Příklad 1. Vyšetřete konvergenci $\sum a_n$, kde

$$a_n = \frac{1}{2^n - 2^{-n}} \cdot \frac{y^n}{2n-1}$$

1. krok. Vyšetříme nejprve $\sum |a_n|$ pomocí podílového kritéria.

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2^n - 2^{-n}}{2^{n+1} - 2^{-n-1}} \cdot \frac{|y|^{n+1}}{|y|^n} = \frac{2 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{1 - 2^{-2n}}{2 - 2^{-2n+1}} \cdot |y| \to \frac{|y|}{2}$$

Odsud plyne:

(a) pro $|y| < 2$ řada $\sum |a_n|$ konverguje, tj. $\sum a_n$ konverguje absolutně.

(b) pro $|y| > 2$ plyne z podílového kritéria $|a_n| \to +\infty$; to odporuje nutné podmínce konvergence ($a_n \to 0$), tedy $\sum a_n$ diverguje.

2. krok. Vyšetřeme absolutní konvergenci pro $|y| = 2$. Máme

$$|a_n| = \frac{2^n}{2^n - 2^{-n}} \cdot \frac{1}{2n-1} \sim \frac{1}{n}$$

Protože $\sum 1/n$ diverguje, vidíme, že pro $|y| = 2$ řada $\sum |a_n|$ diverguje, tj. $\sum a_n$ nekonverguje absolutně.

Důkaz řádové rovnosti: musíme ověřit, že $|a_n|/(1/n) \to c$, kde c je konečné, nenulové číslo. Avšak

$$\frac{|a_n|}{\frac{1}{n}} = \frac{2^n}{2^n - 2^{-n}} \cdot \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{1 - 2^{-2n}} \cdot \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} \to \frac{1}{2}\,.$$

3. krok. Zbývá zjistit, zda pro $|y| = 2$ zkoumaná řada diverguje, nebo konverguje (v tom případě ovšem neabsolutně).

Pro $y = 2$ je

$$a_n = \frac{2^n}{2^n - 2^{-n}} \cdot \frac{1}{2n-1}\,.$$

O této řadě již víme, že diverguje.

Pro $y = -2$ je

$$a_n = \frac{1}{2^n - 2^{-n}} \cdot \frac{(-2)^n}{2n-1} = \frac{(-1)^n}{(1 - 2^{-2n})(2n-1)}$$

Protože $(1 - 2^{-2n})(2n-1)$ je zjevně rostoucí a jde do $+\infty$, řada konverguje dle Leibnizova kritéria.

Rekapitulace. Řada $\sum a_n$ konverguje absolutně pro $|y| < 2$, konverguje neabsolutně pro $y = -2$, diverguje pro $|y| > 2$ a $y = 2$.

Příklad 2. Najděte limitu rekurentně zadané posloupnosti:

$$b_1 = 4\,, \qquad b_{n+1} = \frac{6}{1+b_n}\,.$$

0. krok. Předpokládejme, že $b_n \to b$. Potom též $b_{n+1} \to b$. Tedy

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{6}{1+b_n} \qquad / \; n \to \infty \\ b &= \frac{6}{1+b} \\ b^2 + b - 6 &= 0 \\ (b-2)(b+3) &= 0 \end{aligned}$$

Tudíž: má-li b_n konečnou limitu, je to buď 2, nebo -3.

Vypočtěme několik prvních členů:

$$4,\; 1.20,\; 2.73,\; 1.61,\; 2.30,\; 1.82,\; 2.13,\; 1.92,\; 2.05,\; 1.96, \ldots$$

Pozorujeme: sudé (liché) členy jsou menší (větší) než 2, posloupnost sudých (lichých) členů roste (klesá), limita je 2.

Dokažme postupně tato tvrzení.

1. krok. Je-li $b_n > 2$, je $b_n + 1 > 3$ a tedy $b_{n+1} < 6/(1+b_n) \in (0,2)$. Analogicky $b_n \in (0,2)$ implikuje $b_{n+1} > 2$. Protože $b_1 = 4 > 2$, plyne odsud, že liché členy $b_{2n-1} > 2$, sudé členy $b_{2n} < 2$ pro $\forall n$.

