Příklady ke cvičení z MA 2a 2004/05

Zopakujte si příslušnou látku o funkcích více proměnných a řešte násleující příklady (teoretický základ byl probrán na konci minulého ročníku). Neopomeňte si samostatně dostatečně procvičit techniku derivování v $\mathbb{R}^m$!

Cvičení 1: Jsou spojitá (prostá) zobrazení f, g

$$f : [x, y] \longrightarrow [\, x^2 + y^2, 2xy \,], \quad g : [x, y] \longrightarrow [|x - y|, |x + y|] \ ?$$

Ukažte, že f je prosté na množině $\{[x, y]; 0 \le |y| \le x\}$!

Cvičení 2: Dokažte toto tvrzení: je-li $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^1$ taková, že pro všechna x platí $|f(x)| \le |x|^2$, pak má f silnou derivaci v $0 = [0, \dots 0]$.

Cvičení 3: Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ je diferencovatelná na $\mathbb{R}^2$ a $D_1 f(y) = 0$. Ukažte, že pak $f(x, y) = g(x)$, kde g je funkce na $\mathbb{R}^1$. Lze tvrzení zobecnit pro funkce m proměnných? Platí pro každou oblast v $\mathbb{R}^m$?

Cvičení 4: Je zobrazení $f = (f_1, f_2, f_3)$, kde

$$f_1(x, y, z) = x + y + z \,, \quad f_2(x, y, z) = xy + yz + zx \,, \quad f_3(x, y, z) = xyz \,,$$

v nějakém okolí bodu $A = [\, 1, 2, 3 \,]$ prosté?

Cvičení 5: Je zobrazení $f = (f_1, f_2)$, kde

$$f_1(x, y) = x^3 \,, \quad f_2(x, y) = y^3 \,,$$

v nějakém okolí bodu $A = [\, 0, 0 \,]$ prosté? Je prosté na $\mathbb{R}^2$?

Cvičení 6: Je zobrazení $f = (f_1, f_2)$, kde

$$f_1(x, y) = x^2 - y^2 \,, \quad f_2(x, y) = 2xy \,,$$

lokálně prosté v $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{[\, 0, 0 \,]\}$? Je prosté na G?

Cvičení 7: Pro funkci $f = y(x)$ implicitně definovanou rovností $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ určete f', f'' a f''' v okolí všech bodů, kde je to možné! [Pro $x \neq -2y$ je

$$f'(x) = -\frac{2x + y}{x + 2y} \,, \quad f''(x) = -\frac{18}{(x + 2y)^3} \,, \quad f'''(x) = -\frac{162x}{(x + 2y)^5} \,.]$$

Cvičení 8: Z dvojice rovnic

$$x^2 + 2xy - 3xu + 4yv = 0 \,,$$
$$4xy + x^3 u - 8yv + 2 = 0$$

vypočtěte $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ a výsledek interpretujte ve světle věty o implicitních funkcích! [Výpočtem obdržíme (kde?!)

$$f(x, y) = \frac{(x^2 + 2xy)(6y - x^2) + (x^4 + 2x^3 y + 12xy + 6)y}{3x(6y - x^2)}, \ g(x, y) = \frac{x^4 + 2x^3 y + 12xy + 6}{4y(6 - x^2)};$$

najděte f_x, f_y, g_x, g_y!]

Cvičení 9: Určete pro funkci $z = z(x, y)$ určenou implicitně rovnicí

$$z^3 - 3xyz = a^3$$

parciální derivace $D_x z$, $D_y z$. Vypočtěte též všechny druhé parciální derivace z!
[Pro $z^2 \neq xy$ je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 - xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{xy^3 z}{(z^2 - xy)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x^3 yz}{(z^2 - xy)^3} \Big]$$

Cvičení 10: Určete Taylorův polynom stupně 2 a také Taylorův rozvoj funkce $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ v bodě $[1, 1, 1]$!

