# 1. Křivkový integrál

**Poznámka.** Funkce $\phi(t) : [a,b] \to R^n$ je $C^1$ v $[a,b]$ právě když existuje $\hat{\phi}(t) : R \to R^n$ třídy $C^1$ v $R$ tak, že $\hat{\phi}|_{[a,b]} = \phi$.

**Lemma 1.1** Nechť $\phi(t) : [a,b] \to R^n$. Pak je ekvivalentní:
(1) $\phi(t)$ je $C^1$ v $[a,b]$
(2) $\phi(t) \in C([a,b]) \cap C^1((a,b))$, existují vlastní jednostranné derivace $\phi'_+(a)$, $\phi'_-(b)$ a navíc

$$\phi'_+(a) = \lim_{t \to a+} \phi'(t) \qquad \phi'_-(b) = \lim_{t \to b-} \phi'(t)\,.$$

**Definice.** Nechť $\phi(t) : [a,b] \to R^n$ je $C^1$ funkce taková, že $\phi'(t) \neq 0$ všude v $[a,b]$. Potom $\phi$ (podrobněji dvojici $(\phi(t),[a,b])$) nazvu $C^1$-křivkou v $R^n$.
Nechť $\phi(t) : [a,b] \to R^n$ je spojitá funkce. Nechť existují body $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ takové, že $\forall i = 1, \ldots n$ je $\phi|_{[x_{i-1},x_i]}$ $C^1$-křivka v $R^n$. Potom $\phi$ (podrobněji dvojici $(\phi(t),[a,b])$) nazvu po částech $C^1$-křivkou v $R^n$.
Množina

$$\langle \phi \rangle = \phi([a,b]) = \{\phi(t) : \ t \in [a,b]\}$$

se nazývá geometrický obraz křivky $\phi$.
Alternativní terminologie: $\langle \phi \rangle$...křivka, $(\phi(t),[a,b])$...parametrizace křivky.

**Úmluva.** Křivka = po částech $C^1$ křivka.

**Terminologie.** Pro křivku $(\phi(t),[a,b])$ zavádím:
• $\phi'(t)$ ... tečný vektor křivky (existuje nejvýše konečně výjimečných bodů, kde neexistuje $\phi'(t)$, ale existují (obecně různé) $\phi'_+(t)$, $\phi'_-(t)$.)
• $\phi'(t)/\|\phi'(t)\|$ ... jednotkový tečný vektor. Norma je eukleidovská:

$$\|\phi'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \{\phi'_i(t)\}^2}$$

Též definován až na konečně vyjímek.
• $\phi(a)$ ... počáteční bod $\phi$, zkratka p. b. $\phi$.
• $\phi(b)$ ... koncový bod $\phi$, zkratka k. b. $\phi$.

**Definice.** Křivka $(\phi(t),[a,b])$ se nazve jednoduchá, je-li $\phi(t)$ prosté v $[a,b]$. Křivka se nazve uzavřená, jestliže p. b. $\phi$ = k. b. $\phi$. Uzavřená křivka se nazve jednoduchá, pokud $\phi$ je prosté v $[a,b)$.
**Příklady.**
• $\phi(t) = (\cos(2 * \pi * t), \sin(2 * \pi * t))$, $t \in [0,1]$ je jednoduchá uzavřená, $C^1$

křivka, $\langle\phi\rangle$ je jednotková kružnice.
• čtverec je geometrický obraz jednoduché uzavřené křivky, která není $C^1$.
• "8" je uzavřená křivka, která není jednoduchá

**Definice.** Nechť $(\phi(t),[a,b])$ je křivka. Křivku

$$\chi(t) := \phi(-t), \qquad t \in [-b,-a]$$

nazvu křivkou opačnou k $\phi$ a značím $\ominus\phi$.
Nechť $(\phi(t),[a,b])$, $(\psi(t),[c,d])$ jsou křivky a k. b. $\phi =$ p. b. $\psi$. Potom křivku $(\chi(t),[a,b+d-c])$

$$\chi(t) = \begin{cases} \phi(t), \; t \in [a,b] \\ \psi(t+c-b), \; t \in [b,b+d-c] \end{cases}$$

nazvu součtem křivek $\phi$, $\psi$ a značím $\phi \oplus \psi$.

**Poznámky.**
• $\langle\phi\rangle = \langle\ominus\phi\rangle$, p. b. $\phi =$ k. b. $\ominus\phi$, k. b. $\phi =$ p. b. $\ominus\phi$. V alternativní terminologii: jde o tytéž křivky s opačnou orientací.
• každá po částech $C^1$ křivka je součtem konečně mnoha $C^1$ křivek: $\phi = \phi^1 \oplus \phi^2 \oplus \cdots \oplus \phi^n$, kde $\phi^i = \phi|_{[x_{i-1},x_i]}$ (body $x_i$ z definice po částech $C^1$ křivky.)

**Definice.** Nechť $(\phi, I)$ je křivka v $R^n$.
1. Nechť $f(x) : \langle\phi\rangle \to R$. Křivkový integrál prvního druhu funkce $f$ po křivce $\phi$ definuji jako

$$\int_\phi f \, ds := \int_I f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| \, dt \, .$$

2. Nechť $F(x) : \langle\phi\rangle \to R^n$. Křivkový integrál druhého druhu funkce $F$ po křivce $\phi$ definuji jako

$$\int_\phi F \, d\phi := \int_I F(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \, dt \, .$$

Integrály vpravo chápu jako Lebesgueovy a požaduji, aby byly konečné.

