4. Abstraktní Fourierovy řady.

Definice. Nechť $\Omega \subset R^n$ a $1 \le p \le \infty$. Definujeme pro $1 \le p < \infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to C : \ f \text{ je měřitelná, } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

respektive pro $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to C : \ f \text{ je měřitelná a } \exists C \text{ tak, že } |f(x)| \le C \text{ s.v. v } \Omega \right\}$$

Terminologie: funkce L^p integrovatelné resp. esenciálně omezené.
Norma na prostoru $L^p(\Omega)$ se definuje pro $p < \infty$ jako

$$\|f\|_p = \left\{ \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

respektive pro $p = \infty$ jako

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ C > 0 : \ |f(x)| \le C \text{ s.v. v } \Omega \right\}$$

Poznámka. Obecně $\|f\|_p = 0$ implikuje jen $f = 0$ s.v. a nikoliv $f = 0$. Řešení: v prostorech L^p považuji funkce, které se rovnají skoro všude, za totožné. (Například Dirichletovu funkci a funkci nulovou.)
Důsledek: nemá smysl hovořit o takových vlastnostech funkce z L^p, které se změní, změním-li funkci na množině míry nula (například hodnota v jednom bodě.) Má smysl hovořit jen o takových vlastnostech, které na takové změně nezáleží (například integrál přes nějakou množinu.)

Lemma 4.1. [Youngova nerovnost.] Nechť a, $b \ge 0$ a nechť $1 < p$, $q < \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Poznámka. Speciálně pro $p = q = 2$: $ab \le a^2/2 + b^2/2$.

Lemma 4.2. [Hölderova nerovnost.] Nechť $u(x) \in L^p(\Omega)$, $v(x) \in L^q(\Omega)$, kde $1 \le p$, $q \le \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (s úmluvou $1/\infty = 0$). Potom $u(x)v(x) \in L^1(\Omega)$ a

$$\|uv\|_1 \le \|u\|_p \|v\|_q \, .$$

Lemma 4.3. [Minkowského nerovnost.] Pro $p \in (1, \infty)$ je

$$\|u + v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Důsledek. Trojúhelníková nerovnost pro normu v $L^p(\Omega)$.

Poznámky.
• V normovaném prostoru X lze hovořit o součtu řady: jsou-li $x_k \in X$, potom $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, pokud $s_n \to x$ pro $n \to \infty$, kde konvergenci chápu dle normy X, tj.

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in N\big)\big[n \geq n_0 \implies \|s_n - x\|_X < \varepsilon\big]$$

kde $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ jsou částečné součty.
• Je-li X úplný, pak posloupnost má limitu $\iff$ právě když je cauchyovská. Přepsáno pro řadu: $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konverguje, právě když

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in N\big)\big(\forall n \geq n_0\big)\big(\forall p \in N\big)\left[\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right\|_X < \varepsilon\right]$$

(B.C. podmínka konvergence řady v obecném normovaném prostoru.)
• Prostory $L^p(\Omega)$ jsou úplné, viz V. Jarník, Integrální počet II, Věta 199, s. 545. Důsledky: platí v nich Banachova věta o kontrakci, lze používat B.C. podmínku k ověření konvergence.
• prostor $L^2(\Omega)$ má další výhodu: skalární součin.

Definice. Nechť X je lineární vektorový prostor nad C. Zobrazení x, $y \mapsto (x, y)$ z $X \times X$ do C se nazve skalární součin, pokud
(i) je bilineární,
(ii) $(y, x) = \overline{(x, y)}$,
(iii) $(x, x) \geq 0$ a $(x, x) = 0 \iff x = 0$.
Skalární součin přirozeně určuje normu $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.
Platí tzv. Cauchy-Schwartzova nerovnost

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}$$

Důležitý příklad. Na prostoru $L^2(\Omega)$ lze definovat skalární součin jako

$$(u, v) := \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}\, dx$$

Poznámky.
• definice je korektní: nevadí neurčenost u, v na množině míry 0.
• integrál konverguje díky Hölderově nerovnosti ($p = q = 2$).
• norma určená tímto skalárním součinem je původní norma v $L^2(\Omega)$.

