1. Křivkový integrál

Poznámka. Funkce $\varphi(t) : [a,b] \to R^n$ je C^1 v $[a,b]$ právě když existuje $\hat{\varphi}(t) : R \to R^n$ třídy C^1 v R tak, že $\hat{\varphi}|_{[a,b]} = \varphi$.

Lemma 1.1 Nechť $\varphi(t) : [a,b] \to R^n$. Pak je ekvivalentní:
(1) $\varphi(t)$ je C^1 v $[a,b]$
(2) $\varphi(t) \in C([a,b]) \cap C^1((a,b))$, existují vlastní jednostranné derivace $\varphi'_+(a)$, $\varphi'_-(b)$ a navíc

$$\varphi'_+(a) = \lim_{t\to a+} \varphi'(t) \qquad \varphi'_-(b) = \lim_{t\to b-} \varphi'(t)\,.$$

Definice. Nechť $\varphi(t) : [a,b] \to R^n$ je C^1 funkce taková, že $\varphi'(t) \neq 0$ všude v $[a,b]$. Potom φ (podrobněji dvojici $(\varphi(t), [a,b])$ nazvu C^1-křivkou v R^n.
Nechť $\varphi(t) : [a,b] \to R^n$ je spojitá funkce. Nechť existují body $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ takové, že $\forall i = 1, \ldots n$ je $\varphi|_{[x_{i-1},x_i]}$ C^1-křivka v R^n. Potom φ (podrobněji dvojici $(\varphi(t), [a,b])$ nazvu po částech C^1-křivkou v R^n.
Množina

$$\langle\varphi\rangle = \varphi([a,b]) = \{\varphi(t) : \ t \in [a,b]\}$$

se nazývá geometrický obraz křivky φ.
Alternativní terminologie: $\langle\varphi\rangle$...křivka, $(\varphi(t), [a,b])$...parametrizace křivky.

Úmluva. Křivka = po částech C^1 křivka.

Terminologie. Pro křivku $(\varphi(t), [a,b])$ zavádím:
• $\varphi'(t)$ ... tečný vektor křivky (existuje nejvýše konečně výjimečných bodů, kde neexistuje $\varphi'(t)$, ale existují (obecně různé) $\varphi'_+(t)$, $\varphi'_-(t)$.)
• $\varphi'(t)/\|\varphi'(t)\|$ ... jednotkový tečný vektor. Norma je eukleidovská:

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \{\varphi'_i(t)\}^2}$$

Též definován až na konečně vyjímek.
• $\varphi(a)$ ... počáteční bod φ, zkratka p. b. φ.
• $\varphi(b)$ ... koncový bod φ, zkratka k. b. φ.

Definice. Křivka $(\varphi(t), [a,b])$ se nazve jednoduchá, je-li $\varphi(t)$ prosté v $[a,b]$. Křivka se nazve uzavřená, jestliže p. b. φ = k. b. φ. Uzavřená křivka se nazve jednoduchá, pokud φ je prosté v $[a,b)$.
Příklady.
• $\varphi(t) = (\cos(2*\pi*t), \sin(2*\pi*t))$, $t \in [0,1]$ je jednoduchá uzavřená, C^1

křivka, $\langle\varphi\rangle$ je jednotková kružnice.
• čtverec je geometrický obraz jednoduché uzavřené křivky, která není C^1.
• "8" je uzavřená křivka, která není jednoduchá

Definice. Nechť $(\varphi(t), [a,b])$ je křivka. Křivku

$$\chi(t) := \varphi(-t), \qquad t \in [-b, -a]$$

nazvu křivkou opačnou k φ a značím $\ominus\varphi$.
Nechť $(\varphi(t), [a,b])$, $(\psi(t), [c,d])$ jsou křivky a k. b. $\varphi =$ p. b. ψ. Potom křivku $(\chi(t), [a, b+d-c])$

$$\chi(t) = \begin{cases} \varphi(t),\ t \in [a,b] \\ \psi(t+c-b),\ t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

nazvu součtem křivek φ, ψ a značím $\varphi \oplus \psi$.

Poznámky.
• $\langle\varphi\rangle = \langle\ominus\varphi\rangle$, p. b. $\varphi =$ k. b. $\ominus\varphi$, k. b. $\varphi =$ p. b. $\ominus\varphi$. V alternativní terminologii: jde o tytéž křivky s opačnou orientací.
• každá po částech C^1 křivka je součtem konečně mnoha C^1 křivek: $\varphi = \varphi^1 \oplus \varphi^2 \oplus \cdots \oplus \varphi^n$, kde $\varphi^i = \varphi|_{[x_{i-1}, x_i]}$ (body x_i z definice po částech C^1 křivky.)

Definice. Nechť (φ, I) je křivka v R^n.
1. Nechť $f(x) : \langle\varphi\rangle \to R$. Křivkový integrál prvního druhu funkce f po křivce φ definuji jako

$$\int_\varphi f\, ds := \int_I f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\|\, dt\,.$$

2. Nechť $F(x) : \langle\varphi\rangle \to R^n$. Křivkový integrál druhého druhu funkce F po křivce φ definuji jako

$$\int_\varphi F\, d\varphi := \int_I F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt\,.$$

Integrály vpravo chápu jako Lebesgueovy a požaduji, aby byly konečné.

Poznámky.
• Lebesgueovu integrálu nevadí, $\varphi'(t)$ není definováno v konečně bodech
• v konkrétních příkladech je obvykle integrand spojitý a integrál počítám jako Newtonův

Věta 1.1[Základní vlastnosti křivkového integrálu.] 1. Nechť φ je křivka v R^n, $f(x)$, $g(x) : \langle\varphi\rangle \to R$, $a \in R$. Potom

$$\int_\varphi (f+g)\,ds = \int_\varphi f\,ds + \int_\varphi g\,ds\,, \qquad \int_\varphi af\,ds = a\int_\varphi f\,ds\,.$$

2. Nechť φ, ψ jsou křivky, k. b. $\varphi =$ p. b. ψ a $f(x) : \langle\varphi\rangle \cup \langle\psi\rangle \to R$. Potom

$$\int_{\varphi\oplus\psi} f\,ds = \int_\varphi f\,ds + \int_\psi f\,ds\,.$$

Analogická tvrzení platí pro integrál druhého druhu.

Lemma 1.2. Nechť $(\varphi(t), [a,b])$, $(\psi(\tau), [\alpha,\beta])$ jsou křivky. Nechť existuje $\chi(\tau) : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ vzájemně jednozačné funkce taková, že $\psi(\tau) = \varphi(\chi(\tau))$ pro $\forall\tau \in [\alpha,\beta]$ a $\chi'(\tau)$ je spojitá, nenulová v (α,β).
Potom pro každé $f(x) : \langle\varphi\rangle \to R$, $F(x) : \langle\varphi\rangle \to R^n$ platí

$$\int_\varphi f\,ds = \int_\psi f\,ds\,, \qquad \int_\varphi F\,d\varphi = \pm\int_\psi F\,ds\,,$$

kde $\pm$ je podle toho, zda χ roste/klesá.

Důsledek. Nechť φ je křivka a $f(x) : \langle\varphi\rangle \to R$, $F(x) : \langle\varphi\rangle \to R^n$. Potom

$$\int_{\ominus\varphi} f\,ds = \int_\varphi f\,ds \qquad \int_{\ominus\varphi} F\,d(\ominus\varphi) = -\int_\varphi F\,ds\,,$$

Věta 1.2. Nechť $(\varphi(t), [a,b])$, $(\psi(\tau), [\alpha,\beta])$ jsou jednoduché C^1-křivky takové, že $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$. Nechť $f(x) : \langle\varphi\rangle \to R$, $F(x) : \langle\varphi\rangle \to R^n$. Potom

$$\int_\varphi f\,ds = \int_\psi f\,ds\,, \qquad \int_\varphi F\,d\varphi = \pm\int_\psi F\,ds\,,$$

kde $\pm$ je podle toho, zda $\varphi(t)$, $\psi(t)$ probíhají množinu $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$ ve stejném/opačném smyslu.

Poznámka.
• křivkový integrál závisí pouze na obrazu křivky, ne na parametrizaci - integrál druhého druhu závisí navíc na směru probíhání.
• platí i pro po částech C^1 křivky.
• předpoklad jednoduchosti je podstatný.

Definice. Nechť $M \subset R^n$. Křivka φ se nazve křivkou v M, pokud $\langle\varphi\rangle \subset M$. Množina $M \subset R^n$ se nazve křivkově souvislá, pokud pro libovolné body x, $y \in M$ existuje φ křivka v M taková, že p. b. $\varphi = x$, k. b. $\varphi = y$.

Příklady.
• R^n je křivkově souvislá
• konvexní množina je křivkově souvislá
• množina $M = R^2 \setminus \{(t,0): \ t \in R\}$ není křivkově souvislá

Definice. Nechť $F(x): \Omega \to R^n$, kde $\Omega \subset R^n$. Říkáme, že křivkový integrál z $F(x)$ nezávisí v Ω na cestě, pokud

$$\int_\varphi F\,d\varphi = \int_\psi F\,d\psi$$

pro libovolné křivky φ, ψ v Ω takové, že p. b. $\varphi =$ p. b. ψ, k. b. $\varphi =$ k. b. ψ.
Nechť $\Omega \subset R^n$ je otevřená množina, $F(x): \Omega \to R^n$ je spojitá. Funkce $U(x): \Omega \to R$ se nazve potenciál F, pokud $\nabla U(x) = F(x)$ pro $\forall x \in \Omega$.

Věta 1.3.[O existenci potenciálu.] Nechť $\Omega \subset R^n$ je otevřená, křivkově souvislá množina, $F(x): \Omega \to R^n$ je spojitá funkce. Potom je ekvivalentní:
(1) existuje U potenciál k F v Ω
(2) křivkový integrál z $F(x)$ nezávisí v Ω na cestě

2. Plošný integrál.

Poznámka. Obecně: integrování přes k-rozměrné útvary (k-plochy) v R^n. Omezíme se na případ $k = 2$, $n = 3$.

Definice. Množina $S \subset R^3$ se nazve *plocha*, pokud $S = \varphi(\Omega)$, kde $\Omega \subset R^2$ je otevřená množina a $\varphi: R^2 \to R^3$ splňuje:
(1) φ je C^1
(2) $h(\nabla\varphi) = 2$ všude v Ω
Dvojice (φ, Ω) se nazývá parametrizace plochy S.
Plocha je *jednoduchá*, pokud φ je prosté a φ^{-1} je spojité na S.

Poznámky.
• požadavek (1) ... plocha je hladká
• požadavek (2) ... plocha nedegeneruje např. v křivku
• požadavek φ^{-1} spojité: plocha se nazavinuje - vylučuje situaci, kdy kraj se dotýká vnitřku plochy
• terminologie předchozí kapitoly: (φ, Ω) - plocha, S - geometrický obraz plochy

Příklady.
(1) φ: $x = \cos u \cos v$, $y = \sin u \cos v$, $z = \sin v$, kde $(u,v) \in \Omega = (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ parametrizuje S... jednotkovou sféru s výjimkou jednoho "poledníku"
(2) φ: $y = y$, $z = z$, $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$, kde $(y,z) \in \Omega = \{(y,z): \ y^2 + z^2 < 1\}$ ... horní půlka téže sféry

Věta 2.1. [Zadání plochy.]
(1) Nechť $\Omega \subset R^2$ je otevřená množina a $f(x,y) : \Omega \to R$ je C^1 funkce. Potom

$$\operatorname{graf} f = \{(x,y,z) :\ (x,y) \in \Omega,\ z = f(x,y)\}$$

je jednoduchá plocha.
(2) Nechť $F(x,y,z) : R^3 \to R$ je C^1 funkce. Nechť $a \in R^3$ je bod takový, že $F(a) = 0$ a $\nabla F(a) \neq 0$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že množina

$$U(a,\varepsilon) \cap \{F = 0\}$$

je jednoduchá plocha.