2. krok. Máme

$$b_{2n+1} = \frac{6}{1+b_{2n}} = \frac{6}{1+\frac{6}{1+b_{2n-1}}} = \frac{6(b_{2n-1}+1)}{b_{2n-1}+7}$$

Tedy nerovnost $b_{2n+1} < b_{2n-1}$ je ekvivalentní

$$(b_{2n-1} - 2)(b_{2n_1} + 3) > 0$$

což platí, neboť $b_{2n-1} > 2$ pro $\forall n$. Tudíž posloupnost b_{2n-1} je klesající. Analogicky se dokáže, že b_{2n} je rostoucí.

3. krok. Posloupnost b_{2n-1} je klesající, zdola omezená (např. dvojkou). Podle věty z přednášky je zaručeno, že má limitu - značme ji b. Tedy $b_{2n-1} \to b$, $b_{2n+1} \to b$. Potom

$$\begin{aligned} b_{2n+1} &= \frac{6(b_{2n-1}+1)}{b_{2n-1}+7} \qquad n \to \infty \\ b &= \frac{6(b+1)}{b+7} \end{aligned}$$

Odsud $b = 2$ nebo $b = -3$. Protože $b_{2n-1} > 0$ pro $\forall n$, je $b = 2$.

Analogicky se dokáže, že $b_{2n} \to 2$.

Protože sudé i liché členy jdou ke 2, je limita celé posloupnosti 2.

Alternativně. Protože máme podezření, že $b_n \to 2$, vyjádřeme rekurentně $b_{n+1} - 2$:

$$b_{n+1} - 2 = \frac{6}{1+b_n} - \frac{6}{1+2} = \frac{2}{1+b_n} \cdot (2 - b_n)$$

Z předchozích úvah víme, že $b_n \geq b_2 = 6/5$ pro $\forall n$. Tedy

$$|b_{n+1} - 2| = \frac{2}{1+b_n} \cdot |b_n - 2| \leq \frac{2}{1+\frac{6}{5}} \cdot |b_n - 2| = \frac{10}{11} \cdot |b_n - 2|$$

Odsud indukcí

$$|b_n - 2| \leq \left(\frac{10}{11}\right)^n |b_1 - 2|$$

a tedy $b_n - 2 \to 0$ pro $n \to \infty$, což je hledaný závěr.

Příklad 3. Vypočítejte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 2n^n + n!}{(n+1)^4 + \sin n + (3n)!}$$

Řešení. Jde o výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$, proto z čitatele i jmenovatele vytkneme nejrychleji rostoucí člen, tj. n^n resp. $(3n)!$. Máme

$$\frac{3^n + 2n^n + n!}{(n+1)^4 + \sin n + (3n)!} = \frac{n^n}{(3n)!} \cdot \frac{\frac{3^n}{n^n} + 2 + \frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)^4}{(3n)!} + \frac{\sin n}{(3n)!} + 1} \to 0 \cdot \frac{2}{1} = 0$$

dle věty o aritmetice limit, neboť

$$\frac{n^n}{(3n)!}, \ \frac{3^n}{n^n}, \ \frac{n!}{n^n}, \ \frac{(n+1)^4}{(3n)!}, \ \frac{\sin n}{(3n)!} \to 0$$

Ukažme první limitu: $a_n = \frac{n^n}{(3n)!}$ - užijeme podílové kritérium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^(n+1)}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{3(3n+2)(3n+1)} \to 0$$

Odsud $a_n \to 0$. Použili jsme přepis $(3n+3)! = 3(n+1)(3n+2)(3n+1)(3n)!$ a známou limitu $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e$. Druhá, třetí, čtvrtá limita podobně.

Poslední limita $\frac{\sin n}{(3n)!} \to 0$ dle věty: je-li b_n omezená a $c_n \to 0$, je $b_n c_n \to 0$.