2. Plošný integrál.

Poznámka. Obecně: integrování přes k-rozměrné útvary (k-plochy) v R^n. Omezíme se na případ $k = 2$, $n = 3$.

Definice. Množina $S \subset R^3$ se nazve *plocha*, pokud $S = \varphi(\Omega)$, kde $\Omega \subset R^2$ je otevřená množina a $\varphi : R^2 \to R^3$ splňuje:
(1) φ je C^1
(2) $h(\nabla\varphi) = 2$ všude v Ω
Dvojice (φ, Ω) se nazývá parametrizace plochy S.
Plocha je *jednoduchá*, pokud φ je prosté a φ^{-1} je spojité na S.

Poznámky.
• požadavek (1) ... plocha je hladká
• požadavek (2) ... plocha nedegeneruje např. v křivku
• požadavek φ^{-1} spojité: plocha se nazavinuje - vylučuje situaci, kdy kraj se dotýká vnitřku plochy
• terminologie předchozí kapitoly: (φ, Ω) - plocha, S - geometrický obraz plochy

Příklady.
(1) φ: $x = \cos u \cos v$, $y = \sin u \cos v$, $z = \sin v$, kde $(u, v) \in \Omega = (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ parametrizuje S... jednotkovou sféru s výjimkou jednoho "poledníku"
(2) φ: $y = y$, $z = z$, $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$, kde $(y, z) \in \Omega = \{(y, z) : y^2 + z^2 < 1\}$ ... horní půlka téže sféry

Věta 2.1. [Zadání plochy.]
(1) Nechť $\Omega \subset R^2$ je otevřená množina a $f(x, y) : \Omega \to R$ je C^1 funkce. Potom

$$\operatorname{graf} f = \{(x, y, z) : \ (x, y) \in \Omega, \ z = f(x, y)\}$$

je jednoduchá plocha.
(2) Nechť $F(x, y, z) : R^3 \to R$ je C^1 funkce. Nechť $a \in R^3$ je bod takový, že $F(a) = 0$ a $\nabla F(a) \neq 0$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že množina

$$U(a, \varepsilon) \cap \{F = 0\}$$

je jednoduchá plocha.

Poznámka. [Vnější součin.] Pro $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ vektory v R^3 definuji $u \times v$ jako vektor $(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$.
Vlastnosti:

• $(u+w)\times v = u\times v + w\times v$, $(au)\times v = u\times(av) = a(u\times v)$ (bilinearita)
• $u\times v = -(v\times u)$ (antisymetrie)
Geometrický význam:
• jsou-li u, v lineárně závislé, je $u\times v = 0$ (a naopak)
• jsou-li u, v lineárně nezávislé, je $w = u\times v$ (jednoznačně určený) vektor s těmito vlastnostmi:
(1) w je kolmý na rovinu, určenou vektory u, v
(2) délka w je rovna ploše rovnoběžníku, určeného vektory u, v
(3) vektory u, v a w (v tomto pořadí) tvoří kladně orientovanou bázi, tj. determinant matice se sloupci u, v, w je kladný.
Vzorce:
• u, v, $w \in R^3$: $w\cdot(u\times v) = \det((u)(v)(w))$ (zde $\cdot$ je skalární součin, $((u)(v)(w))$ matice se sloupci u, v a w.)
• u, v, $\bar{u}$, $\bar{v} \in R^3$, kde $\bar{u} = au + bv$, $\bar{v} = cu + dv$. Potom

$$\|\bar{u}\times\bar{v}\| = |\det A|\;\|u\times v\| \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Definice. [Plošný integrál 1. druhu] Nechť S je jednoduchá plocha, $f(x) : S \to R$. Plošný integrál 1. druhu funkce f přes plochu S definujeme jako

$$\int_S f\,dS = \int_\Omega [f\circ\varphi]\,\|\varphi_u\times\varphi_v\|\,dudv\,.$$

Integrál vpravo chápeme jako Lebesgueův a (φ,Ω) je libovolná parametrizace S.
Ve speciálním případě $f = 1$ dostaneme plošný obsah S.

Věta 2.2 [Korektnost definice.] Integrál 1. druhu nezávisí na parametrizaci.

Definice. Řekneme, že plocha S je orientovaná, pokud existuje spojitá funkce $\nu(x) : S \to R^3$ tak, že pro $\forall x\in S$ je $\nu(x)$ normálový vektor k S.
Dvojice (S,ν) se nazývá orientovaná plocha.

Poznámky.
• normálový vektor: kolmý na tečnou rovinu (ta je určena vektory φ_u, φ_v)
• názorně: rozlišuji "líc" plochy (ve směru ν) a "rub" plochy
• ne vždy existuje orientace - sféra, torus: ano, Möbiův list: ne.
• (S,ν) je orientovaná plocha ... $(S,-\nu)$ je opačně orientovaná plocha.