Cvičení 11: Ukažte, že pro přibližný výpočet hodnot funkce lze odvodit vzorec

$$\operatorname{arctg} \frac{1 + x + y}{1 - x + y} \quad \approx \quad \pi/4 + x - xy\,!$$

Cvičení 12: Určete Taylorovu řadu funkce $f(x, y) = x/y$ pro bod $[1, 1]$! Najděte také obor konvergence této řady.

$$\left[f(x, y) = (1 + (x - 1)) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (y - 1)^k, \quad \mathbb{R} \times (0, 2) \right]$$

Cvičení 13: Pro zobrazení $x = \rho \cos u \cos v$, $y = \rho \sin u \cos v$, $z = \rho \sin v$ (sférické souřadnice) spočtěte jakobián

$$J(\rho, u, v) = \det \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_u & x'_v \\ y'_\rho & y'_u & y'_v \\ z'_\rho & z'_u & z'_v \end{vmatrix} .$$

Pro další standardní transformace spočtěte příslušné jakobiány za domácí cvičení; vyplatí se zapomatovat si jejich hodnoty. $[J(\rho, u, v) = \rho^2 \cos v]$

Cvičení 14: Určete hodnotu jakobiánu transformace inverzní ke „sférickým souřadnicím“!

Cvičení 15: Zkoumejte (lokální) extrémy funkce f v $\mathbb{R}^2$, kde

$$f(x, y) = (1 + \exp y) \cos x - y \exp y.$$

Cvičení 16: Najděte vzdálenost přímky a paraboly, které jsou popsány rovnicemi

$$x - y - 2 = 0, \quad y = x^2. \qquad \left[\frac{7\sqrt{2}}{8} \right]$$

Cvičení 17: Najděte tečnou rovinu k ploše popsané rovnicí $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ rovnoběžnou s rovinou o rovnici $x + 4y + 62 = 0$.

$$[\, x + 4y + 62 = \pm 21 \text{ (dvě řešení)} \,]$$

Cvičení 18: Najděte všechny body, ve kterých nastávají lokální extrémy funkce f v $\mathbb{R}^2$, kde

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4\,!$$

[Lokální minimum nastává v bodě $[\,0, 0\,]$, lokální maximum nastává v bodě $[\,2, 0\,]$, v ostatních bodech lokální extrém nenastává (jsou to tzv. sedlové body).]

Cvičení 19: V prostoru $\mathbb{R}^3$ najděte v rovině o rovnici

$$2x + 3y - z - 1 = 0$$

bod, který je nejblíže počátku $[\,0, 0, 0\,]$! [Extrém nastává v bodě $[\,1/7, 3/14\,]$; výsledek porovnejte se standardním vzorcem pro vzdálenost bodu od roviny.]

Cvičení 20: V prostoru $\mathbb{R}^3$ najděte v rovině o rovnici

$$ax + by - cz = d$$

bod, ve kterém nabývá minima funkce

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

a vypočítejte hodnotu tohoto extrému! [Extrém $f_{\min} = d^2/(a^2 + b^2 + c^2)$; výsledek opět porovnejte se vzorcem pro vzdálenost bodu od roviny.]

Cvičení 21: Funkce $f(x, y) = 6xy - 3y^2 - 2x^3$ má dva kritické body, avšak pouze v jednom nastává lokální extrém. Dokažte. [lokální minimum má f v bodě $[\,1{,}1\,]$]

Cvičení 22: * Najděte kritické body a lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 y^3 (6 - x - y)\,!$$

[$[\,2{,}3\,]$, lokální $f_{\max} = 108$; vyšetření bodů $[\,0, y\,]$, $y \in \mathbb{R}$, a $[\,x, 0\,]$, $x \in \mathbb{R}$, je složitější, k cíli vede např. vyšetření Taylorových rozvojů v těchto bodech; v bodech $[\,0, y\,]$, $y \in (-\infty, 0) \cup (6, \infty)$ má funkce neostré lokální maximum, v bodech odpovídajících $y \in (0, 6)$ neostré lokální minimum. V bodech $[\,0, 0\,]$ a $[\,0, 6\,]$ a v bodech $[\,x, 0\,]$, $x \in \mathbb{R}$, nemá f lokální extrém]