Poznámka. [Vnější součin.] Pro $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ vektory v R^3 definuji $u \times v$ jako vektor $(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$.
Vlastnosti:
• $(u + w) \times v = u \times v + w \times v$, $(au) \times v = u \times (av) = a(u \times v)$ (bilinearita)
• $u \times v = -(v \times u)$ (antisymetrie)
Geometrický význam:
• jsou-li u, v lineárně závislé, je $u \times v = 0$ (a naopak)
• jsou-li u, v lineárně nezávislé, je $w = u \times v$ (jednoznačně určený) vektor s těmito vlastnostmi: (1) w je kolmý na rovinu, určenou vektory u, v (2) délka w je rovna ploše rovnoběžníku, určeného vektory u, v (3) vektory u, v a w (v tomto pořadí) tvoří kladně orientovanou bázi, tj. determinant matice se sloupci u, v, w je kladný.
Vzorce:
• $u,\ v,\ w \in R^3$: $w \cdot (u \times v) = \det((u)(v)(w))$ (zde $\cdot$ je skalární součin, $((u)(v)(w))$ matice se sloupci u, v a w.)
• $u,\ v,\ \bar{u},\ \bar{v} \in R^3$, kde $\bar{u} = au + bv$, $\bar{v} = cu + dv$. Potom

$$\|\bar{u} \times \bar{v}\| = |\det A|\ \|u \times v\| \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Definice. [Plošný integrál 1. druhu] Nechť S je jednoduchá plocha, $f(x) : S \to R$. Plošný integrál 1. druhu funkce f přes plochu S definujeme jako

$$\int_S f\, dS = \int_\Omega [f \circ \varphi]\, \|\varphi_u \times \varphi_v\|\, dudv\,.$$

Integrál vpravo chápeme jako Lebesgueův a (φ, Ω) je libovolná parametrizace S.
Ve speciálním případě $f = 1$ dostaneme plošný obsah S.

Věta 2.2 [Korektnost definice.] Integrál 1. druhu nezávisí na parametrizaci.

Definice. Řekneme, že plocha S je orientovaná, pokud existuje spojitá funkce $\nu(x) : S \to R^3$ tak, že pro $\forall x \in S$ je $\nu(x)$ normálový vektor k S.
Dvojice (S, ν) se nazývá orientovaná plocha.

Poznámky.
• normálový vektor: kolmý na tečnou rovinu (ta je určena vektory φ_u, φ_v)
• názorně: rozlišuji "líc" plochy (ve směru ν) a "rub" plochy
• ne vždy existuje orientace - sféra, torus: ano, Möbiův list: ne.
• (S, ν) je orientovaná plocha ... $(S, -\nu)$ je opačně orientovaná plocha.
• jednoduchá plocha má vždy orientaci:

$$\nu := \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \circ \varphi^{-1} \qquad \text{na } S$$

Ve smyslu následující definice je to orientace souhlasná s parametrizací.

Definice. Nechť (S, ν) je orientovaná plocha. Řekneme, že parametrizace (φ, Ω) souhlasí s orientací, pokud

$$\nu \circ \varphi = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \qquad \text{v } \Omega\,.$$

Definice. [Plošný integrál 2. druhu.] Nechť (S, ν) je jednoduchá orientovaná plocha, $F(x) : S \to R^3$. Plošný integrál 2. druhu funkce F přes plochu S definujeme jako

$$\int_{S,\nu} F \cdot d\vec{S} = \int_S (F \cdot \nu)\, dS\,,$$

kde integrál napravo chápu jako integrál 1. druhu (skalární) funkce $f(x) = F(x) \cdot \nu(x)$.

Poznámky.
• názorný význam: tok pole F plochou S.
• starší značení: $d\vec{S} = (dydz, dzdx, dxdy)$.

Lemma 2.1. [Výpočet int. 2. druhu.] Nechť (S, ν), F jsou jako výše. Potom

$$\int_{S,\nu} F \cdot d\vec{S} = \int_\Omega [F \circ \varphi] \cdot (\varphi_u \times \varphi_v)\, dudv = \int_\Omega \det(F \circ \varphi, \varphi_u, \varphi_v)\, dudv\,,$$

kde (φ, Ω) je libovolná parametrizace S souhlasná s orientací ν a $(F\circ\varphi, \varphi_u, \varphi_v)$ je matice se sloupci $F \circ \varphi$, φ_u a φ_v.

Definice. Množina $S \subset R^3$ se nazve zobecněná plocha, pokud $S = \bigcup_j S^j \cup \Gamma$, kde S^j jsou jednoduché plochy a Γ lze pokrýt konečně mnoha křivkami. Navíc požaduji

$$S^k \cap \overline{\bigcup_{j \neq k} S^j} \neq \emptyset \qquad (*)$$

Příklady.
(1) $S_2 = \{x \in R^3 : \|x\| = 1\}$ je zobecněná plocha: $S_2 = S^1 \cup S^2 \cup \Gamma$, kde S^1 (severní polokoule) je graf funkce $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ na $\Omega = \{x^2+y^2 < 1\}$, S^2 (jižní polokoule) je graf funkce $-f(x,y)$ na Ω a Γ (rovník) je geometrický obraz $\chi(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(2) povrch krychle $S = \partial\{[0,1] \times [0,1] \times [0,1]\}$ je zobecněná plocha: $S = \cup_{j=1}^6 S^j \cup \Gamma$, kde S^j jsou stěny a Γ sjednocení hran.

Definice. Nechť S je zobecněná plocha, $f : S \to R$, $F : S \to R^3$ funkce a $\nu : S \to R^3$ orientace (tj. spojité pole normál). Plošný integrál 1. resp. 2. druhu definuji jako

$$\int_S f\,dS = \sum_j \int_{S^j} f\,dS\,, \qquad \text{resp.} \qquad \int_{(S,\nu)} F \cdot \vec{S} = \sum_j \int_{(S^j,\nu)} F \cdot d\vec{S}\,.$$

Poznámky.
• definice je korektní: nezávisí na způsobu, jímž S rozložím na S^j a Γ
• orientace S nemusí existovat: krychle nemá normálu na hranách.

Lemma 2.2. Nechť a, b jsou vektory v R^3. Potom

$$\det \begin{pmatrix} a \cdot a, & a \cdot b \\ a \cdot b, & b \cdot b \end{pmatrix} = \|a \times b\|^2\,.$$

Věta 2.2. [Grammův determinant.] Nechť S je jednoduchá plocha, (φ, Ω) její parametrizace a $f : S \to R$. Potom

$$\int_S f\,dS = \int_\Omega (f \circ \varphi)\sqrt{g}\,dudv\,,$$

kde

$$g = \det \begin{pmatrix} \varphi_u \cdot \varphi_v, & \varphi_u \cdot \varphi_v \\ \varphi_u \cdot \varphi_v, & \varphi_v \cdot \varphi_v \end{pmatrix}$$

je tzv. Grammův determinant.

Definice. [Diferenciální operátory.]
1. (laplacián)

$$\triangle u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \qquad u : R^n \to R$$

2. (divergence)

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \qquad u : R^n \to R^n$$

3. (rotace pro n=2)

$$\operatorname{rot} u = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \qquad u : R^2 \to R^2$$

4. (rotace pro n=3)

$$\operatorname{rot} u = \big(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\big) \qquad u : R^3 \to R^3$$

Věta 2.3. Platí:
(1) $\operatorname{div} u = \operatorname{tr}(\nabla u)$ (pro $u : R^n \to R^n$, tr A je stopa matice)
(2) $\triangle u = \operatorname{div} \nabla u$ (pro $u : R^n \to R$)
(3) $\operatorname{rot} u = \nabla \times u$ (pro $u : R^3 \to R^3$)
(4) $\operatorname{div} \operatorname{rot} u = 0$ (pro $u : R^3 \to R^3$)

Definice. Otevřená, křivkově souvislá množina $\Omega \subset R^n$ se nazývá oblast. Je-li $M \subset R^n$ (ne nutně otevřená), řekneme, že $u \in C^1(M)$, pokud existuje $\Omega \supset M$ otevřená taková, že $u \in C^1(\Omega)$.
Nechť $\Omega \subset R^3$ je oblast, nechť $\partial\Omega$ je zobecněná plocha. Funkci $n(x) : S \to R^3$ nazveme vnější normálou k $\partial\Omega$, pokud pro $\forall x \in S$ je $n(x)$ jednotkový vektor, kolmý na $\partial\Omega$, a navíc

$$(\exists \delta > 0)(\forall t \in (0, \delta))[x + tn(x) \notin \Omega]$$

Zobecnění: připouštíme, že $n(x)$ je definována pouze v $\partial\Omega \setminus \Gamma$, kde Γ lze pokrýt křivkami.

Věta 2.4. [Gauss-Ostrogradského.] Nechť $\Omega \subset R^3$ je omezená oblast, $\partial\Omega$ je zobecněná plocha a $n = (n_1, n_2, n_3)$ je vnější normála. Nechť u, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\overline{\Omega})$ pro $i = 1$, 2, 3. Potom

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, d\lambda_3 = \int_{\partial\Omega} u n_i \, dS \qquad i = 1, 2, 3.$$

Věta 2.5. [O divergenci.] Nechť $\Omega \subset R^3$ je omezená oblast, $\partial\Omega$ je zobecněná plocha a n je vnější normála. Nechť $u : R^3 \to R^3$ je $C^1(\overline{\Omega})$. Potom

$$\int_\Omega \operatorname{div} u \, d\lambda_3 = \int_{\partial\Omega} u \cdot n \, dS \, .$$

Definice. Nechť $\Omega \subset R^2$ je oblast, nechť $\partial\Omega = \langle\varphi\rangle$, kde φ je křivka. Funkce $n(x) : \partial\Omega :\to R^2$ se nazve vnější normála k $\partial\Omega$, pokud pro $\forall x \in \partial\Omega$ je $n(x)$ jednotkový vektor, kolmý na $\partial\Omega$ (přesněji na tečnu φ). Navíc $n(x)$ směřuje ven z Ω.
Zobecnění: dovolíme, že $n(x)$ je definována v $\partial\Omega$ až na konečně výjimek.

Věta 2.6. [O divergenci v rovině.] Nechť $\Omega \subset R^2$ je omezená oblast, nechť $\partial\Omega = \langle\varphi\rangle$, kde φ je křivka, a n je vnější normála k $\partial\omega$. Nechť $u : R^2 \to R^2$ je $C^1(\overline{\Omega})$. Potom

$$\int_\Omega \operatorname{div} u \, d\lambda_2 = \int_\varphi u \cdot n \, ds \, .$$

Definice. Křivka φ obíhá množinu $\Omega \subset R^n$ v kladném smyslu, pokud ji obíhá proti směru hodinových ručiček. Alternativně: platí pravidlo pravé ruky.