• jednoduchá plocha má vždy orientaci:

$$\nu := \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \circ \varphi^{-1} \qquad \text{na } S$$

Ve smyslu následující definice je to orientace souhlasná s parametrizací.

Definice. Nechť (S, ν) je orientovaná plocha. Řekneme, že parametrizace (φ, Ω) souhlasí s orientací, pokud

$$\nu \circ \varphi = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \qquad \text{v } \Omega\,.$$

Definice. [Plošný integrál 2. druhu.] Nechť (S, ν) je jednoduchá orientovaná plocha, $F(x) : S \to R^3$. Plošný integrál 2. druhu funkce F přes plochu S definujeme jako

$$\int_{S,\nu} F \cdot d\vec{S} = \int_S (F \cdot \nu)\, dS\,,$$

kde integrál napravo chápu jako integrál 1. druhu (skalární) funkce $f(x) = F(x) \cdot \nu(x)$.

Poznámky.
• názorný význam: tok pole F plochou S.
• starší značení: $d\vec{S} = (dydz, dzdx, dxdy)$.

Lemma 2.1. [Výpočet int. 2. druhu.] Nechť (S, ν), F jsou jako výše. Potom

$$\int_{S,\nu} F \cdot d\vec{S} = \int_\Omega [F \circ \varphi] \cdot (\varphi_u \times \varphi_v)\, dudv = \int_\Omega \det(F \circ \varphi, \varphi_u, \varphi_v)\, dudv\,,$$

kde (φ, Ω) je libovolná parametrizace S souhlasná s orientací ν a $(F \circ \varphi, \varphi_u, \varphi_v)$ je matice se sloupci $F \circ \varphi$, φ_u a φ_v.

Definice. Množina $S \subset R^3$ se nazve zobecněná plocha, pokud $S = \bigcup_j S^j \cup \Gamma$, kde S^j jsou jednoduché plochy a Γ lze pokrýt konečně mnoha křivkami. Navíc požaduji

$$S^k \cap \overline{\bigcup_{j \neq k} S^j} \neq \emptyset \qquad\qquad (*)$$

Příklady.
(1) $S_2 = \{x \in R^3 : \ \|x\| = 1\}$ je zobecněná plocha: $S_2 = S^1 \cup S^2 \cup \Gamma$, kde S^1 (severní polokoule) je graf funkce $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ na $\Omega =$

$\{x^2 + y^2 < 1\}$, S^2 (jižní polokoule) je graf funkce $-f(x, y)$ na Ω a Γ (rovník) je geometrický obraz $\chi(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(2) povrch krychle $S = \partial\{[0,1] \times [0,1] \times [0,1]\}$ je zobecněná plocha: $S = \cup_{j=1}^{6} S^j \cup \Gamma$, kde S^j jsou stěny a Γ sjednocení hran.

Definice. Nechť S je zobecněná plocha, $f : S \to R$, $F : S \to R^3$ funkce a $\nu : S \to R^3$ orientace (tj. spojité pole normál). Plošný integrál 1. resp. 2. druhu definuji jako

$$\int_S f\, dS = \sum_j \int_{S^j} f\, dS\,, \qquad \text{resp.} \qquad \int_{(S,\nu)} F \cdot \vec{S} = \sum_j \int_{(S^j,\nu)} F \cdot d\vec{S}\,.$$

Poznámky.
• definice je korektní: nezávisí na způsobu, jímž S rozložím na S^j a Γ
• orientace S nemusí existovat: krychle nemá normálu na hranách.

Lemma 2.2. Nechť a, b jsou vektory v R^3. Potom

$$\det \begin{pmatrix} a \cdot a, & a \cdot b \\ a \cdot b, & b \cdot b \end{pmatrix} = \|a \times b\|^2\,.$$

Věta 2.2. [Grammův determinant.] Nechť S je jednoduchá plocha, (φ, Ω) její parametrizace a $f : S \to R$. Potom

$$\int_S f\, dS = \int_\Omega (f \circ \varphi)\sqrt{g}\, dudv\,,$$

kde

$$g = \det \begin{pmatrix} \varphi_u \cdot \varphi_v, & \varphi_u \cdot \varphi_v \\ \varphi_u \cdot \varphi_v, & \varphi_v \cdot \varphi_v \end{pmatrix}$$

je tzv. Grammův determinant.

