3. Fourierovy řady.

Definice. Řada funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

kde a_k, $b_k \in R$ jsou konstanty, se nazývá trigonometrická řada.

Poznámka. Pokud trigonometrická řada konveguje, je její součet 2π-periodická funkce. Hlavní otázka této kapitoly: lze naopak každou 2π-periodickou funkci napsat jako součet nějaké trigonometrické řady?

Lemma 3.1.
(1) $\int_0^{2\pi} \sin nx = \int_0^{2\pi} \cos nx = 0$ pro $\forall n \neq 0$ celé,
(2) $\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx = 0$ pro $\forall m,\ n \geq 1$ celá,
(3) $\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx = \pi\delta_{mn}$, ($\delta_{mn}$ je Kroneckerovo delta).

Poznámka. Předchozí lemma: funkce $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ...\}$ tvoří ortogonální systém vůči skalárnímu součinu $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)$.

Definice. Nechť $f \in \mathcal{L}(0, 2\pi)$. Trigonometrická řada s koeficienty

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \qquad k \geq 1$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \qquad k \geq 1$$

se nazývá Fourierova řada funkce f. Značí se F_f. Čísla a_k, b_k se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f.

Poznámky.
- je $\mathcal{F}_f(x) = f(x)$? Jistě ne vždy ve všech bodech, neboť a_k, b_k a tudíž $\mathcal{F}_f$ nevidí změny f na množině míry 0.
- $\mathcal{F}_f$ je vždy 2π-periodická, zkoumanou f tedy také rozšíříme 2π-periodicky.
- je-li f funkce 2π-periodická, potom $\int_0^{2\pi} f = \int_{-\pi}^{\pi} f = \int_a^{a+2\pi} f$ pro $\forall a \in R$
- obecněji, pro f funkci l-periodickou definujeme

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi}{l}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{l}kx\right)\right]$$

kde

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x), \quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{l}kx\right), \quad b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{l}kx\right).$$

(Platí příslušné analogie výsledků této kapitoly.)
• f sudá $\implies b_k = 0$; f lichá $\implies a_k = 0$.
• sinová řada: f definována na $(0,\pi)$ - rozšíříme liše.
cosinová řada: f definována na $(0,\pi)$ - rozšíříme sudě.

Věta 3.1. Nechť trigonometrická řada konverguje stejnoměrně v $[0,2\pi]$. Pak je Fourierovou řadou svého vlastního součtu.

Definice. Funkci f nazveme po částech spojitou v (a,b), pokud existují body $x_0 = a < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$ takové, že f je spojitá v intervalech (x_{j-1}, x_j) a navíc má v bodech x_j jednostranné vlastní limity.
Funkci nazveme po částech C^1, jestliže navíc $f'(x)$ je spojitá v (x_{j-1}, x_j) a $f'(x)$ navíc má v bodech x_j jednostranné vlastní limity.

Poznámka. Na rozdíl od kapitoly 1 není po částech C^1 funkce nutně spojitá.

Věta 3.2. [O konvergenci Fourierovy řady.] Nechť $f \in \mathcal{L}(0,2\pi)$ je 2π-periodická a navíc po částech C^1 v (a,b). Potom pro $\forall x \in (a,b)$ je

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)]$$

Speciálně $\mathcal{F}_f(x) = f(x)$ v bodech spojitosti.

Lemma 3.2. [Komplexní tvar Fourierovy řady.] Nechť $f \in \mathcal{L}(0,2\pi)$ je 2π-periodická. Označme

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-ikx)\,dx\,.$$

Potom (formálně)

$$\mathcal{F}_f(x) = \sum_{k\in Z} c_k \exp(ikx)$$

Navíc platí vztahy

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \quad k \geq 1 \\ c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

respektive

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ a_k &= c_k + c_{-k} \qquad k \geq 1 \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) \qquad k \geq 1 \end{aligned}$$

kde a_k, b_k jsou Fourierovy koeficienty f.
Pro n-tý částečný součet Fourierovy řady $\mathcal{F}_{f,n}(x)$ platí

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \exp(ikx)\,.$$

Lemma 3.3. [Integrální tvar F.ř.] $f \in \mathcal{L}(0, 2\pi)$ je 2π-periodická. Potom n-tý částečný součet F.ř. funkce f je

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) f(x+z)\, dz$$

kde

$$D_n(z) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right]}{2\pi \sin\left(\frac{z}{2}\right)}$$

se nazývá Dirichletovo integrační jádro.

Poznámky.
- $D_n(z) = D_n(-z)$
- $f \equiv 1$ ... $\mathcal{F}_f(x) \equiv 1$ ... $1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) = 1.$

Lemma 3.4. [Riemann-Lebesgueovo.] Nechť $f \in \mathcal{L}(a, b)$. Potom

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\sin(tx)\, dx = 0 \qquad \lim_{t\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cos(tx)\, dx = 0\,.$$

kde $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ je libovolný.

