Důkaz Věty C.

Jednoznačnost: Z vlastností 1–4 plynou všechny známé vlastnosti funkcí $\sin x$, $\cos x$. Mimo jiné i to, že tyto funkce řeší v R diferenciální rovnici $y'' + y = 0$. Funkce sin s počáteční podmínkou $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, funkce cos s podmínkou $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. To je ale dle Věty 5.3 určuje jednoznačně.

Existence: Položme

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad C(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

(Definice je korektní - tyto řady mají poloměr konvergence $+\infty$.) Ukážeme-li, že funkce $S(x)$, $C(x)$ splňují 1–4, budeme díky jednoznačnosti oprávněni psát $\sin x = S(x)$, $\cos x = C(x)$.

Protože (viz důkaz Věty E) $\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$ a $i^{2k} = (-1)^k$, $i^{2k+1} = (-1)^k i$, dostáváme velmi užitečný vzorec

$$\exp(ix) = C(x) + iS(x)$$

Odtud snadno plyne

$$C(x) = \frac{1}{2}\big(\exp(ix) + \exp(-ix)\big), \qquad S(x) = \frac{1}{2i}\big(\exp(ix) - \exp(-ix)\big).$$

Tudíž

$$S(x+y) = \frac{1}{2i}\big(\exp(i(x+y)) - \exp(-i(x+y))\big),$$

zatímco

$$\begin{aligned} S(x)C(y) + C(x)S(y) = {} & \frac{1}{2i}\big(\exp(ix) - \exp(-ix)\big) + \frac{1}{2}\big(\exp(iy) + \exp(-iy)\big) \\ & + \frac{1}{2}\big(\exp(ix) + \exp(-ix)\big) + \frac{1}{2i}\big(\exp(iy) - \exp(-iy)\big) \end{aligned}$$

S pomocí vztahu $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$ se čtenář sám přesvědčí, že výrazy vpravo se rovnají, a tudíž funkce $S(x)$ splňuje první vzorec sub 1. Analogický vzorec pro $C(x)$ se dokáže podobně.

Přímo z definice je vidět, že $C(x)$ je sudá, $S(x)$ lichá. Platí tedy 2.

Z věty o derivování mocninných řad dostáváme $S(x) = C(x)$, $C'(x) = -S(x)$. Protože $S(0) = 1$, $C(0) = 1$, speciálně platí vlastnost 4.

Zavedení čísla π. Lze ukázat, i když je to dost pracné, že funkce sin, cos jsou jednoznačně určeny jen vlastnostmi 1, 2 a 4, z nichž lze naopak vyvodit všechny jejich další vlastnosti (spojitost, derivaci, ale i to, že jsou periodické.) Číslo π tedy nehraje v této větě žádnou zvláštní roli (podobně jako e ve Větách D, E.) Je prostě vhodnou konstantou, značící polovinu periody těchto funkcí. (Ne zcela neopodstatněný se zdá názor, že mnohem vhodnější konstantou by bylo 2π, viz: `http://www.math.utah.edu/~palais/pi.html`)