Cvičení 227: Kde jsou (ve smyslu obvyklé úmluvy: maximální možný definiční obor pro daný předpis) definovány funkce

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\,,\quad g(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}\,,$$
$$h(x,y)=(\sqrt{x^2+y^2-1})^{-1}\,?$$

Jsou spojité (vzhledem ke svému definičnímu oboru)? Lze je spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$?

Cvičení 228: Je funkce f definovaná v $\mathbb{R}^2$ předpisem

$$f(x,y)=\frac{xy}{|x|+|y|}$$

omezená na D_f? Lze ji spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$? Lze spojitě rozšířit funkci $1/f$ z kvadrantu $\{[x,y]\,;x>0,\,y>0\}$ na nějakou „větší" oblast? Je f omezená na množině $P(1,1):=\{[x,y]\,;\,(x-1)^2+y^2<1\}$? [ne; ano; ne; ano]

Cvičení 229: Rozhodněte (a uveďte příklady), které věty o algebraických operacích se spojitými funkcemi lze „přenést" z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^m$, $m>1$.

Cvičení 230: Je podíl dvou navzájem různých „standardních" norem na prostoru $\mathbb{R}^2$ (tj. norem $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ a $\|\cdot\|_\infty$) spojitě rozšiřitelný na celý prostor?

Cvičení 231: Najděte v $\mathbb{R}^2$ maximální spojité rozšíření funkce

$$f(x,y)=\frac{x+y}{x^3+y^3}\,!\quad [\text{na } \mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}]$$

Cvičení 232: Má funkce $f(x)=y^2-5x^2y+4x^4$ lokální extrém v bodě $[0,0]$? [nemá – všimněte si chování restrikcí funkce f na přímky a paraboly procházející počátkem]

Cvičení 233: Rozhodněte o existenci limity

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} x^2\mathrm{e}^{-(x^2-y)}\,!$$

[neexistuje – všimněte si opět chování restrikcí vyšetřované funkce na přímky a paraboly]

Cvičení 234: Popište množiny M bodů $[x,y]\in\mathbb{R}^2$ vyhovujících vztahům

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & x^2+6x+y^2-8y=29\,, & \text{(b)} & xy>1\,,\\ \text{(c)} & x^2-y^2\le 1\,, & \text{(d)} & 9x^2+4y^2\le 36\,. \end{array}$$

Zjistěte, které jsou omezené, a určete též jejich průměr diam(M)! (Připomeňme, že průměr (diametr) množiny M je definován jako supremum vzdáleností bodů z M, tj.

$$\operatorname{diam} M=\sup\left\{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\,;\,(x_1,y_1),\,(x_2,y_2)\in M\right\}.)$$

Cvičení 235: Popište množiny M všech bodů $[x,y,z] \in \mathbb{R}^3$, ve kterých nabývají hodnoty 0 funkce

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & x^2+6x+y^2-8y-z^2+10z\,, & \text{(b)} & |xy|-1\,, \\ \text{(c)} & x^2-y^2-z^2+1\,, & \text{(d)} & |xz|+|xz|\,. \end{array}$$

Je v některém případě množina M omezená?

Cvičení 236: Je funkce f definovaná v $\mathbb{R}^2$ přepisem

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

omezená na D_f? Lze tuto funkci spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$? Je funkce f omezená na množině $M := \{[x,y]\,;\,0<x<1,\ 0<y<1\}$? [ano; ne; ano]

Cvičení 237: Lze spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$ funkce

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad g(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2-1}\right)^{-1}? \quad [\text{ano; ne}]$$

Cvičení 238: Je funkce

$$f(x,y) = \sin\frac{\pi}{1-x^2-y^2}$$

stejnoměrně spojitá v jednotkovém kruhu $\{x^2+y^2<1\}$? [ne]

Cvičení 239: Je funkce $f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$ stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}^2$? [ne]

Cvičení 240: Jsou funkce $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$, $g(x,y) = \exp\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ stejnoměrně spojité na $\mathbb{R}^2$? [ne]

Cvičení 241: Vyšetřete funkce

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}\,, \quad g(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x}\,;$$

dokažte, že f, g nelze spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$. Jsou f, g omezené?

Cvičení 242: Pro funkci

$$f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)\sin(xy)}{(|x|+|y|)^3}$$

zjistěte, zda je omezená a zda ji lze spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$!

Cvičení 243: Zjistěte zda existují směrové derivace a silná derivace (totální diferenciál) funkce

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \quad g(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad (\text{definujte} \quad f(0,0) = g(0,0) = 0)$$

v bodě $[0,0]$. Jak je to s její existencí v ostatních bodech ?

Cvičení 244: Rozšiřte spojitě na $\mathbb{R}^2$ následující funkce a zkoumejte derivaci tohoto rozšíření v bodě $[0,0]$:

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|},\ g(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ h(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\,.$$

Všímejte si omezenosti a spojitosti parciálních derivací!

Cvičení 245: Najděte tečnou rovinu k ploše popsané rovnicí $x^2+2y^2+3z^2=21$ rovnoběžnou s rovinou o rovnici $x+4y+62=0$.

$$[\,x+4y+62 = \pm 21 \text{ (dvě řešení)}\,]$$