Důkaz Věty D.

Jednoznačnost: Z vlastností 1–3 jsme odvodili, že funkce $\ln x$ je primitivní funkcí k funkci $1/x$, a v bodě má 1 hodnotu 0. Podle věty o jednoznačnosti primitivní funkce je tímto určena jednoznačně.

Existence: Jednou z možností, jak korektně zavést funkci $\ln x$, skýtá Riemannův integrál. Definujme pro $x > 0$

$$L(x) := (R)\int_1^x \frac{ds}{s}\,.$$

Ukážeme, že funkce $L(x)$ má vlastnosti 1–3.
Ze spojitosti funkce $1/x$ za prvé plyne, že $L(x)$ je dobře definována (Věta 2.2). Podle Věty 2.4 je $L(x)$ navíc spojitá a její derivací je funkce $1/x$. Vlastnost 3 je tedy ověřena.
Vlastnost 2, která říká, že derivace v bodě 1 se rovná 1, též.
K ověření vlastnosti 1 použijeme následující trik: dokážeme, že pro každé pevné $a > 0$ je funkce

$$g(x) := L(x) + L(a) - L(ax)$$

v $(0, \infty)$ identicky rovná nule. Protože $L(1) = 0$, je $g(1) = 0$ a $g'(x) = L'(x) - aL'(ax) = 1/x - a/(ax) = 0$. Tedy podle Lagrangeovy věty je $g \equiv 0$ v $(0, \infty)$.

Vzhledem k jednoznačnosti, dokázané výše, jsme oprávněni psát $\ln x = L(x)$.