**Poznámky.**
• Lebesgueovu integrálu nevadí, $\phi'(t)$ není definováno v konečně bodech
• v konkrétních příkladech je obvykle integrand spojitý a integrál počítám jako Newtonův

**Věta 1.1**[Základní vlastnosti křivkového integrálu.] 1. Nechť $\phi$ je křivka v $R^n$, $f(x)$, $g(x) : \langle\phi\rangle \to R$, $a \in R$. Potom

$$\int_\phi (f+g)\,ds = \int_\phi f\,ds + \int_\phi g\,ds\,, \qquad \int_\phi af\,ds = a\int_\phi f\,ds\,.$$

2. Nechť $\phi$, $\psi$ jsou křivky, k. b. $\phi =$ p. b. $\psi$ a $f(x) : \langle\phi\rangle \cup \langle\psi\rangle \to R$. Potom

$$\int_{\phi\oplus\psi} f\,ds = \int_\phi f\,ds + \int_\psi f\,ds\,.$$

Analogická tvrzení platí pro integrál druhého druhu.

**Lemma 1.2.** Nechť $(\phi(t), [a,b])$, $(\psi(\tau), [\alpha,\beta])$ jsou křivky. Nechť existuje $\chi(\tau) : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ vzájemně jednozačné funkce taková, že $\psi(\tau) = \phi(\chi(\tau))$ pro $\forall\tau \in [\alpha,\beta]$ a $\chi'(\tau)$ je spojitá, nenulová v $(\alpha,\beta)$.
Potom pro každé $f(x) : \langle\phi\rangle \to R$, $F(x) : \langle\phi\rangle \to R^n$ platí

$$\int_\phi f\,ds = \int_\psi f\,ds\,, \qquad \int_\phi F\,d\phi = \pm\int_\psi F\,ds\,,$$

kde $\pm$ je podle toho, zda $\chi$ roste/klesá.

**Důsledek.** Nechť $\phi$ je křivka a $f(x) : \langle\phi\rangle \to R$, $F(x) : \langle\phi\rangle \to R^n$. Potom

$$\int_{\ominus\phi} f\,ds = \int_\phi f\,ds \qquad \int_{\ominus\phi} F\,d(\ominus\phi) = -\int_\phi F\,ds\,,$$

**Věta 1.2.** Nechť $(\phi(t), [a,b])$, $(\psi(\tau), [\alpha,\beta])$ jsou jednoduché $C^1$-křivky takové, že $\langle\phi\rangle = \langle\psi\rangle$. Nechť $f(x) : \langle\phi\rangle \to R$, $F(x) : \langle\phi\rangle \to R^n$. Potom

$$\int_\phi f\,ds = \int_\psi f\,ds\,, \qquad \int_\phi F\,d\phi = \pm\int_\psi F\,ds\,,$$

kde $\pm$ je podle toho, zda $\phi(t)$, $\psi(t)$ probíhají množinu $\langle\phi\rangle = \langle\psi\rangle$ ve stejném/opačném smyslu.

**Poznámka.**
• křivkový integrál závisí pouze na obrazu křivky, ne na parametrizaci - integrál druhého druhu závisí navíc na směru probíhání.
• platí i pro po částech $C^1$ křivky.
• předpoklad jednoduchosti je podstatný.

**Definice.** Nechť $M \subset R^n$. Křivka $\phi$ se nazve křivkou v $M$, pokud $\langle\phi\rangle \subset M$. Množina $M \subset R^n$ se nazve křivkově souvislá, pokud pro libovolné body $x$, $y \in M$ existuje $\phi$ křivka v $M$ taková, že p. b. $\phi = x$, k. b. $\phi = y$.

**Příklady.**
- $R^n$ je křivkově souvislá
- konvexní množina je křivkově souvislá
- množina $M = R^2 \setminus \{(t,0) :\ t \in R\}$ není křivkově souvislá

**Definice.** Nechť $F(x) : \Omega \to R^n$, kde $\Omega \subset R^n$. Říkáme, že křivkový integrál z $F(x)$ nezávisí v $\Omega$ na cestě, pokud

$$\int_\phi F\, d\phi = \int_\psi F\, d\psi$$

pro libovolné křivky $\phi$, $\psi$ v $\Omega$ takové, že p. b. $\phi =$ p. b. $\psi$, k. b. $\phi =$ k. b. $\psi$.
Nechť $\Omega \subset R^n$ je otevřená množina, $F(x) : \Omega \to R^n$ je spojitá. Funkce $U(x) : \Omega \to R$ se nazve potenciál $F$, pokud $\nabla U(x) = F(x)$ pro $\forall x \in \Omega$.

**Věta 1.3.**[O existenci potenciálu.] Nechť $\Omega \subset R^n$ je otevřená, křivkově souvislá množina, $F(x) : \Omega \to R^n$ je spojitá funkce. Potom je ekvivalentní:
(1) existuje $U$ potenciál k $F$ v $\Omega$
(2) křivkový integrál z $F(x)$ nezávisí v $\Omega$ na cestě