Věta 2.7. [Greenova.] Nechť $\Omega \subset R^2$ je omezená oblast, nechť $\partial\Omega = \langle\varphi\rangle$, kde φ je křivka, která obíhá Ω v kladném smyslu. Nechť $u : R^2 \to R^2$ je $C^1(\overline{\Omega})$. Potom

$$\int_\Omega \operatorname{rot} u \, d\lambda_2 = \int_\varphi u \cdot d\varphi \, .$$

Lemma 2.7. [Výpočet divergence integrálními průměry.] Nechť $\Omega \subset R^3$ je otevřená, $u : R^3 \to R^3$ je $C^1(\Omega)$. Potom

$$[\operatorname{div} u](x_0) = \lim_{\rho \to 0+} \frac{1}{\lambda_3(B(x_0, \rho))} \int\limits_{\partial B(x_0,\rho)} u \cdot n \, dS \qquad \forall x_0 \in \Omega \, .$$

Definice. Jednoduchá plocha $S \subset R^3$ se nazve plocha s okrajem, pokud existuje parametrizace (φ, Ω) taková, že φ je C^1, prostá a $h(\nabla\varphi) = 2$ dokonce na $\Omega_1 \supset \overline{\Omega}$. Navíc $\partial\Omega = \langle\psi\rangle$, kde ψ je jednoduchá uzavřená křivka.
Množina $\Gamma = \varphi(\partial\Omega)$ se nazývá okraj plochy S.
Je-li S navíc orientovaná a $\Gamma = \langle\chi\rangle$, řekneme, že křivka χ obíhá plochu S ve shodě s orientací ν, pokud (názorně řečeno): jdeme-li po okraji Γ ve smyslu χ s hlavou ve směru ν, máme S po levé ruce.

Věta 2.8. [Stokesova.] Nechť (S,ν) je jednoduchá orientovaná plocha s okrajem Γ. Nechť $\Gamma = \langle\chi\rangle$, kde χ obíhá S ve shodě s orientací ν. Nechť $F : R^3 \to R^3$ je $C^1(S \cup \Gamma)$. Potom

$$\int_{(S,\nu)} \big[\operatorname{rot} F\big] \cdot dS = \int_{\chi} F \cdot d\chi\,.$$

Lemma 2.4. Nechť $\Omega \subset R^n$ je oblast, $F : \Omega \to R^n$ je spojitá. Potom je ekvivalentní:
(1) křivkový integrál z F nezávisí v Ω na cestě.
(2) pro každou uzavřenou křivku χ v Ω je

$$\int_{\chi} F \cdot d\chi = 0\,.$$

Důsledek. $F : \Omega \to R^n$ má v Ω potenciál, právě když $\int_\chi F \cdot d\chi = 0$ pro každou uzavřenou křivku χ v Ω.

Definice. Oblast $\Omega \subset R^2$ se nazve jednoduše souvislá, pokud platí: je-li χ jednoduchá uzavřená křivka v Ω, je množina, kterou χ ohraničuje, částí Ω.
Ekvivalentně: každou jednoduchou uzavřenou křivku lze v Ω spojitě stáhnout do bodu.

Věta 2.9. [Existence potenciálu v R^2.] Nechť $\Omega \subset R^2$ je jednoduše souvislá oblast, $F : \Omega \to R^2$ je C^1 a $\operatorname{rot} F = 0$ v Ω. Potom F má v Ω potenciál.

Věta 2.10. [Existence potenciálu v R^3.] Nechť $\Omega \subset R^3$ je oblast, $F : \Omega \to R^3$ je C^1 a $\operatorname{rot} F = 0$ v Ω. Nechť navíc Ω má následující vlastnost [*]: je-li χ libovolná jednoduchá uzavřená křivka v Ω, pak existuje $S \subset \Omega$ jednoduchá plocha taková, že $\langle\chi\rangle$ je okraj S.
Potom F má v Ω potenciál.

Poznámky.
• předpoklad jednoduché souvislosti Ω pro n=2 resp. [*] pro n=3 je podstatný
• bez těchto předpokladů podmínka $\operatorname{rot} F = 0$ zaručí existenci potenciálu pouze lokálně
• předpoklad [*] není totéž co jednoduchá souvislost v R^3 (ta se obecně definuje jinak)

Definice. [k-plocha] Množina $M \subset R^n$ se nazve k-plocha $(0 < k < n)$, pokud $M = \varphi(\Omega)$, kde $\Omega \subset R^k$ je otevřená, φ je C^1 a navíc $h(\nabla\varphi) = k$ všude v Ω.

Doplnění definice: jednobodová množina je 0-plocha, otevřená část R^n je n-plocha.
Zobecněný Jakobián ($\varphi : R^k \to R^n$, $1 \le k \le n$)

$$J\varphi = \sqrt{\det\left[(\nabla\varphi)^T \cdot \nabla\varphi\right]}.$$

Pro $f : M \to R$ definuji plošný integrál 1. druhu jako

$$\int_M f\, dS_k = \int_\Omega f \circ \varphi\, J\varphi\,.$$

Poznámky.
• poslední definice zobecňuje řadu předchozích vzorců/definic (křivkový a plošný integrál, věta o substituci, atd.)
• lze vytvořit obecnou teorii, v níž se dokáže "obecná" Stokesova věta:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

kde M je k-plocha, ∂M je okraj M (typicky $(k-1)$-plocha), ω je tzv. diferenciální forma, d je diferenciál.
Gaussovu, Greenovu nebo námi dokázanou Stokesovu větu v R^3 lze chápat jako speciální případy této obecné Stokesovy věty.

3. Fourierovy řady.

Definice. Řada funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos kx + b_k \sin kx\right]$$

kde a_k, $b_k \in R$ jsou konstanty, se nazývá trigonometrická řada.

Poznámka. Pokud trigonometrická řada konveguje, je její součet 2π-periodická funkce. Hlavní otázka této kapitoly: lze naopak každou 2π-periodickou funkci napsat jako součet nějaké trigonometrické řady?

Lemma 3.1.
(1) $\int_0^{2\pi} \sin nx = \int_0^{2\pi} \cos nx = 0$ pro $\forall n \neq 0$ celé,
(2) $\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx = 0$ pro $\forall m$, $n \geq 1$ celá,
(3) $\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx = \pi\delta_{mn}$, ($\delta_{mn}$ je Kroneckerovo delta).

Poznámka. Předchozí lemma: funkce $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ...\}$ tvoří ortogonální systém vůči skalárnímu součinu $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)$.

Definice. Nechť $f \in \mathcal{L}(0, 2\pi)$. Trigonometrická řada s koeficienty

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx \qquad k \geq 1$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx \qquad k \geq 1$$

se nazývá Fourierova řada funkce f. Značí se F_f. Čísla a_k, b_k se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f.

Poznámky.
• je $\mathcal{F}_f(x) = f(x)$? Jistě ne vždy ve všech bodech, neboť a_k, b_k a tudíž $\mathcal{F}_f$ nevidí změny f na množině míry 0.
• $\mathcal{F}_f$ je vždy 2π-periodická, zkoumanou f tedy také rozšíříme 2π-periodicky.
• je-li f funkce 2π-periodická, potom $\int_0^{2\pi} f = \int_{-\pi}^{\pi} f = \int_a^{a+2\pi} f$ pro $\forall a \in R$
• obecněji, pro f funkci l-periodickou definujeme

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\left(\frac{2\pi}{l}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{l}kx\right)\right]$$

kde

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x), \quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{l}kx\right), \quad b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{l}kx\right).$$

(Platí příslušné analogie výsledků této kapitoly.)
• f sudá $\implies$ $b_k = 0$; f lichá $\implies$ $a_k = 0$.
• sinová řada: f definována na $(0, \pi)$ - rozšíříme liše.
cosinová řada: f definována na $(0, \pi)$ - rozšíříme sudě.

Věta 3.1. Nechť trigonometrická řada konverguje stejnoměrně v $[0, 2\pi]$. Pak je Fourierovou řadou svého vlastního součtu.

Definice. Funkci f nazveme po částech spojitou v (a, b), pokud existují body $x_0 = a < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$ takové, že f je spojitá v intervalech (x_{j-1}, x_j) a navíc má v bodech x_j jednostranné vlastní limity.
Funkci nazveme po částech C^1, jestliže navíc $f'(x)$ je spojitá v (x_{j-1}, x_j) a $f'(x)$ navíc má v bodech x_j jednostranné vlastní limity.

Poznámka. Na rozdíl od kapitoly 1 není po částech C^1 funkce nutně spojitá.

Věta 3.2. [O konvergenci Fourierovy řady.] Nechť $f \in \mathcal{L}(0,2\pi)$ je 2π-periodická a navíc po částech C^1 v (a,b). Potom pro $\forall x \in (a,b)$ je

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)]$$

Speciálně $\mathcal{F}_f(x) = f(x)$ v bodech spojitosti.

Lemma 3.2. [Komplexní tvar Fourierovy řady.] Nechť $f \in \mathcal{L}(0,2\pi)$ je 2π-periodická. Označme

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-ikx)\,dx\,.$$

Potom (formálně)

$$\mathcal{F}_f(x) = \sum_{k\in Z} c_k \exp(ikx)$$

Navíc platí vztahy

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \quad k \geq 1 \\ c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

respektive

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ a_k &= c_k + c_{-k} \qquad k \geq 1 \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) \qquad k \geq 1 \end{aligned}$$

kde a_k, b_k jsou Fourierovy koeficienty f.
Pro n-tý částečný součet Fourierovy řady $\mathcal{F}_{f,n}(x)$ platí

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \exp(ikx)\,.$$

Lemma 3.3. [Integrální tvar F.ř.] $f \in \mathcal{L}(0,2\pi)$ je 2π-periodická. Potom n-tý částečný součet F.ř. funkce f je

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) f(x+z)\,dz$$

kde

$$D_n(z) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right]}{2\pi\sin\left(\frac{z}{2}\right)}$$

se nazývá Dirichletovo integrační jádro.

Poznámky.
• $D_n(z) = D_n(-z)$
• $f \equiv 1$ ... $\mathcal{F}_f(x) \equiv 1$ ... $1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) = 1$.

Lemma 3.4. [Riemann-Lebesgueovo.] Nechť $f \in \mathcal{L}(a,b)$. Potom

$$\lim_{t\to\infty}\int_\alpha^\beta f(x)\sin(tx)\,dx = 0 \qquad \lim_{t\to\infty}\int_\alpha^\beta f(x)\cos(tx)\,dx = 0\,.$$

kde $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ je libovolný.

Věta 3.3. [Riemannova věta o lokalizaci.] Nechť $f \in \mathcal{L}(0,2\pi)$ je 2π-periodická funkce, nechť $A \in R$. Potom

$$\mathcal{F}_f(x) \to A \qquad \text{pro } n \to A$$

právě když

$$\int_0^\delta \big[f(x+z)+f(x-z)\big] - 2A\big]\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right]}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}\,dz \to 0 \qquad \text{pro } n\to\infty\,,$$

kde $\delta \in (0,\pi)$ je libovolné, pevné.

