Důkaz Věty E.
Funkci exp definujeme jako $(\ln)_{-1}$. Protože $\ln x$ je rostoucí, je tato definice korektní. Protože $\ln x$ je spojitá a $\ln(0+) = -\infty$, $\ln(+\infty-) = +\infty$, je $H(\ln) = D(\exp) = R$. Ze spojitosti $\ln x$ plyne podle věty o spojitosti inverzní funkce spojitost $\exp x$. Ostatní vlastnosti $\exp x$ plynou z vlastností $\ln x$, jak bylo ukázáno hned při formulaci Věty E.

Varianta Jinou možností korektní definice $\exp x$ je pomocí mocninné řady. Definujme

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Na přednášce bylo ukázano, že tato funkce je dobře definována dokonce pro $x \in C$, je (jakožto funkce z C do C spojitá) a platí $E'(x) = E(x)$, též pro každé $x \in C$, kde derivaci můžeme chápat jakožto derivaci podle komplexní proměnné. Protože zjevně $E(0) = 1$, plyne z toho speciálně vlastnost 3, dokonce pro limitu v komplexním smyslu.
Vlastnost 2 byla též prokázána (coby aplikace Cauchyova součinu řad.)
Pokud se omezíme na $x \in R$, nabývá $E(x)$ pouze reálných hodnot. Pro $x \geq 0$ je zřejmě $E(x) \geq 1$. Protože $E(-x) = 1/E(x)$, je $E(x) > 0$ v R. A protože $E'(x) = E(x)$, je $E(x)$ v R rostoucí. Tedy vlastnost 3 je též prokázána.

Můžeme tedy definovat $\exp := E|_R$. Ovšem: bude takto definovaná funkce exp opravdu inverzní k funkci $\ln x$? To je předmětem následujícího:
Dobrovolné domácí cvičení. Ukažte, že funkce $\exp := E|_R$ je inverzní k funkci $\ln x$. Návod: položte $\phi(x) := \ln E(x)$, derivováním dokažte, že $\phi(x) = x$ v R.

Poznámka k jednoznačnosti. Funkce $\exp x$ je vlastnostmi 1–3 určena jednoznačně. Plyne z nich totiž, že $\exp x$ je řešením diferenciální rovnice $y' - y = 0$ s počáteční podmínkou $y(0) = 1$. To ji ale dle Věty 5.3. určuje jednoznačně.