Cvičení 23: Najděte extrémální hodnoty funkce $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2$ vzhledem k množině $\{x;\, x_1 + x_2 + \cdots + x_m - 1 = 0\}$. [$f_{min} = 1/m = f(m^{-1}, \ldots, m^{-1})$]

Cvičení 24: Najděte kritické body funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

vzhledem k vazbě popsané rovnicí

$$x^3 + y^3 - 6xy = 0\,!$$

Cvičení 25: Najděte extrémy funkce $f(x,y) = x - 2y - 3$ na množině $\{[x,y];\ 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le x + y \le 1\}$. $\big[f_{min} = -5, \quad f_{max} = -2 \big]$

Cvičení 26: Najděte rozměry „kvádrové krabičky bez víčka“, jejíž povrch má velikost 12 cm^2! [Krabička má rozměry $2 \times 2 \times 1$ cm.]

Cvičení 27: Najděte minimum funkce

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 3y$$

na množině bodů $P := \{\, [\,x,y\,] \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 - y - 1 = 0\,\}$! $[\,f_{\min} = f(-3/4, -7/16)\,]$

Cvičení 28: Najděte bod, ve kterém funkce

$$f(x,y,z,t) = x^2 + 2y^2 + z^2 + t^2$$

nabývá minima na množině bodů P popsané rovnicemi

$$x + 3y - z + t = 2\,,$$
$$2x - y + z + 2t = 4\,.$$

$[x = 67/69,\ y = 6/69,\ z = 14/69,\ t = 67/69]$

Cvičení 29: Najděte minimum funkce

$$f(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

na množině bodů P popsané rovnicemi

$$x + y - z + 2t = 2\,,$$
$$2x - y + z + 3t = 3\,.$$

$\big[$Minima $f_{\min} = 17/23$ se nabývá v bodě $[10/23, 1/23, -1/23, 17/23\,]$.$\big]$

Cvičení 30: Najděte na $\mathbb{R}^2$ extrémy funkce $f(x,y) = (|x| + |y|)\exp(-|x| - |y|)$! $[\,f_{\min} = 0$ ostré v bodě $[\,0,0\,]$, $f_{\max} = 1/\mathrm{e}$ a neostré v bodech množiny $M = \{[\,x,y\,]\,;|x| + |y| = 1\}\,]$

Cvičení 31: Najděte kritické body funkce

$$f(x,y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2\,!$$

Určete $N := \{[\,x,y\,]\,;\, f(x,y) = 0\}$ a body, ve kterých funkce f nabývá minima na množině $M = \{[\,x,y\,]\,;\, |x| \le 1,\ |y| \le 1\}$. $[\,[\,0{,}0\,]$, v tomto bodě nenabývá funkce f extrémní hodnoty; vyjádřete funkci f jako součin dvou dvojčlenů a vyšetřujte $f(x,1)$: $f_{\min} = f(\pm\sqrt{3}/2,\, 1) = -1/8\,]$

Cvičení 32: Pro funkci $z = z(x,y)$ určenou implicitně rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$$

najděte její extrémy! $[\,z_{\min} = -2,\ z_{\max} = 6\,$; je výsledek „vidět“ ?]

Cvičení 33: Určete maximum a minimum funkce $f(x,y,z) = xyz$ na sféře o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$! $[\,f_{\max} = 1$ ve 4 bodech, $f_{\min} = -1$ ve 4 bodech$\,]$

Cvičení 34: Určete maximum a minimum funkce $f(x,y,z) = xyz$ na průniku sféry o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ s rovinou o rovnici $x + y + z = 0$!
[Je $f_{\max} = 1/3\sqrt{6}$ ve 3 bodech a $f_{\min} = -1/3\sqrt{6}$ ve 3 bodech]

Cvičení 35: Najděte maximum funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1^2 \cdot x_2^2 \cdots x_m^2$ na „jednotkové sféře“ o rovnici

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 = 1\,!$$

$[\,f_{\max} = 1/k^k\,]$