Definice. Prostor se skalárním součinem, který je úplný vzhledem normě tímto skalárním součinem určené, se nazývá Hilbertův prostor.

Poznámky.
• R^n, C^n jsou Hilbertovy prostory (konečně-dimenzionální.)
• $L^2(\Omega)$ je Hilbertův prostor (nekonečně-dimenzionální.)
• skalární součin umožní hovořit o kolmosti, úhlech. Hilbertův prostor je proto "podobný" prostoru R^n, i když je obecně nekonečně-dimenzionální.

Úmluva. V dalším textu H značí Hilbertův prostor, $(\cdot,\cdot)$ odpovídající skalární součin a $\|\cdot\|$ normu.

Definice. Množina $\{x_n\} \subset H$ se nazve ortogonální (OG) systém, pokud $x_n \neq 0$ a $(x_n, x_m) = 0$ pro $m \neq n$. Pokud navíc $(x_n, x_n) = 1$ (tj. $\|x_n\| = 1$), nazveme systém ortonormální (ON).

Poznámky.
• $(1,1)$, $(2,-2)$ je OG, není ON v R^2
• $(1,0)$, $(0,1)$ je ON v R^2
• trigonometrický systém $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}$ je OG v $L^2(0,2\pi)$ (Lemma 3.1.)
• $\{x_n\}$ je OG ... $y_n = x_n/\|x_n\|$ je ON, např. $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \dots\}$

Definice. Nechť X je vektorový prostor. Množina $\{x_a\}_{a\in A}$ se nazve (algebraická) báze X, pokud každé $x \in X$ lze jediným způsobem napsat jako $x = \sum_{k=1}^{N} c_k x_{a_k}$, kde $c_k \in R$ (C).
Nechť X je navíc prostor s normou. Spočetná množina $\{x_n\}_{a\in N}$ se nazve Schauderova báze X, pokud každé $x \in X$ lze jediným způsobem napsat jako $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_{a_k}$, kde $c_k \in R$ (C).

Poznámky.
• dim $X < \infty$ ...obě báze existují konečné.
• dim $X = \infty$ ... algebraická báze může být nespočetná, pohodlnější je spočetná Schauderova báze - místo konečných lin. kombinací ale potřebuji sumu (= spočetná lin. kombinace.)
• klíčová otázka kapitoly: je OG systém Schauderovou bází?

Věta 4.1. Nechť $\{x_n\}$ je OG systém v H, nechť $x \in H$ je takové, že $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, kde $c_k \in C$. Potom $c_k = \frac{(x,x_k)}{(x_k,x_k)}$.

Definice. [Abstraktní Fourierova řada.] Nechť $\{x_n\} \subset H$ je OG systém, nechť $x \in H$ je libovolné. Řadu (formální) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, kde $c_k = \frac{(x,x_k)}{(x_k,x_k)}$, nazvu Fourierovou řadou prvku x vůči systému x_n. Značím F_x. Čísla c_k nazývám Fourierovy koeficienty.

Poznámka.
• Fourierova řada $f(x) \in L^2(0,2\pi)$ vzhledem k trigonometrickému systému (dle předchozí definice) = Fouerierova řada funkce $f(x)$ ve smyslu předchozí

kapitoly.
• je vždy $F_x = x$? ... klíčová otázka.

Věta 4.2. [Besselova nerovnost, Parsevalova rovnost - abstraktní tvar.] Nechť $\{x_n\} \subset H$ je OG systém, nechť $x \in H$ je libovolné a c_k jsou Fourierovy koeficienty. Potom

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|x_k\|^2 \leq \|x\|^2 \qquad (1)$$

Speciálně, řada vlevo konverguje. Dále, Fourierova řada F_x vždy konverguje v H (její součet však není nutně x.)
(2) Situace $F_x = x$ nastává právě když platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|x_k\|^2 = \|x\|^2 . \qquad (2)$$

Poznámky.
• (1) ... Besselova nerovnost, (2) ... Parsevalova rovnost.
• srovnejte s Větami 3.4., 3.5.
• co je F_x, ne-li x? Lze spočítat: jsou-li $a_k \in C$ libovolná, pak

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} a_k x_k - x \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{N} c_k x_k - x \right\|^2 + \sum_{k=1}^{N} |a_k - c_k|^2 \|x_k\|^2$$

kde c_k jsou F.k. prvku x vůči $\{x_n\}$. Tedy: F_x je nejlepší možná aproximace.