Poznámky. Za jakých okolností platí výrok (*) $\mathcal{F}_f(x) = f(x)$? (Předpokládáme, že f je 2π-periodická.)
• $f \in L^1(0,2\pi)$: (*) nemusí platit pro žádné x
• $f \in L^2(0,2\pi)$: (*) platí skoro všude
• $f \in C(R)$: (*) nemusí platit všude (platí skoro všude podle předchozího, neboť f je omezená a tudíž v $L^2(0,2\pi)$.)
• f spojitá a navíc po částech C^1: (*) platí pro všechna x. (Toto jediné jsme dokázali.)

Definice. Pro $(a,b) \subset R$ a $p \in [1,\infty)$ definuji

$$L^p(a,b) = \{f(x) : (a,b) \to R :\ f \text{ je měřitelná, } \int_a^b |f(x)|^p < \infty\}$$

Poznámky.
• $L^1(a,b) = \mathcal{L}(a,b)$
• $(a,b) \subset R$ omezený $\implies L^2(a,b) \subset L^1(a,b)$

Věta 3.4. [Besselova nerovnost.] Nechť $f \in L^2(0, 2\pi)$ je 2π-periodická a a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Potom

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \le \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 .$$

Speciálně: řady $\sum a_k^2$, $\sum b_k^2$ konvergují.

Věta 3.5. [Parsevalova rovnost.] Nechť $f \in L^2(0, 2\pi)$ je 2π-periodická a a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Potom je ekvivalentní:
(1)

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \mathcal{F}_{f,n}(x)|^2 \to 0 \qquad \text{pro } n \to \infty$$

(2)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 .$$

Poznámka. Tyto výroky nejsou jen ekvivalentní - za předpokladu $f \in L^2(0, 2\pi)$ oba vždy platí.
(2) ... se nazývá Parsevalova rovnost
(1) ... říká, že $\mathcal{F}_{f,n} \to f$ v prostoru $L^2(0, \pi)$.
Pro obecně l-periodickou funkci má Parsevalova rovnost tvar

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{2}{l} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 .$$

Poznámka. Při počítání příkladů lze pozorovat (f po částech C^1):
f nespojitá ... a_k, $b_k \sim 1/k$
f spojitá, ale ne C^1 ... a_k, $b_k \sim 1/k^2$
f je C^1 ... a_k, $b_k \sim 1/k^3$ etc.
Hypotéza: souvislost mezi hladkostí f a tím, jak rychle a_k, $b_k \to 0$.

Opakování.
[Weierstrassova věta.] Nechť $|f_k(x)| \le a_k$ v I a řada $\sum_k a_k$ konverguje. Potom řada funkcí $\sum_k f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I.
[Derivování řady člen po členu.] Nechť řada $\sum_k f_k(x)$ konverguje alespoň v jednom bodě $x_0 \in I$ a nechť řada $\sum_k f_k'(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně

v I. Potom řada $\sum f_k(x)$ též konverguje lokálně stejnoměrně v I. Navíc, její součet je diferencovatelná funkce a

$$\left\{\sum_k f_k(x)\right\}' = \sum_k f_k'(x)$$

všude v I.

Věta 3.6. [Derivování trigonometrické řady člen po členu.] Nechť a_k, b_k jsou libovolná čísla taková, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\big(|a_k| + |b_k|\big)$$

konverguje. Potom řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos kx + b_k \sin kx\big]$$

konverguje absolutně stejnoměrně v R. Navíc: její součet $f(x)$ je $C^1(R)$ a zderivovaná řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big[- ka_k \sin kx + kb_k \cos kx\big]$$

konverguje též absolutně stejnoměrně v R a její součet je $f'(x)$.

Věta 3.7. Nechť $f(x) \in C^2(R)$ je 2π periodická. Potom pro její Fourierovy koeficienty a_k, b_k platí, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\big(|a_k| + |b_k|\big)$$

konverguje.

Věta 3.8. [Integrování Fourierovy řady člen po členu.] Nechť $f(x) \in L^1(0, 2\pi)$ je 2π-periodická, nechť a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Potom

$$\int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0}{2}x = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big[\frac{-b_k}{k} \cos kx + \frac{a_k}{k} \sin kx\big]$$

platí pro $\forall x \in R$. Navíc $A_0 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$.

Poznámky.
• vznikne "formálně" integrováním rovnosti

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos kt + b_k \sin kt \right]$$

- ta však za předpokladů věty obecně nemusí platit.

4. Abstraktní Fourierovy řady.

Definice. Nechť $\Omega \subset R^n$ a $1 \le p \le \infty$. Definujeme pro $1 \le p < \infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to C : \; f \text{ je měřitelná, } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

respektive pro $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to C : \; f \text{ je měřitelná a } \exists C \text{ tak, že } |f(x)| \le C \text{ s.v. v } \Omega \; \right\}$$

Terminologie: funkce L^p integrovatelné resp. esenciálně omezené.
Norma na prostoru $L^p(\Omega)$ se definuje pro $p < \infty$ jako

$$\|f\|_p = \left\{ \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

respektive pro $p = \infty$ jako

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ C > 0 : \; |f(x)| \le C \text{ s.v. v } \Omega \right\}$$

Poznámka. Obecně $\|f\|_p = 0$ implikuje jen $f = 0$ s.v. a nikoliv $f = 0$. Řešení: v prostorech L^p považuji funkce, které se rovnají skoro všude, za totožné. (Například Dirichletovu funkci a funkci nulovou.)
Důsledek: nemá smysl hovořit o takových vlastnostech funkce z L^p, které se změní, změním-li funkci na množině míry nula (například hodnota v jednom bodě.) Má smysl hovořit jen o takových vlastnostech, které na takové změně nezáleží (například integrál přes nějakou množinu.)

Lemma 4.1. [Youngova nerovnost.] Nechť a, $b \ge 0$ a nechť $1 < p$, $q < \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Poznámka. Speciálně pro $p = q = 2$: $ab \le a^2/2 + b^2/2$.

Lemma 4.2. [Hölderova nerovnost.] Nechť $u(x) \in L^p(\Omega)$, $v(x) \in L^q(\Omega)$, kde $1 \le p$, $q \le \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (s úmluvou $1/\infty = 0$). Potom $u(x)v(x) \in L^1(\Omega)$ a

$$\|uv\|_1 \le \|u\|_p \|v\|_q \, .$$

Lemma 4.3. [Minkowského nerovnost.] Pro $p \in (1, \infty)$ je

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Důsledek. Trojúhelníková nerovnost pro normu v $L^p(\Omega)$.

Poznámky.
• V normovaném prostoru X lze hovořit o součtu řady: jsou-li $x_k \in X$, potom $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, pokud $s_n \to x$ pro $n \to \infty$, kde konvergenci chápu dle normy X, tj.

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in N\big)\big[n \geq n_0 \implies \|s_n - x\|_X < \varepsilon\big]$$

kde $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ jsou částečné součty.
• Je-li X úplný, pak posloupnost má limitu $\iff$ právě když je cauchyovská. Přepsáno pro řadu: $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konverguje, právě když

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in N\big)\big(\forall n \geq n_0\big)\big(\forall p \in N\big) \left[\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right\|_X < \varepsilon\right]$$

(B.C. podmínka konvergence řady v obecném normovaném prostoru.)
• Prostory $L^p(\Omega)$ jsou úplné, viz V. Jarník, Integrální počet II, Věta 199, s. 545. Důsledky: platí v nich Banachova věta o kontrakci, lze používat B.C. podmínku k ověření konvergence.
• prostor $L^2(\Omega)$ má další výhodu: skalární součin.

Definice. Nechť X je lineární vektorový prostor nad C. Zobrazení $x, y \mapsto (x, y)$ z $X \times X$ do C se nazve skalární součin, pokud
(i) je bilineární,
(ii) $(y, x) = \overline{(x, y)}$,
(iii) $(x, x) \geq 0$ a $(x, x) = 0 \iff x = 0$.
Skalární součin přirozeně určuje normu $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.
Platí tzv. Cauchy-Schwartzova nerovnost

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}$$

Důležitý příklad. Na prostoru $L^2(\Omega)$ lze definovat skalární součin jako

$$(u, v) := \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\, dx$$

Poznámky.
• definice je korektní: nevadí neurčenost u, v na množině míry 0.

• integrál konverguje díky Hölderově nerovnosti ($p = q = 2$).
• norma určená tímto skalárním součinem je původní norma v $L^2(\Omega)$.

Definice. Prostor se skalárním součinem, který je úplný vzhledem normě tímto skalárním součinem určené, se nazývá Hilbertův prostor.

Poznámky.
• R^n, C^n jsou Hilbertovy prostory (konečně-dimenzionální.)
• $L^2(\Omega)$ je Hilbertův prostor (nekonečně-dimenzionální.)
• skalární součin umožní hovořit o kolmosti, úhlech. Hilbertův prostor je proto "podobný" prostoru R^n, i když je obecně nekonečně-dimenzionální.

Úmluva. V dalším textu H značí Hilbertův prostor, $(\cdot,\cdot)$ odpovídající skalární součin a $\|\cdot\|$ normu.

Definice. Množina $\{x_n\} \subset H$ se nazve ortogonální (OG) systém, pokud $x_n \neq 0$ a $(x_n, x_m) = 0$ pro $m \neq n$. Pokud navíc $(x_n, x_n) = 1$ (tj. $\|x_n\| = 1$), nazveme systém ortonormální (ON).

Poznámky.
• $(1,1)$, $(2,-2)$ je OG, není ON v R^2
• $(1,0)$, $(0,1)$ je ON v R^2
• trigonometrický systém $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}$ je OG v $L^2(0, 2\pi)$ (Lemma 3.1.)
• $\{x_n\}$ je OG ... $y_n = x_n/\|x_n\|$ je ON, např. $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \dots\}$

Definice. Nechť X je vektorový prostor. Množina $\{x_a\}_{a\in A}$ se nazve (algebraická) báze X, pokud každé $x \in X$ lze jediným způsobem napsat jako $x = \sum_{k=1}^{N} c_k x_{a_k}$, kde $c_k \in R$ (C).
Nechť X je navíc prostor s normou. Spočetná množina $\{x_n\}_{a\in N}$ se nazve Schauderova báze X, pokud každé $x \in X$ lze jediným způsobem napsat jako $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_{a_k}$, kde $c_k \in R$ (C).

Poznámky.
• dim $X < \infty$ ...obě báze existují konečné.
• dim $X = \infty$ ... algebraická báze může být nespočetná, pohodlnější je spočetná Schauderova báze - místo konečných lin. kombinací ale potřebuji sumu (= spočetná lin. kombinace.)
• klíčová otázka kapitoly: je OG systém Schauderovou bází?

Věta 4.1. Nechť $\{x_n\}$ je OG systém v H, nechť $x \in H$ je takové, že $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, kde $c_k \in C$. Potom $c_k = \frac{(x,x_k)}{(x_k,x_k)}$.

Definice. [Abstraktní Fourierova řada.] Nechť $\{x_n\} \subset H$ je OG systém, nechť $x \in H$ je libovolné. Řadu (formální) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, kde $c_k = \frac{(x,x_k)}{(x_k,x_k)}$, nazvu Fourierovou řadou prvku x vůči systému x_n. Značím F_x. Čísla c_k nazývám Fourierovy koeficienty.