Věta 3.3. [Riemannova věta o lokalizaci.] Nechť $f \in \mathcal{L}(0, 2\pi)$ je 2π-periodická funkce, nechť $A \in R$. Potom

$$\mathcal{F}_f(x) \to A \qquad \text{pro } n \to A$$

právě když

$$\int_0^{\delta} \left[f(x+z) + f(x-z)\right] - 2A\Big] \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right]}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}\, dz \to 0 \qquad \text{pro } n \to \infty\,,$$

kde $\delta \in (0, \pi)$ je libovolné, pevné.

Poznámky. Za jakých okolností platí výrok (*) $\mathcal{F}_f(x) = f(x)$? (Předpokládáme, že f je 2π-periodická.)
• $f \in L^1(0, 2\pi)$: (*) nemusí platit pro žádné x
• $f \in L^2(0, 2\pi)$: (*) platí skoro všude
• $f \in C(R)$: (*) nemusí platit všude (platí skoro všude podle předchozího, neboť f je omezená a tudíž v $L^2(0, 2\pi)$.)
• f spojitá a navíc po částech C^1: (*) platí pro všechna x. (Toto jediné jsme dokázali.)

Definice. Pro $(a, b) \subset R$ a $p \in [1, \infty)$ definuji

$$L^p(a, b) = \{f(x) : (a, b) \to R : \ f \text{ je měřitelná}, \ \int_a^b |f(x)|^p < \infty\}$$

Poznámky.
• $L^1(a, b) = \mathcal{L}(a, b)$
• $(a, b) \subset R$ omezený $\implies L^2(a, b) \subset L^1(a, b)$

Věta 3.4. [Besselova nerovnost.] Nechť $f \in L^2(0, 2\pi)$ je 2π-periodická a a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Potom

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 .$$

Speciálně: řady $\sum a_k^2$, $\sum b_k^2$ konvergují.

Věta 3.5. [Parsevalova rovnost.] Nechť $f \in L^2(0, 2\pi)$ je 2π-periodická a a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Potom je ekvivalentní:
(1)

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \mathcal{F}_{f,n}(x)|^2 \to 0 \qquad \text{pro } n \to \infty$$

(2)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 .$$

Poznámka. Tyto výroky nejsou jen ekvivalentní - za předpokladu $f \in L^2(0, 2\pi)$ oba vždy platí.
(2) ... se nazývá Parsevalova rovnost
(1) ... říká, že $\mathcal{F}_{f,n} \to f$ v prostoru $L^2(0, \pi)$.

Pro obecně l-periodickou funkci má Parsevalova rovnost tvar

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{2}{l} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 .$$

Poznámka. Při počítání příkladů lze pozorovat (f po částech C^1):
f nespojitá ... a_k, $b_k \sim 1/k$
f spojitá, ale ne C^1 ... a_k, $b_k \sim 1/k^2$
f je C^1 ... a_k, $b_k \sim 1/k^3$ etc.
Hypotéza: souvislost mezi hladkostí f a tím, jak rychle a_k, $b_k \to 0$.

Opakování.
[Weierstrassova věta.] Nechť $|f_k(x)| \leq a_k$ v I a řada $\sum_k a_k$ konverguje. Potom řada funkcí $\sum_k f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I.
[Derivování řady člen po členu.] Nechť řada $\sum_k f_k(x)$ konverguje alespoň v jednom bodě $x_0 \in I$ a nechť řada $\sum_k f_k'(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně v I. Potom řada $\sum f_k(x)$ též konverguje lokálně stejnoměrně v I. Navíc, její součet je diferencovatelná funkce a

$$\left\{\sum_k f_k(x)\right\}' = \sum_k f_k'(x)$$

všude v I.

Věta 3.6. [Derivování trigonometrické řady člen po členu.] Nechť a_k, b_k jsou libovolná čísla taková, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\big(|a_k| + |b_k|\big)$$

konverguje. Potom řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos kx + b_k \sin kx\right]$$

konverguje absolutně stejnoměrně v R. Navíc: její součet $f(x)$ je $C^1(R)$ a zderivovaná řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[- ka_k \sin kx + kb_k \cos kx\right]$$

konverguje též absolutně stejnoměrně v R a její součet je $f'(x)$.

Věta 3.7. Nechť $f(x) \in C^2(R)$ je 2π periodická. Potom pro její Fourierovy koeficienty a_k, b_k platí, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\big(|a_k| + |b_k|\big)$$

konverguje.

Věta 3.8. [Integrování Fourierovy řady člen po členu.] Nechť $f(x) \in L^1(0, 2\pi)$ je 2π-periodická, nechť a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Potom

$$\int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0}{2}x = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\frac{-b_k}{k}\cos kx + \frac{a_k}{k}\sin kx\Big]$$

platí pro $\forall x \in R$. Navíc $A_0 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$.

Poznámky.

• vznikne "formálně" integrováním rovnosti

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos kt + b_k \sin kt\big]$$

- ta však za předpokladů věty obecně nemusí platit.