Definice. Systém $\{x_n\} \subset H$ se nazve úplný, pokud platí: je-li $x \in H$ takové, že $(x, x_n) =$ pro $\forall n$, pak nutně $x = 0$.
Názorně: nelze najít nenulové x, kolmé na všechny x_n ... nechybí žádná souřadná osa.

Věta 4.3. [Ekvivalentní vyjádření úplnosti.] Nechť $\{x_n\} \subset H$ je OG systém. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:
(1) $\{x_n\}$ je úplný.
(2) pro $\forall x \in H$ platí Parsevalova rovnost.
(3) pro $\forall x \in H$ platí $F_x = x$.

Důležitý příklad. Trigonometrický systém je úplný v $L^2(0, 2\pi)$. Tj., pokud $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ je kolmá na všechny jeho prvky ($\iff$ $f(x)$ má všechny Four. koef. nulové), pak nutně $f(x) = 0$ ve smyslu $L^2(0, 2\pi)$, tj. $f(x) = 0$ s.v.

Lemma 4.4. Nechť $f(x)$ je spojitá v R a 2π-periodická. Jestliže všechny její F.k. jsou nulové, je $f(x) = 0$ všude v R.

Poznámka.
• Srovnej s větou: je-li $f(x) \in C([a,b])$ a $\int_a^b f(x)\phi(x) = 0$ pro $\forall \phi \in C_0^1([a,b])$, je $f(x) = 0$ v $[a,b]$.

Opakování. Množina A je spočetná, existuje-li vzájemně jednoznačné zobrazení A na N (značení: $A \approx N$.)
Názorně: prvky A lze očíslovat přirozenými čísly. Příklady: N, Z, Q jsou spočetné, R, C nespočetné.

Definice. Nechť X je prostor s normou. Množina M se nazve hustá v X, pokud

$$\big(\forall x \in X\big)\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists y \in M\big)\big[\|x - y\|_X < \varepsilon\big]$$

Názorně: každý prvek X má libovolně blízko prvek z M.
Prostor X se nazve separabilní, pokud existuje spočetná M hustá v X.

Příklady.
• R je separabilní: $M = Q$.
• C je separabilní: $M = \{z \in C : \ z = a + ib, \ a, b \in Q\}$.
• H je Hilbertův prostor a existuje spočetný úplný OG systém $\{x_n\} \subset H$ $\implies$ H je separabilní.
• speciálně: $L^2(0, 2\pi)$ je separabilní, obecněji: $L^p(\Omega)$ je separabilní pro $\forall p \in [1, \infty)$, ale $L^\infty(\Omega)$ není separabilní.
• pro $f(x) : (0,1) \to C$ označ $\operatorname{spt} f = \{x \in (0,1) : \ f(x) \neq 0\}$ (nosič funkce).
Definuj

$$\mathcal{H} = \Big\{f(x) : (0,1) \to C : \sum_{x \in \operatorname{spt} f} |f(x)|^2 < \infty\Big\}$$

Prostor $\mathcal{H}$ se skalárním součinem

$$(f, g) := \sum_{x \in \operatorname{spt} f \cap \operatorname{spt} g} f(x)\overline{g(x)}$$

je Hilbertův prostor, který není separabilní. Množina $\{e^a\}_{a \in (0,1)}$, kde $e^a(x) = 1$ pro $x = a$ a 0 jinde v něm tvoří úplný, ale nepočetný OG systém.
• množina $\{e^a\}$ z předchozího bodu je nespočetná algebraická báze nikoliv $\mathcal{H}$, ale menšího prostoru $\mathcal{H}_0$ funkcí s konečným nosičem. Nosič funkcí z $\mathcal{H}$ je obecně nejvýše spočetný. Dimenze prostoru $\mathcal{H}$ (=počet prvků alg. báze) je striktně větší než dimenze $\mathcal{H}_0$, která je kontinuum (=počet prvků R.)