Cvičení 246: Plyne z existence derivace f' v bodě $[0,0]$ omezenost nebo spojitost f v jeho nějakém okolí počátku?

Cvičení 247: Dokažte toto tvrzení: je-li $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^1$ taková, že pro všechna x platí $|f(x)| \le \|x\|^2$, pak má f derivaci v bodě $0 = [0, \dots 0]$.
Aplikujte na funkce (zde D je Dirichletova funkce a $x = (x_1, \dots, x_m)$)

$$f(x,y) = (x^2+y^2)/\sin\sqrt{x^2+y^2}, \quad g(x) = \|x\|^2\, D(x_1)D(x_2)\cdots D(x_m)\,.$$

Cvičení 248: Dokažte že lze funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

rozšířit na $\mathbb{R}^2$ tak, že má všude derivaci !

Cvičení 249: Definujte pro $\alpha > 0$ v $\mathbb{R}^m$ funkci $f(x) = \|x\|^\alpha \sin(1/\|x\|)$ a položte $f(0) = 0$. Zkoumejte spojitost f, parciálních defivací a existenci derivace f' v $\mathbb{R}^2$ v závislosti na parametru α!

Cvičení 250: Zodpovězte analogické otázky jako v předcházejícím cvičení pro funkci $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$, $m > 1$, definovanou vztahy $f(x) = |x_1|^k \sin(1/|x_1|)$, $f(0) = 0$!

Cvičení 251: Rozmyslete si, jak se derivuje funkce $z = z(u(x,y), v(x,y))$ podle proměnných x, y a napište příslušný vzorec!

Cvičení 252: Vypočtěte všude, kde je to možné, parciální derivace prvního a druhého řádu funkce f

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Porovnejte druhé smíšené parciální derivace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Cvičení 253: Zderivujte funkci

$$f(x,y) = xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{pro} \quad x^2+y^2 > 0, \quad f(0,0) = 0,$$

a porovnejte její druhé smíšené parciální derivace v bodě $[0,0]$ (příklad z přednášky).

Cvičení 254: Transformujte Laplaceův operátor

$$\Delta\, u \;= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

do sférických souřadnic. Totéž proveďte pro operátor $\Delta_1 u$, kde

$$\Delta_1 u \;= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 .$$

Cvičení 255: Je-li $r(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, zjistěte, zda funkce

$$f = \sqrt{r}\,,\;\; g = 1/\sqrt{r}\,,\;\; h = 1/r$$

vyhovují rovnici $\Delta u = 0$!

Cvičení 256: Ukažte, že funkce proměnné $[x,t] \in \mathbb{R}^{m+1}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}^1$,

$$f(x,t) = (\sqrt{t})^{-1} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right) \quad \text{pro } t > 0, \quad f(x,t) = 0 \quad \text{pro } t \leq 0$$

vyhovuje mimo bod $[\,0,0\,]$ rovnici pro vedení tepla $\Delta_x u - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$!

Cvičení 257: *Zkuste dokázat tvrzení: Nechť $u = u(x,y)$ vyhovuje Laplaceově rovnici $\Delta u = 0$. Potom také funkce

$$u = u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

vyhovuje Laplaceově rovnici.

K dobrému zvládnutí počítání parciálních derivací a derivování složených funkcí je potřeba spočítat **větší počet** příkladů (prosím, nepodcenit!). Bylo uvedeno jen několik ukázek.

Cvičení 258: Kde nabývají minima funkce

$$f(x,y) = 2x^2 + (3y-5)^2\,, \quad g(x,y) = |\,2x - 3y + 1\,|\,, \quad h(x,y) = (x - y^2)^2\,?$$

Cvičení 259: Určete obor hodnot (případně extrémy) funkcí

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2, \quad g(x,y) = (x^2+y^2)\exp(-x^2-y^2)!$$

Cvičení 260: Určete obor hodnot (případně extrémy) funkce

$$f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x-y), \quad 0 \leq x \leq \pi/2,\ 0 \leq y \leq \pi/2\ !$$

Cvičení 261: Vyšetřujte extrémy funkcí

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y, \quad g(x,y) = x^2y^3(6-x-y).$$

$$[\,f_{min} = -1, \quad g_{max} = 108\,]$$

Cvičení 262: Najděte extrémy funkce $f(x,y) = x - 2y - 3$ na množině

$$\{[x,y];\ 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x+y \leq 1\}. \qquad \left[\,f_{min} = -5, \quad f_{max} = -2\,\right]$$

Cvičení 263: Najděte extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ na „kouli“

$$\{[x,y];\ |x| + |y| \leq 1\}. \qquad [\,f_{min} = 0, \quad f_{max} = 1\,]$$

Cvičení 264: Najděte extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ na kouli

$$\{[x,y,z];\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\}. \qquad [\,f_{min} = 0, \quad f_{max} = 300\,]$$