Poznámka.
• Fourierova řada $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ vzhledem k trigonometrickému systému (dle předchozí definice) = Fouerierova řada funkce $f(x)$ ve smyslu předchozí kapitoly.
• je vždy $F_x = x$? ... klíčová otázka.

Věta 4.2. [Besselova nerovnost, Parsevalova rovnost - abstraktní tvar.] Nechť $\{x_n\} \subset H$ je OG systém, nechť $x \in H$ je libovolné a c_k jsou Fourierovy koeficienty. Potom

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|x_k\|^2 \leq \|x\|^2 \qquad (1)$$

Speciálně, řada vlevo konverguje. Dále, Fourierova řada F_x vždy konverguje v H (její součet však není nutně x.)
(2) Situace $F_x = x$ nastává právě když platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|x_k\|^2 = \|x\|^2 . \qquad (2)$$

Poznámky.
• (1) ... Besselova nerovnost, (2) ... Parsevalova rovnost.
• srovnejte s Větami 3.4., 3.5.
• co je F_x, ne-li x? Lze spočítat: jsou-li $a_k \in C$ libovolná, pak

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} a_k x_k - x \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{N} c_k x_k - x \right\|^2 + \sum_{k=1}^{N} |a_k - c_k|^2 \|x_k\|^2$$

kde c_k jsou F.k. prvku x vůči $\{x_n\}$. Tedy: F_x je nejlepší možná aproximace.

Definice. Systém $\{x_n\} \subset H$ se nazve úplný, pokud platí: je-li $x \in H$ takové, že $(x, x_n) =$ pro $\forall n$, pak nutně $x = 0$.
Názorně: nelze najít nenulové x, kolmé na všechny x_n ... nechybí žádná souřadná osa.

Věta 4.3. [Ekvivalentní vyjádření úplnosti.] Nechť $\{x_n\} \subset H$ je OG systém. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:
(1) $\{x_n\}$ je úplný.
(2) pro $\forall x \in H$ platí Parsevalova rovnost.
(3) pro $\forall x \in H$ platí $F_x = x$.

Důležitý příklad. Trigonometrický systém je úplný v $L^2(0,2\pi)$. Tj., pokud $f(x) \in L^2(0,2\pi)$ je kolmá na všechny jeho prvky ($\iff$ $f(x)$ má všechny Four. koef. nulové), pak nutně $f(x) = 0$ ve smyslu $L^2(0,2\pi)$, tj. $f(x) = 0$ s.v.

Lemma 4.4. Nechť $f(x)$ je spojitá v R a 2π-periodická. Jestliže všechny její F.k. jsou nulové, je $f(x) = 0$ všude v R.

Poznámka.
• Srovnej s větou: je-li $f(x) \in C([a,b])$ a $\int_a^b f(x)\varphi(x) = 0$ pro $\forall \varphi \in C_0^1([a,b])$, je $f(x) = 0$ v $[a,b]$.

Opakování. Množina A je spočetná, existuje-li vzájemně jednoznačné zobrazení A na N (značení: $A \approx N$.)
Názorně: prvky A lze očíslovat přirozenými čísly. Příklady: N, Z, Q jsou spočetné, R, C nespočetné.

Definice. Nechť X je prostor s normou. Množina M se nazve hustá v X, pokud

$$\big(\forall x \in X\big)\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists y \in M\big)\big[\|x - y\|_X < \varepsilon\big]$$

Názorně: každý prvek X má libovolně blízko prvek z M.
Prostor X se nazve separabilní, pokud existuje spočetná M hustá v X.

Příklady.
• R je separabilní: $M = Q$.
• C je separabilní: $M = \{z \in C: \ z = a + ib, \ a, b \in Q\}$.
• H je Hilbertův prostor a existuje spočetný úplný OG systém $\{x_n\} \subset H$ $\implies$ H je separabilní.
• speciálně: $L^2(0,2\pi)$ je separabilní, obecněji: $L^p(\Omega)$ je separabilní pro $\forall p \in [1,\infty)$, ale $L^\infty(\Omega)$ není separabilní.
• pro $f(x) : (0,1) \to C$ označ $\operatorname{spt} f = \{x \in (0,1): \ f(x) \neq 0\}$ (nosič funkce). Definuj

$$\mathcal{H} = \Big\{f(x) : (0,1) \to C: \ \sum_{x \in \operatorname{spt} f} |f(x)|^2 < \infty\Big\}$$

Prostor $\mathcal{H}$ se skalárním součinem

$$(f,g) := \sum_{x \in \operatorname{spt} f \cap \operatorname{spt} g} f(x)\overline{g(x)}$$

je Hilbertův prostor, který není separabilní. Množina $\{e^a\}_{a \in (0,1)}$, kde $e^a(x) = 1$ pro $x = a$ a 0 jinde v něm tvoří úplný, ale nepočetný OG systém.

• množina $\{e^a\}$ z předchozího bodu je nespočetná algebraická báze nikoliv $\mathcal{H}$, ale menšího prostoru $\mathcal{H}_0$ funkcí s konečným nosičem. Nosič funkcí z $\mathcal{H}$ je obecně nejvýše spočetný. Dimenze prostoru $\mathcal{H}$ (=počet prvků alg. báze) je striktně větší než dimenze $\mathcal{H}_0$, která je kontinuum (=počet prvků R.)

5. Komplexní analýza.

Definice.

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : \ x, y \in R\}$$

kde $i^2 = -1$ (imaginární jednotka), $Re(z) = x$ (reálná část), $Im(z) = y$ (imaginární část), $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (absolutní hodnota), $\overline{z} = x - iy$ (číslo komplexně sdružené).
Poznámka. Ztotožnění: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $z = x + iy \leftrightarrow (x, y)$. Shoduje se i $|z| = \|(x, y)\|_2$.
Definice. $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Terminologie: $\mathbb{C}$...otevřená Gaussova rovina, $\mathbb{S}$...uzavřená Gaussova rovina, ∞...komplexní nekonečno.
Početní pravidla:
• $a \pm \infty = \infty$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
• $a \cdot \infty = \infty$ pro $\forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$
• $a/\infty = \infty$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
• $a/0 = \infty$ pro $\forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$
Nedefinováno zůstává: $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞, $\infty \pm \infty$.

Příklady. [Komplexní funkce.]
• polynomy, racionální funkce. Pozn.: dodefinováním $p(\infty)\infty$ je polynom spojitá funkce v $\mathbb{S}$.
• e^z, $\sin z$, $\cos z$ - definovány mocinnou řadou, která (absolutně) konverguje pro $\forall z \in \mathbb{C}$. Klíčový vztah:

$$\exp(a + ib) = \exp(a)[\cos b + i \sin b]$$

Definice. Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definujeme

$$\begin{aligned}
\log z &= \{\zeta \in \mathbb{C} : \ \exp \zeta = z\} \\
\arg z &= \{\beta \in \mathbb{R} : \ z = |z| \exp(i\beta)\} \\
\operatorname{Log} z &= \{\zeta \in \log z : \ Im(\zeta) \in (-\pi, \pi]\} \\
\operatorname{Arg} z &= \{\beta \in \arg z : \ \beta \in (-\pi, \pi]\}
\end{aligned}$$

Poznámky.
• log, arg nejsou to funkce v klasickém smyslu: číslu je přiřazena množina.

Např.: $\log 1 = \{2k\pi i : \ k \in \mathbb{Z}\}$.
• Log, Arg funkce jsou: číslu je přiřazeno právě jedno číslo.
• platí vztahy (ln je klasický reálný logaritmus):

$$\zeta \in \log z \iff Re\zeta = \ln|z| \ \& \ Im\zeta \in \arg z$$
$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

Definice. [Komplexní mocnina.] Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{C}$ definujeme

$$m_a(z) = \Big\{ \exp(a\zeta) : \ \zeta \in \log z \Big\}$$

Definice. Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z) : U(z_0) \to \mathbb{C}$ definujeme

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Limitu chápu v $\mathbb{C}$ a musí být vlastní. Ekvivalentní definice: $f'(z_0) = A$ právě když

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + Ah + r(h)$$

kde $r(h) = o(|h|)$ pro $h \to 0$.
Značím $f^{(1)}(z) = f'(z)$ a indukcí $f^{(n+1)}(z) = [f^{(n)}(z)]'$.

Věta 5.1. Platí:
(1) $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$
(2) $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
(3) $(f/g)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ pokud $g(z) \neq 0$
(4) $(f_{-1})'(w) = 1/f'(f_{-1}(w))$, je-li $f(z)$ prostá a $f'(z) \neq 0$
(5) $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$

Úmluva. Ω je otevřená část $\mathbb{C}$.

Definice. Funkce $f(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ se nazve holomorfní v Ω, pokud $f'(z)$ existuje všude v Ω. Značíme $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Příklady.
• polynom $P(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$
• racionální funkce $R(z) = P(z)/Q(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{z : \ Q(z) = 0\})$
• e^z, $\sin z$, $\cos z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ (lze derivovat člen po členu.)
• Věta 5.1. $\implies$ sčítáním, odčítáním, násobením, dělením, invertováním a skládáním holomorfních funkcí vzniká funkce holomorfní (všude, kde má smysl)

Poznámka. Ztotožnění $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ... ztotožnění $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s funkcí $\tilde{f}(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $z = x + iy$ a $\tilde{f} = (f_1, f_2) = (Ref, Imf)$.

Příklad. $f(z) = z^2$ odpovídá $\tilde{f}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

Věta 5.2. [Cauchy-Riemannovy podmínky.] Nechť $f(z) : U(z_0) \to \mathbb{C}$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ je dána. Nechť $\tilde{f} = (f_1, f_2)(x, y) : U((x_0, y_0)) \to \mathbb{R}^2$ jí odpovídá dle ztotožnění $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R}^2$, kde $z_0 = x_0 + iy_0$. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:
(1) existuje $f'(z)$ v bodě z_0
(2) funkce $\tilde{f}$ má v bodě (x_0, y_0) totální diferenciál a navíc v (x_0, y_0) platí tzv. Cauchy-Riemannovy podmínky:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

Navíc platí:

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - i \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)}$$

Poznámka.
• holomorfnost (=existence $f'(z)$) je mnohem restriktivnější, než se zdá na první pohled.
• funkce $f(z) = Rez$ není holomorfní: nesplní C.R. podmínky.

Věta 5.3. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $f'(z) \neq 0$ v Ω. Potom systémy křivek $\mathcal{I} = \{Ref = c\}_{c \in \mathbb{R}}$ a $\mathcal{J} = \{Imf = d\}_{d \in \mathbb{R}}$ jsou navzájem ortogonální. Tj., pokud křivka $\varphi \in \mathcal{I}$ protíná křivku $\psi \in \mathcal{J}$, tak jedině pod pravým úhlem.

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$. Křivkou v Ω nazýváme funkci $\varphi(t) : [a, b] \to \Omega$, která je spojitá, po částech C^1 a $\varphi'(t) \neq 0$ až na konečně výjimek.
Geometrický obraz $\langle\varphi\rangle$, počáteční bod p.b. φ, koncový bod k.b. φ, uzavřená, jednoduchá a jednoduchá uzavřená křivka se definují analogicky jako u křivek v $\mathbb{R}^n$. Taktéž křivka opačná $\ominus\varphi$ a součet křivek $\varphi \oplus \psi$.
Pro funkci $f(z) : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ definuji křivkový integrál jako

$$\int_\varphi f(z)\, dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt$$

kde integrál vpravo chápu jako Lebesgueův integrál komplexní funkce.
Dále definuji délku křivky

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\, dt\,.$$

Věta 5.4. [Základní vlastnosti křivkového integrálu v $\mathbb{C}$.]

