cr\sin^2\psi$ a $J_f = 4r^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi$ pro $\varphi, \psi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin^2\varphi\cos^2\psi} 4r^2 \cos\varphi \sin\varphi \cos^3\psi \sin\psi \, dr \, d\psi \, d\psi.$$

6. $\dfrac{e}{2} - 1$; Jakobián vyjde $J_f = \dfrac{1}{u(u+v)}$. Z $x \ge 0$ plyne $u \ge 0$,

z $y \ge 1$ plyne $\dfrac{u+v}{u} \ge 1$, tedy $v \ge 0$, z $z \ge 1$ plyne $w \ge 0$ a z $xyz \ge 1$ plyne $u + v + w \le 1$.

$$\int_0^1 \int_0^{1-u} \int_0^{1-u-v} e^{u+v+w} u^2 \frac{u+v}{u} \frac{1}{u(u+v)} \, du \, dv \, dw \ .$$