Definice. [Diferenciální operátory.]
1. (laplacián)

$$\triangle u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \qquad u : R^n \to R$$

2. (divergence)

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \qquad u : R^n \to R^n$$

3. (rotace pro n=2)

$$\operatorname{rot} u = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \qquad u : R^2 \to R^2$$

4. (rotace pro n=3)

$$\operatorname{rot} u = (\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}) \qquad u : R^3 \to R^3$$

Věta 2.3. Platí:
(1) $\operatorname{div} u = \operatorname{tr}(\nabla u)$ (pro $u : R^n \to R^n$, tr A je stopa matice)
(2) $\triangle u = \operatorname{div} \nabla u$ (pro $u : R^n \to R$)
(3) $\operatorname{rot} u = \nabla \times u$ (pro $u : R^3 \to R^3$)
(4) $\operatorname{div} \operatorname{rot} u = 0$ (pro $u : R^3 \to R^3$)

Definice. Otevřená, křivkově souvislá množina $\Omega \subset R^n$ se nazývá oblast. Je-li $M \subset R^n$ (ne nutně otevřená), řekneme, že $u \in C^1(M)$, pokud existuje $\Omega \supset M$ otevřená taková, že $u \in C^1(\Omega)$.
Nechť $\Omega \subset R^3$ je oblast, nechť $\partial\Omega$ je zobecněná plocha. Funkci $n(x) : S \to R^3$ nazveme vnější normálou k $\partial\Omega$, pokud pro $\forall x \in S$ je $n(x)$ jednotkový vektor, kolmý na $\partial\Omega$, a navíc

$$(\exists \delta > 0)(\forall t \in (0, \delta))[x + tn(x) \notin \Omega]$$

Zobecnění: připouštíme, že $n(x)$ je definována pouze v $\partial\Omega \setminus \Gamma$, kde Γ lze pokrýt křivkami.

Věta 2.4. [Gauss-Ostrogradského.] Nechť $\Omega \subset R^3$ je omezená oblast, $\partial\Omega$ je zobecněná plocha a $n = (n_1, n_2, n_3)$ je vnější normála. Nechť u, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\overline{\Omega})$ pro $i = 1, 2, 3$. Potom

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \, d\lambda_3 = \int_{\partial\Omega} u n_i \, dS \qquad i = 1, 2, 3.$$

Věta 2.5. [O divergenci.] Nechť $\Omega \subset R^3$ je omezená oblast, $\partial\Omega$ je zobecněná plocha a n je vnější normála. Nechť $u : R^3 \to R^3$ je $C^1(\overline{\Omega})$. Potom

$$\int_\Omega \operatorname{div} u \, d\lambda_3 = \int_{\partial\Omega} u \cdot n \, dS \, .$$

Definice. Nechť $\Omega \subset R^2$ je oblast, nechť $\partial\Omega = \langle \varphi \rangle$, kde φ je křivka. Funkce $n(x) : \partial\Omega :\to R^2$ se nazve vnější normála k $\partial\Omega$, pokud pro $\forall x \in \partial\Omega$ je $n(x)$ jednotkový vektor, kolmý na $\partial\Omega$ (přesněji na tečnu φ). Navíc $n(x)$ směřuje ven z Ω.
Zobecnění: dovolíme, že $n(x)$ je definována v $\partial\Omega$ až na konečně výjimek.

Věta 2.6. [O divergenci v rovině.] Nechť $\Omega \subset R^2$ je omezená oblast, nechť $\partial\Omega = \langle \varphi \rangle$, kde φ je křivka, a n je vnější normála k $\partial\omega$. Nechť $u : R^2 \to R^2$ je $C^1(\overline{\Omega})$. Potom

$$\int_\Omega \operatorname{div} u \, d\lambda_2 = \int_\varphi u \cdot n \, ds \, .$$

Definice. Křivka φ obíhá množinu $\Omega \subset R^n$ v kladném smyslu, pokud ji obíhá proti směru hodinových ručiček. Alternativně: platí pravidlo pravé ruky.

Věta 2.7. [Greenova.] Nechť $\Omega \subset R^2$ je omezená oblast, nechť $\partial\Omega = \langle \varphi \rangle$, kde φ je křivka, která obíhá Ω v kladném smyslu. Nechť $u : R^2 \to R^2$ je $C^1(\overline{\Omega})$. Potom

$$\int_\Omega \operatorname{rot} u \, d\lambda_2 = \int_\varphi u \cdot d\varphi \, .$$

Lemma 2.7. [Výpočet divergence integrálními průměry.] Nechť $\Omega \subset R^3$ je otevřená, $u : R^3 \to R^3$ je $C^1(\Omega)$. Potom

$$[\operatorname{div} u](x_0) = \lim_{\rho \to 0+} \frac{1}{\lambda_3(B(x_0, \rho))} \int\limits_{\partial B(x_0,\rho)} u \cdot n \, dS \qquad \forall x_0 \in \Omega \, .$$