(1)

$$\int_\varphi [f(z)+g(z)]\,dz = \int_\varphi f(z)\,dz + \int_\varphi g(z)\,dz$$

(2)

$$\int_{\ominus\varphi} f(z)\,dz = -\int_\varphi f(z)\,dz\,, \qquad \int_{\varphi\oplus\psi} f(z)\,dz = \int_\varphi f(z)\,dz + \int_\psi f(z)\,dz$$

(3) Jestliže $F'(z) = f(z)$ na $\Omega \supset \langle\varphi\rangle$, pak

$$\int_\varphi f(z)\,dz = F(k.b.\varphi) - F(p.b.\varphi)\,, \quad \text{speciálně} \quad \int_\varphi dz = k.b.\varphi - p.b.\varphi$$

(4)

$$|\int_\varphi f(z)\,dz| \le L(\varphi) \sup_{z\in\langle\varphi\rangle} |f(z)|$$

Příklad. Pro $n \in \mathbb{Z}$, $\zeta \in \mathbb{C}$ a křivku $C = \zeta + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ je

$$\int_C (z-\zeta)^n\,dz = \begin{cases} 0 & n \ne -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Definice. Jednoduchá uzavřená křivka φ v $\mathbb{C}$ se nazývá Jordanova. Lze psát $C = int\,\varphi \cup \langle\varphi\rangle \cup ext\,\varphi$, kde $int\,\varphi$ je oblast uvnitř a $ext\,\varphi$ oblast vně křivky.
Jordanova křivka je kladně (záporně) orientovaná, pokud obíhá kolem $int\,\varphi$ proti směru (ve směru) hodinových ručiček.
Množina $\Omega \subset \mathbb{C}$ se nazve jednoduše souvislá, pokud (i) je souvislá a (ii) je-li φ Jordanova křivka v Ω, je $int\,\varphi \subset \Omega$.
(Srovnejte s definicemi v R^2.)

Věta 5.5. [Cauchyho věta.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$ a φ je Jordanova křivka v Ω taková, že $int\,\varphi \subset \Omega$. Potom

$$\int_\varphi f(z)\,dz = 0\,.$$

Poznámky.
• předpoklad $int\,\varphi \subset \Omega$ (zaručující $f(z) \in \mathcal{H}(int\,\varphi)$) je podstatný: viz integraci $1/z$ kolem počátku.
• v jednoduše souvislé Ω je z definice splněn.

Lemma 5.1. [O velké půlkružnici.] Nechť $f(z)$ je spojitá v $\Omega = \{z \in C : Im\,(z) > 0\}$ a splňuje zde pro $|z| \geq R_0$ odhad $|f(z)| \leq K/|z|$. Nechť C_R je křivka $\varphi(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Potom

$$\int_{C_R} f(z) e^{iz}\, dz \to 0 \qquad \text{pro } R \to +\infty\,.$$

Poznámka. Předpoklad $|f(z)| \leq K/|z|$ pro $|z| \geq R_0$ je splněn např. pokud $f(z) = P(z)/Q(z)$, kde P, Q jsou polynomy a $st\, Q > st\, P$.

Lemma 5.2. [O malé půlkružnici.] Nechť $f(z)$ je spojitá v $P(z_0)$ a nechť $f(z)(z - z_0) \to A \in C$ pro $z \to z_0$. Nechť C_r je křivka $\varphi(t) = re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Potom

$$\int_{C_r} f(z)\, dz \to iA(\beta - \alpha) \qquad \text{pro } r \to 0+\ .$$

Poznámka. Předpoklad $f(z)(z - z_0) \to A \in C$ pro $z \to z_0$ je splněn např. pokud $f(z) = g(z)/(z - z_0)$, kde $g(z)$ je spojitá v z_0 a $g(z_0) = A$.

Lemma 5.3. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast (tj. otevřená, souvislá množina), nechť $F(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ splňuje $F'(z) = 0$ v Ω. Potom $F(z)$ je konstantní v Ω.

Poznámky.
- Srovnej s tvrzením: $f(x) : I \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval, a $f'(x) = 0$ v I $\implies$ $f(x)$ je konstantní v I.
- zobecnění: $F^{(n+1)}(z) = 0 \implies F(z)$ je polynom stupně $\leq n$.

Věta 5.6. [Cauchyho vzorec.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, nechť φ je kladně orientovaná Jordanova křivka v Ω a $int\,\varphi \subset \Omega$. Potom
(1) Pro $\forall \zeta \in int\,\varphi$ platí

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z - \zeta}\, dz\,.$$

(2) $f(z)$ je v $int\,\varphi$ nekonečně krát derivovatelná a pro $\forall \zeta \in int\,\varphi$ platí

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{n+1}}\, dz\,.$$

Důsledky.
- holomorfní funkce je v $int\,\varphi$ jednoznačně určena hodnotami na $\langle\varphi\rangle$.
- holomorfní funkce je nekonečně diferencovatelná.

Věta 5.7. [Charakterizace polynomů v $\mathbb{C}$.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Potom $f(z)$ je polynom stupně $\leq n$ právě když

$$\frac{f(z)}{z^{n+1}} \to 0 \quad \text{pro} \quad z \to \infty\,.$$

Důsledky.
- funkce holomorfní v $\mathbb{C}$, která není polynom (např. e^z, $\sin z$), roste do nekonečna (pro vhodnou podposloupnost) velmi rychle
- tzv. Liouvilleova věta: funkce holomorfní a omezená v $\mathbb{C}$ je konstatní.

Věta 5.8. [Základní věta algebry.] Polynom stupně ≥ 1 má v $\mathbb{C}$ alespoň jeden nulový bod.

Opakování. Řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad (*)$$

(kde z, z_0, $a_k \in \mathbb{C}$) se nazývá mocninná řada o středu z_0. Věta A (minulý rok): existuje (jednoznačně určené) číslo $R \in [0, +\infty]$ tak, že řada (*) konverguje pro každé $z \in U(z_0, R)$ a diverguje pro $|z - z_0| > R$. Na množině $U(z_0, R)$ lze řadu libovolně krát derivovat/integrovat (dle komplexní proměnné.) Speciálně, její součet je zde holomorfní.
Dále: řada (*) konverguje lokálně stejnoměrně v $U(z_0, R)$, tj. stejnoměrně na kompaktních podmnožinách

Definice. Nechť z_0, $a_k \in \mathbb{C}$. Řada

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad (1)$$

se nazývá Laurentova řada o středu z_0. Řady

$$(2)\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{resp.} \quad (3)\ \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z - z_0)^k := \sum_{l=1}^{\infty} a_{-l} (z - z_0)^{-l}$$

se nazývají regulární resp. hlavní část řady (1). Řada (1) konverguje (stejnoměrně, absolutně atd.), pokud (2) a (3) mají tuto vlastnost.

Poznámky.
- jde o zobecnění pojmu mocninné řady (*)
- úmluva: $a^0 = 1$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
- (3) a potažmo (1) nemá smysl pro $z = z_0$

Značení. Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le +\infty$ definuji mezikruží

$$P(z_0; r, R) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \; r < |z - z_0| < R \right\}.$$

Věta 5.9. [Konvergence Laurentovy řady.] Je dána Laurentova řada. Potom existují jednoznačně určená čísla r, $R \in [0, +\infty]$ tak, že
(i) R je poloměr konvegence regulární části
(ii) hlavní část konveguje pokud $|z - z_0| > r$ a diverguje pokud $|z - z_0| < r$.
Je-li $r < R$, pak Laurentova řada konverguje lokálně stejnoměrně v $P(z_0; r, R)$ a její součet je zde holomorfní.
Terminologie: $P(z_0; r, R)$ se nazve mezikruží konvergence Laurentovy řady.

Poznámka.
• předchozí věta: Laurentova řada určuje v mezikruží konvergence holomorfní funkci
• následující věta: obrácené tvrzení - funkce holomorfní v mezikruží je vždy součtem Laurentovy řady

Věta 5.10. [Existence Laurentova rozvoje.] Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le +\infty$. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0; r, R))$. Potom $f(z)$ je v $P(z_0; r, R)$ součtem jednoznačně určené Laurentovy řady o středu z_0. Pro její koeficienty platí

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz \,,$$

kde φ je kružnice $z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ a $\rho \in (r, R)$ je libovolné.
Terminologie: tato řada se nazývá Laurentův rozvoj funkce o středu z_0.

Poznámka. Vesměs budeme užívat pro speciální případ $r = 0$, tj. $P(z_0; 0, R) = P(z_0, R)$.

Věta 5.11. [Taylorův rozvoj.] Nechť $f(z) : \Omega \to \mathbb{C}$. Rovnost

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \,, \qquad \text{kde} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \,,$$

platí v každém kruhu $U(z_0, R)$, v němž je $f(z)$ holomorfní.

Definice. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0))$. Koeficient a_{-1} v Laurentově rozvoji funkce $f(z)$ o středu z_0 nazýváme reziduum funkce $f(z)$ v bodě z_0. Značíme $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$.

Věta 5.12. [Reziduová věta.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega \setminus K)$, kde Ω je jednoduše souvislá a K je konečná. Nechť φ je kladně orientová Jordanova křivka v Ω a $K \cap \langle \varphi \rangle = \emptyset$. Potom

$$\int_\varphi f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{\zeta \in K \cap \operatorname{int} \varphi} \operatorname{res}_\zeta f(z) \,.$$

Věta 5.13. [Výpočet rezidua.] 1. Nechť $f(z) = g(z)/(z - z_0)$, kde $g(z) \in \mathcal{H}(U(z_0))$. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = g(z_0)\,.$$

2. Nechť $f(z) = g(z)/h(z)$, kde $g(z)$, $h(z) \in \mathcal{H}(U(z_0))$ a $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,.$$

3. Nechť $f(z) = g(z)/h(z)$, kde $g(z)$, $h(z) \in \mathcal{H}(U(z_0))$ a $h(z_0) = h'(z_0) = \cdots = h^{(p-1)}(z_0)$, avšak $h^{(p)}(z_0) \neq 0$. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^p f(z)\right]^{(p-1)}\,.$$

Poznámky.
• O funkci $h(z)$ v situaci 3 říkáme, že má v bodě z_0 kořen násobnosti p.
• V aplikacích lze obvykle limitu uvedenou v bodě 3 počítat rovnou dosazením $z = z_0$.

