Veta C. Existuje prave jedna dvojice funkci $\sin(x)$, $\cos(x)$ s definicnim oborem $\mathbb{R}$ a prave jedno cislo $\pi \in (0, \infty)$ tak, ze

1. $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$,
   $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$,
2. $\sin(-x) = -\sin(x)$,
   $\cos(-x) = \cos(x)$,
3. funkce $\sin(x)$ je rostouci a spojita v $[0, \pi/2]$, $\sin(0) = 0$ a $\sin(\pi/2) = 1$,
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Tato veta bude dokazana pozdeji: bude nutno dokazat za prve, ze funkce s vlastnostmi 1–4 existuji, a za druhe, ze jsou jimi urceny jednoznacne.

Z 1–4 lze dedukovat vsechny dalsi zname vlastnosti funkci $\sin(x)$, $\cos(x)$:

- $\cos 0 = 1$, nebot $1 = \sin(\pi/2 + 0) = \sin(\pi/2)\cos 0 + \cos(\pi/2)\sin 0 = \cos 0 + 0$ (dle 1, 3)
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, neb $1 = \cos 0 = \cos(x + (-x)) = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$ (dle 1, 3 a predchoziho bodu)
- $|\sin(x)| \leq 1$, $|\cos(x)| \leq 1$ v $\mathbb{R}$ (dle predchoziho bodu)
- $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos(\pi) = -1$, $\sin(-\pi/2) = -1$
  (dobrovolne domaci cviceni)
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, (dle 1 a predchoziho)
- funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ jsou 2π-periodicke (dle predchoziho)
- funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ lze vzajemne nahradit:
  $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$
  $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$
  (dle 1)

- funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ jsou spojite v $\mathbb{R}$. Schema dukazu (promyslete podrobne!) funkce $\sin(x)$ je spojita v $[0, \pi/2]$ (dle 4), diky lichosti (bod 2) se spojitost rozsiri na $[-\pi/2, \pi/2]$ a dale pomoci vzorce $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ na $[-\pi/2, 3\pi/2]$, coz diky 2π-periodicite staci.

  Spojitost funkce $\cos(x)$ pak plyne ze vzorce o nahrazeni (predchozi bod).

- $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

  - tento a pribuzne vzorce pro soucet a rozdil lze ziskat nasledujicim trikem: polozime $x := (a+b)/2$, $y := (a-b)/2$. Pak $a = x + y$, $b = x - y$ a uzijeme vzorce sub 1.

- dalsi vzorce, ktere je uzitecne si pamatovat:

  $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

  $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

  $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

  $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$