Definice. Jednoduchá plocha $S \subset R^3$ se nazve plocha s okrajem, pokud existuje parametrizace (φ, Ω) taková, že φ je C^1, prostá a $h(\nabla\varphi) = 2$ dokonce na $\Omega_1 \supset \overline{\Omega}$. Navíc $\partial\Omega = \langle \psi \rangle$, kde ψ je jednoduchá uzavřená křivka.
Množina $\Gamma = \varphi(\partial\Omega)$ se nazývá okraj plochy S.
Je-li S navíc orientovaná a $\Gamma = \langle \chi \rangle$, řekneme, že křivka χ obíhá plochu S ve shodě s orientací ν, pokud (názorně řečeno): jdeme-li po okraji Γ ve smyslu χ s hlavou ve směru ν, máme S po levé ruce.

Věta 2.8. [Stokesova.] Nechť (S, ν) je jednoduchá orientovaná plocha s okrajem Γ. Nechť $\Gamma = \langle \chi \rangle$, kde χ obíhá S ve shodě s orientací ν. Nechť $F : R^3 \to R^3$ je $C^1(S \cup \Gamma)$. Potom

$$\int_{(S,\nu)} [\operatorname{rot} F] \cdot dS = \int_\chi F \cdot d\chi \, .$$

Lemma 2.4. Nechť $\Omega \subset R^n$ je oblast, $F : \Omega \to R^n$ je spojitá. Potom je ekvivalentní:
(1) křivkový integrál z F nezávisí v Ω na cestě.
(2) pro každou uzavřenou křivku χ v Ω je

$$\int_\chi F \cdot d\chi = 0\,.$$

Důsledek. $F : \Omega \to R^n$ má v Ω potenciál, právě když $\int_\chi F \cdot d\chi = 0$ pro každou uzavřenou křivku χ v Ω.

Definice. Oblast $\Omega \subset R^2$ se nazve jednoduše souvislá, pokud platí: je-li χ jednoduchá uzavřená křivka v Ω, je množina, kterou χ ohraničuje, částí Ω.
Ekvivalentně: každou jednoduchou uzavřenou křivku lze v Ω spojitě stáhnout do bodu.

Věta 2.9. [Existence potenciálu v R^2.] Nechť $\Omega \subset R^2$ je jednoduše souvislá oblast, $F : \Omega \to R^2$ je C^1 a $\operatorname{rot} F = 0$ v Ω. Potom F má v Ω potenciál.

Věta 2.10. [Existence potenciálu v R^3.] Nechť $\Omega \subset R^3$ je oblast, $F : \Omega \to R^3$ je C^1 a $\operatorname{rot} F = 0$ v Ω. Nechť navíc Ω má následující vlastnost [*]: je-li χ libovolná jednoduchá uzavřená křivka v Ω, pak existuje $S \subset \Omega$ jednoduchá plocha taková, že $\langle \chi \rangle$ je okraj S.
Potom F má v Ω potenciál.

Poznámky.
- předpoklad jednoduché souvislosti Ω pro n=2 resp. [*] pro n=3 je podstatný
- bez těchto předpokladů podmínka $\operatorname{rot} F = 0$ zaručí existenci potenciálu pouze lokálně
- předpoklad [*] není totéž co jednoduchá souvislost v R^3 (ta se obecně definuje jinak)

Definice. [k-plocha] Množina $M \subset R^n$ se nazve k-plocha $(0 < k < n)$, pokud $M = \varphi(\Omega)$, kde $\Omega \subset R^k$ je otevřená, φ je C^1 a navíc $h(\nabla\varphi) = k$ všude v Ω.
Doplnění definice: jednobodová množina je 0-plocha, otevřená část R^n je n-plocha.
Zobecněný Jakobián ($\varphi : R^k \to R^n$, $1 \le k \le n$)

$$J\varphi = \sqrt{\det\left[(\nabla\varphi)^T \cdot \nabla\varphi\right]}.$$

Pro $f : M \to R$ definuji plošný integrál 1. druhu jako

$$\int_M f \, dS_k = \int_\Omega f \circ \varphi \, J\varphi \, .$$

Poznámky.

• poslední definice zobecňuje řadu předchozích vzorců/definic (křivkový a plošný integrál, věta o substituci, atd.)

• lze vytvořit obecnou teorii, v níž se dokáže "obecná" Stokesova věta:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

kde M je k-plocha, ∂M je okraj M (typicky $(k-1)$-plocha), ω je tzv. diferenciální forma, d je diferenciál.
Gaussovu, Greenovu nebo námi dokázanou Stokesovu větu v R^3 lze chápat jako speciální případy této obecné Stokesovy věty.