Definice. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$. Říkáme, že funkce $f(z)$ má v bodě izolovanou singularitu, je-li $f(z)$ holomorfní na jistém $P(z_0)$.
Na základě Laurentova rozvoje v daném bodě se rozlišuje:
(i) odstranitelná singularita, je-li $a_k = 0$ pro $\forall k < 0$
(ii) pól násobnosti $p \in \mathbb{N}$, je-li $a_{-p} \neq 0$ a $a_k = 0$ pro $\forall k < -p$
(iii) podstatná singularita, je-li $a_k \neq 0$ pro nekonečně $k < 0$

Příklady.
• $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1-\cos z}{z^2}$ ... v bodě 0 odstranitelné singularity
• $\frac{e^{z^2}}{z^3}$ ... v bodě 0 pól násobnosti 3
• $\cosh(1/z)$ ... v bodě 0 podstatná singularita

Věta 5.14. [Charakterizace odstranitelné singularity.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0))$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:
(1) $f(z)$ má v bodě z_0 odstranitelnou singularitu
(2) existuje $g(z) \in \mathcal{H}(U(z_0))$ tak, že $f(z) = g(z)$ na $P(z_0)$
(3) $f(z)$ má v bodě z_0 vlastní limitu
(4) $f(z)$ je omezená na jistém $P(z_0)$

Věta 5.15. [Charakterizace pólu.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0))$. Potom je ekvivalentní:
(1) existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $f(z)$ má v z_0 pól násobnosti p
(2) $f(z) \to \infty$ pro $z \to z_0$

Věta 5.16. [Charakterizace podstatné singularity.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0))$. Potom je ekvivalentní:
(1) $f(z)$ má v z_0 podstatnou singularitu
(2) pro $\forall \delta > 0$ je množina $f(P(z_0, \delta))$ hustá v $\mathbb{S}$

Poznámka. Množina M je hustá v prostoru X, pokud

$$\big(\forall x \in X\big)\big(\forall \epsilon > 0\big)\big[M \cap U(x, \epsilon) \neq \emptyset\big] .$$

Definice. Bod z_0 nazveme hromadným bodem množiny M, jestliže $P(z_0, \delta) \cap M \neq \emptyset$ pro $\forall \delta > 0$.

Příklady.
- hromadné body $\mathbb{Q}$ ... $\mathbb{R}$
- konečná množina nemá hromadné body
- množina $\{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$ má jediný hromadný bod: 0

Lemma 5.4. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$ a nechť z_0 je hromadný bod $\mathcal{N} = \{\zeta : \ f(\zeta) = 0\}$. Potom $f(z) = 0$ v $U(z_0, R)$.

Věta 5.17. [O jednoznačnosti.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, kde Ω je souvislá. Nechť $\mathcal{N} = \{\zeta : \ f(\zeta) = 0\}$ má v Ω hromadný bod. Potom $f(z) = 0$ v Ω.

Důsledek. $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ a $f(z) = 0$ v $\mathbb{R} \implies f(z) = 0$ v $\mathbb{C}$.

Poznámka. V.5.17 jinak: pokud $f(z) \not\equiv 0$, pak $\mathcal{N}$ nemá v Ω hromadný bod. – Může ho však mít na $\partial\Omega$: polož $f(z) = \sin(1/z)$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Potom $\mathcal{N} = \{1/(k\pi) : \ 0 \neq k \in \mathbb{Z}\}$ má hromadný bod $0 \notin \Omega$.

6. Fourierova transformace.

Definice. Pro $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definujeme (dopřednou) Fourierovu transformaci

$$\big[\mathcal{F} f\big](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)} f(x)\, dx \qquad \xi \in \mathbb{R}^n .$$

Dále definujeme inverzní (zpětnou) F. t.

$$\big[\mathcal{F}_{-1} f\big](\xi) = \check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x,\xi)} f(x)\, dx \qquad \xi \in \mathbb{R}^n .$$

Zde (x, ξ) je skalární součin x, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Poznámky.
- definice je korektní: $|\exp\{\pm 2\pi i(x,\xi)\}| = 1$, majoranta integrálu $|f(x)|$

• $\mathcal{F}$ přiřazuje funkci $f(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ funkci $\hat f(\xi):\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$
• jiná varianta definice:

$$\hat f(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)}f(x)\,dx\,,\qquad \check f(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)}f(x)\,dx\,.$$

Značení. Prostory funkcí $f(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$.
• $L^p(\mathbb{R}^n)$ ... L^p-integrovatelné, $\|f\|_p=\left[\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}$
• $C_b(\mathbb{R}^n)$ ... spojité a omezené, $\|f\|_{C_b}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|$
• $C_0(\mathbb{R}^n)$ ... s nulou v nekonečnu:

$$C_0(\mathbb{R}^n)=\{f\in C_b(\mathbb{R}^n):\ |f(x)|\to 0 \text{ pro } |x|\to+\infty\}$$

• $C_c(\mathbb{R}^n)$ ... s kompaktním nosičem - nosič f definuji

$$\operatorname{spt} f=\overline{\{x\in\mathbb{R}^n:\ f(x)\neq 0\}}\,.$$

Věta 6.1. $\mathcal{F}$ je spojité lineární zobrazení z $L^1(\mathbb{R}^n)$ do $C_b(\mathbb{R}^n)$ a platí

$$\left\|\hat f\right\|_{C_b}\le\|f\|_1\,.$$

Věta 6.2. [Zachování symetrie.] Nechť $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ je sudá (resp. lichá resp. radiální.) Potom $\hat f$ má analogickou vlastnost.

Poznámka. Pro $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je

$$\hat f(\xi)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos 2\pi\xi x\,dx-i\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin 2\pi\xi x\,dx\,.$$

(Souvislost s Fourierovými řadami.)

Věta 6.3. Nechť $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pak platí:
(1) $\check f(\xi)=\hat f(-\xi)$
(2) $\overline{\check f}(\xi)=\hat{\overline f}(\xi)$, $\overline{\hat f}(\xi)=\check{\overline f}(\xi)$
(3) $\hat f(\xi-\eta)=\left[\widehat{e^{2\pi i(x,\eta)}f(x)}\right](\xi)$
(4) $\widehat{f(x-z)}(\xi)=e^{-2\pi i(\xi,z)}\hat f(\xi)$
(5) $\widehat{f(\varepsilon x)}(\xi)=\frac{1}{|\varepsilon|^n}\hat f(\xi/\varepsilon)$ pro $\varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Věta 6.4. [Vztah F.t. a derivace.]
(1) Nechť $f(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap C_0(\mathbb{R}^n)$ a $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap C(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi)=2\pi i\xi_j\hat f(\xi)\qquad\forall\xi\in\mathbb{R}^n\,.$$

(2) Nechť $f(x)$, $x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = \big[-\widehat{2\pi i x_j f(x)}\big](\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n .$$

Poznámka. Názorně: derivace f dle x_j odpovídá násobení $\hat{f}$ (konstanta krát) ξ_j. A naopak: derivace $\hat{f}$ dle ξ_j odpovídá násobení (konstanta krát) x_j.

Definice. Multiindexem nazývám n-tici čísel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, kde $\alpha_j \geq 0$ jsou celá. Číslo $|\alpha| = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|$ nazývám výška (stupeň) multiindexu. Pro funkci $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definuji

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} .$$

Pro vektor $x \in \mathbb{R}^n$ definuji

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} .$$

Zobecnění. [Věty 6.4.] (1) Nechť $D^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ pro každý multiindex $|\alpha| \leq k$. Potom

$$\widehat{[D^\alpha f]}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \qquad \forall |\alpha| \leq k .$$

(2) Nechť $x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pro každý multiindex $|\alpha| \leq k$. Potom

$$\big[D^\alpha \hat{f}\big](\xi) = \big[\widehat{(-2\pi i x)^\alpha f(x)}\big](\xi) \qquad \forall |\alpha| \leq k .$$

Značení.

$$\begin{aligned} C^k(\mathbb{R}^n) &= \big\{ f(x) : \ D^\alpha f(x) \in C(\mathbb{R}^n) \text{ pro } \forall |\alpha| \leq k \big\} \\ C_c^k(\mathbb{R}^n) &= C_c(\mathbb{R}^n) \cap C^k(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Zde $k = 1, \dots, \infty$.

Věta 6.5.* [Hustota hladkých funkcí v L^p.] Pro libovolné $p \in [1, \infty)$ je množina $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ hustá v $L^p(\mathbb{R}^n)$, tj.

$$\Big(\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)\Big)\Big(\forall \varepsilon > 0\Big)\Big(\exists \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\Big)\big[\|f - \varphi\|_{L^p} < \varepsilon\big]$$

Poznámky.

- "hluboké" tvrzení o Lebesgueově integrálu.

• důsledek (fakticky ekvivalentní): ke každé funkci $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ existuje posloupnost funkcí $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tak, že $\varphi_n \to f$ v normě $L^p(\mathbb{R}^n)$.
• pozor: neplatí pro $p = \infty$.

Věta 6.6. [Nulovost F.t. v nekonečnu.] Nechť $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom $\hat{f}(\xi) \to 0$ pro $|\xi| \to \infty$.

Definice. Pro $f(x)$, $g(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definuji konvoluci

$$[f * g](x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$$

pokud má integrál smysl.

Věta 6.7. [Vlastnosti konvoluce.]
(1) komutativita: $[f * g](x) = [g * f](x)$
(2) Nechť $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g(x) \in L^q(\mathbb{R}^n)$, kde $1/p + 1/q = 1$. Potom $[f * g](x)$ má smysl pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a platí odhad

$$|[f * g](x)| \le \|f\|_p \|g\|_q \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n\,.$$

(3) Nechť $f(x)$, $g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom $[f * g](x)$ má smysl pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a platí odhad

$$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1\,.$$

Věta 6.8. [Vztah F.t. a konvoluce.] Nechť $f(x)$, $g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\widehat{[f * g]}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\,.$$

Poznámky.
• operátor $f(x) \mapsto [Af](x)$ (neformálně) nazveme “lokální”, pokud $Af(x_0)$ lze určit z hodnoty $f(x_0)$. Jinak ho nazveme ”nelokální”.
• derivace, konvoluce ... nelokální operátory, násobení funkcí, konstantou ... lokální operátory
• výhoda F.t.: přeměňuje některé nelokální operátory (derivace, konvoluce) na lokální
• nevýhody F.t.: sama je značně nelokální. Také “rozmazává” nosič - viz následující věta.

Věta 6.9. Nechť $f(x)$ je spojitá funkce, která má omezený nosič. Potom: má-li $\hat{f}(\xi)$ omezený nosič, je nutně $f(x) \equiv 0$.

Důsledek.
• Nelze docílit toho, aby jak $f(x)$, tak $\hat{f}(\xi)$ měly obě omezený nosič, kromě

triviálního případu $f(x) \equiv 0$.
• obecněji platí tzv. princip neurčitosti: čím je nosič $f(x)$ menší, tím je nosič $\hat{f}$ větší - a naopak.

Definice. Funkce $\exp(-\pi|x|^2)$ se nazývá gausián.

Lemma 6.1. [F.t. gausiánu.] Platí

$$\left[\widehat{\exp(-\pi|x|^2)}\right](\xi) = \exp(-\pi|\xi|^2)\,.$$

Lemma 6.2. [Integrace radiálních funkcí.] Nechť $0 \le r < R \le +\infty$. Potom

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ 0<|x|<R\}} f(|x|)\,dx = \kappa_{n-1}\int_r^R f(\rho)\rho^{n-1}\,d\rho\,,$$

kde κ_{n-1} je $(n-1)$-rozměrná míra množiny $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ |x| = 1\}$.

Poznámky.
• aplikace: $\int_{|x|>1} |x|^a\,dx$ konverguje $\iff$ $a < -n$ (jsme v $\mathbb{R}^n$.)
• lze dopočítat, že $\kappa_{n-1} = n\pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$; speciálně: $\kappa_1 = 2\pi$ (obvod kružnice), $\kappa_2 = 4\pi$ (povrch sféry.)

Definice. Schwartzův prostor (prostor rychle klesajících funkcí) definujeme jako

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) :\ x^\alpha D^\beta f(x)\ \text{ omezená pro } \forall\ \alpha,\beta\right\}.$$

Ekvivalentně: $p(x)D^\beta f(x)$ je omezená pro všechna β a všechny polynomy $p(x)$ proměnných $x_1, \dots, x_n$.

Věta 6.10. [Vlastnosti $\mathcal{S}$.]
(1) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
(2) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ pro $\forall p \in [1, +\infty]$
(3) $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies x^\alpha f(x),\ D^\beta f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
(4) $f(x) \in \mathbb{R}^n \implies \hat{f}(\xi),\ \check{f}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Věta 6.11. [O inverzi F.t.] Nechť $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Potom $\mathcal{F}_{-1}[\mathcal{F}f] = \mathcal{F}[\mathcal{F}_{-1}f] = f$.

Poznámky.
• uvedený důkaz projde za slabších předpokladů: $f \in L^1 \cap C_b$, $\hat{f} \in L^1$.
• důsledek: $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je vzájemně jednoznačné zobrazení

Lemma 6.3. Nechť $f(x), g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)\,dx\,, \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\check{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x)g(x)\,dx\,.$$

Lemma 6.4.* Nechť $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Pokud

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\,,$$

potom $f(x) = 0$ s.v. v $\mathbb{R}^n$.

Poznámky.
• "hluboké" tvrzení o Lebesgueově integrálu, příbuzné s Větou 6.5.
• ekvivalentně: $\lambda_n\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\} > 0 \implies \exists \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tak, že $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) \neq 0$.
• za silnějšího předpokladu $f(x)$ spojitá dokázáno v minulém semestru: Lemma 3.1.

Věta 6.12. [Inverze F.t. v L^1.] Nechť $f(x)$, $\hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom $[\hat{f}(\xi)]\check{}(x) = f(x)$ pro s.v. $x \in \mathbb{R}^n$.

Poznámky.
• důsledek: tzv. věta o jednoznačnosti: $f \in L^1$, $\hat{f} = 0 \implies f = 0$ s.v.
• speciálně: $\mathcal{F}$ je prostá v L^1.

Věta 6.13. [Plancherelova rovnost.] Nechť $f(x)$, $g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi\,.$$

Jinými slovy, $\mathcal{F}$ zachovává skalární součin v $L^2(\mathbb{R}^n)$, speciálně zachovává normu.

Věta 6.14. [F.t. v L^2]
(1) Fourierovu transformaci (chápanou jako zobrazení z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) lze rozšířit na zobrazení z $L^2(\mathbb{R}^n)$ do $L^2(\mathbb{R}^n)$.
(2) Toto rozšíření je izomorfismus $L^2(\mathbb{R}^n)$ na sebe, tj. vzájemně jednoznačné zobrazení, zachovávající normu.

Poznámky.
• věta nedává praktický návod, jak $\hat{f}$ pro obecnou f počítat
• pokud $f \in L^2 \cap L^1$, lze použít standardní definici
• pro $f \in L^2 \setminus L^1$ lze použít zobecněnou definici

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} e^{-2\pi i(x,\xi)} f(x)\,dx\,.$$

Poznámky.
• míra Ω konečná ... $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pro $p > q$. Opačná inkluze neplatí: $x^{-1/2} \in L^1(0,1) \setminus L^2(0,1)$.

• míra Ω nekonečná ... neplatí ani jedna inkluze: $\frac{1}{1+x} \in L^2(0,+\infty) \setminus L^1(0,+\infty)$.

Věta 6.15. [Princip neurčitosti.] Nechť $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f(x) \not\equiv 0$. Potom

$$\frac{\|Xf\|_2}{\|f\|_2}\frac{\|Df\|_2}{\|f\|_2} \geq \frac{1}{2\pi}\,.$$

Poznámky.
• definujeme operátory $X : f(x) \to xf(x)$, $D : f(x) \to \frac{1}{2\pi i}f'(x)$
• Věta 6.4. ... $\widehat{Df}(\xi) = \xi\hat{f}(\xi)$
• operátory X, D jsou samoadjungované v $L^2(\mathbb{R}^n)$, tj. $\langle Xf, g\rangle = \langle f, Xg\rangle$, totéž pro D.
• platí $[DX - XD](f) = \frac{1}{2\pi i}f$
• veličina:

$$\frac{\|Xf\|_2}{\|f\|_2} = \left(\frac{\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\,dx}{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx}\right)^{1/2}$$

vyjadřuje míru rozptýlenosti nosiče f od 0. Totéž vyjadřuje $\frac{\|Df\|_2}{\|f\|_2}$ pro $\hat{f}$.
• srovnej předchozí větu s Větou 6.9.: $f(x)$ má omezený nosič a $f(x) \not\equiv 0$, pak $\hat{f}(\xi)$ nemá omezený nosič
• lze ukázat, že rovnost ve Větě 6.15. nastane pouze pro funkci typu e^{-ax^2}

7. Laplaceova transformace.

Definice. Definujeme prostor

$$L^1_+ := \left\{f(t) : (0,+\infty) \to \mathbb{C} \text{ měřitelná a } \exists\, c\; in\mathbb{R},\; f(t)e^{-ct} \in L^1(0,+\infty)\right\}.$$

Poznámky.
• $L^1_+ \subsetneq L^1(0,+\infty)$
• $f \in L^1_+ \implies f \in L^1(0,K)$ pro $\forall K < +\infty$ (tj. je lokálně integrovatelná)
• $f(t) = e^{t^2} \notin L^1_+$

Značení. Pro $f(t) \in L^1_+$ značíme

$$c_f = \inf\left\{c \in \mathbb{R} :\; f(t)e^{-ct} \in L^1(0,+\infty)\right\}$$

Obecně $f(t)e^{-c_f t} \notin L^1$, ale pro libovolné $c > c_f$ je $f(t)e^{-ct} \in L^1$.

Definice. Laplaceovu transformaci funkce $f(t) \in L^1_+$ definujeme

$$\mathcal{L}\{f(t)\}[p] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt \qquad \forall p \in \mathbb{C},\; \operatorname{Re} p > c_f\,.$$

Poznámky.
- přiřazuje funkci $f(t)$ funkci $F(p)$
- definice je korektní: $|f(t)|e^{-\operatorname{Re} pt}$ integrovatelná majoranta
- souvislost s Fourierovou transformací:

$$F(p) = \big[f(x)\widehat{\chi(x)e^{-\operatorname{Re} px}}\big](\frac{\operatorname{Im} p}{2\pi}).$$

Věta 7.1. [Základní vlastnosti L.t.] Nechť $f(t) \in L^1_+$. Potom
(1) $F(p) \in \mathcal{H}\big(\{p \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} p > c_f\}\big)$
(2) $\frac{d^k}{dp^k}F(p) = \mathcal{L}\big\{(-t)^k f(t)\big\}[p]$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$
(3) $F(p) \to 0$ pro $\operatorname{Re} p \to +\infty$, $\operatorname{Im} p \in \mathbb{R}$ pevné
(4) $F(p) \to 0$ pro $\operatorname{Im} p \to \pm\infty$, $\operatorname{Re} p > c_f$ pevné

Příklady.
- $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}$ $(c_f = 0)$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}$, $\operatorname{Re} p > a = c_f$
- $\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$, $\operatorname{Re} p > 0 = c_f$, pro $\alpha > -1$

Věta 7.2. [Vlastnosti L.t.] Nechť $f(t) \in L^1_+$. Potom
(1) $\mathcal{L}\big\{f(\alpha t)\big\}[p] = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}[p/\alpha]$ pro $\alpha > 0$, $\operatorname{Re} p > \alpha c_f$
(2) $\mathcal{L}\big\{f(t-\alpha)\big\}[p] = e^{-at}\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}[p]$ pro $\alpha > 0$, $\operatorname{Re} p > c_f$
(3) $\mathcal{L}\big\{e^{at}f(t)\big\}[p] = \mathcal{L}\big\{f(t)\big\}[p-a]$ pro $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a + c_f$

Věta 7.3. [L.t. a derivace.] Nechť $f^{(j)}(t) \in L^1_+ \cap C([0,+\infty))$ pro $j = 0,\dots,n$. Potom

$$\mathcal{L}\big\{f^{(n)}(t)\big\}[p] = p^n F(p) - \sum_{j=0}^{n-1} p^j f^{(n-1-j)}(0).$$

Speciálně

$$\mathcal{L}\big\{f'(t)\big\}[p] = pF(p) - f(0),$$
$$\mathcal{L}\big\{f''(t)\big\}[p] = p^2F(p) - f'(0) - pf(0).$$

Definice. Pro $f(t)$, $g(t) \in L^1_+$ definujeme konvoluci

$$\big[f * g\big](t) = \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds \qquad t > 0$$

a nula pro $t < 0$.

Úmluva. Funkce z L^1_+ automaticky klademe rovné nula pro $t < 0$.

Lemma 7.1. [Konvoluce v L^1_+.]
(1) Nová definice konvoluce je ve shodě s definicí kapitoly 6.
(2) $f,\ g \in L^1_+ \implies [f * g](t)$ má smysl pro s.v. t a je prvkem L^1_+. Navíc: $c_{f*g} \leq \max\{c_f, c_g\}$.

Věta 7.4. [L.t. a konvoluce.] Nechť $f(t),\ g(t) \in L^1_+$. Potom

$$\mathcal{L}\big\{[f * g](t)\big\}[p] = \mathcal{L}\{f(t)\}[p]\,\mathcal{L}\{g(t)\}[p]\,, \qquad \operatorname{Re} p > \max\{c_f, c_g\}\,.$$

Důsledek. [L.t. primitivní funkce.] Nechť $f(t) \in L^1_+$. Označ $h(t) = \int_0^t f(s)\,ds$. Pozorování: $h = f * 1$. Tedy $\mathcal{L}h[p] = F(p)/p$. Navíc: $c_f \leq \max\{c_f, 0\}$.

Věta 7.5. [Prostota L.t.]
(1) Nechť $f(t) \in L^1_+$. Jestliže $\exists c^* \in \mathbb{R}$ tak, že $F(p) = 0$ pro všechna $p \in \mathbb{C}$, splňující $\operatorname{Re} p > c^*$, je $f(t) = 0$ skoro všude.
(2) Nechť $f(t),\ g(t) \in L^1_+$. Jestliže $\exists c^* \in \mathbb{R}$ tak, že $F(p) = G(p)$ pro všechna $p \in \mathbb{C}$, splňující $\operatorname{Re} p > c^*$, je $f(t) = g(t)$ skoro všude.

Věta 7.6. [Inverze L.t.] Nechť $F(p) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\})$, nechť $|F(p)| \leq K|p|^{-2}$ pro $|p| > R$. Potom existuje $f(t) \in L^1_+$ tak, že $\mathcal{L}\{f(t)\}[p] = F(p)$. Dále platí vzorce

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)e^{tz}\,dz = \sum_k \operatorname{res}_{z=z_k} F(z)e^{tz}\,.$$