5. Komplexní analýza.

Definice.

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + iy : \ x, y \in R \right\}$$

kde $i^2 = -1$ (imaginární jednotka), $Re(z) = x$ (reálná část), $Im(z) = y$ (imaginární část), $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (absolutní hodnota), $\overline{z} = x - iy$ (číslo komplexně sdružené).

Poznámka. Ztotožnění: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $z = x + iy \leftrightarrow (x, y)$. Shoduje se i $|z| = \|(x, y)\|_2$.

Definice. $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Terminologie: $\mathbb{C}$...otevřená Gaussova rovina, $\mathbb{S}$...uzavřená Gaussova rovina, ∞...komplexní nekonečno.

Početní pravidla:

- $a \pm \infty = \infty$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
- $a \cdot \infty = \infty$ pro $\forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$
- $a/\infty = \infty$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
- $a/0 = \infty$ pro $\forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$

Nedefinováno zůstává: $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞, $\infty \pm \infty$.

Příklady. [Komplexní funkce.]

- polynomy, racionální funkce. Pozn.: dodefinováním $p(\infty)\infty$ je polynom spojitá funkce v $\mathbb{S}$.
- e^z, $\sin z$, $\cos z$ - definovány mocinnou řadou, která (absolutně) konverguje pro $\forall z \in \mathbb{C}$. Klíčový vztah:

$$\exp(a + ib) = \exp(a)[\cos b + i \sin b]$$

Definice. Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definujeme

$$\begin{aligned} \log z &= \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : \ \exp \zeta = z \right\} \\ \arg z &= \left\{ \beta \in \mathbb{R} : \ z = |z| \exp(i\beta) \right\} \\ \operatorname{Log} z &= \left\{ \zeta \in \log z : \ Im(\zeta) \in (-\pi, \pi] \right\} \\ \operatorname{Arg} z &= \left\{ \beta \in \arg z : \ \beta \in (-\pi, \pi] \right\} \end{aligned}$$

Poznámky.

- log, arg nejsou to funkce v klasickém smyslu: číslu je přiřazena množina. Např.: $\log 1 = \{2k\pi i : \ k \in \mathbb{Z}\}$.
- Log, Arg funkce jsou: číslu je přiřazeno právě jedno číslo.
- platí vztahy (ln je klasický reálný logaritmus):

$$\begin{aligned} \zeta \in \log z \iff & Re\zeta = \ln |z| \ \& \ Im\zeta \in \arg z \\ \operatorname{Log} z &= \ln |z| + i \operatorname{Arg} z \end{aligned}$$

Definice. [Komplexní mocnina.] Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{C}$ definujeme

$$m_a(z) = \Big\{ \exp(a\zeta) : \ \zeta \in \log z \Big\}$$

Definice. Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z) : U(z_0) \to \mathbb{C}$ definujeme

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \, .$$

Limitu chápu v $\mathbb{C}$ a musí být vlastní. Ekvivalentní definice: $f'(z_0) = A$ právě když

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + Ah + r(h)$$

kde $r(h) = o(|h|)$ pro $h \to 0$.
Značím $f^{(1)}(z) = f'(z)$ a indukcí $f^{(n+1)}(z) = [f^{(n)}(z)]'$.

Věta 5.1. Platí:
(1) $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$
(2) $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
(3) $(f/g)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ pokud $g(z) \neq 0$
(4) $(f_{-1})'(w) = 1/f'(f_{-1}(w))$, je-li $f(z)$ prostá a $f'(z) \neq 0$
(5) $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$

Úmluva. Ω je otevřená část $\mathbb{C}$.

Definice. Funkce $f(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ se nazve holomorfní v Ω, pokud $f'(z)$ existuje všude v Ω. Značíme $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Příklady.
• polynom $P(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$
• racionální funkce $R(z) = P(z)/Q(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{z : \ Q(z) = 0\})$
• e^z, $\sin z$, $\cos z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ (lze derivovat člen po členu.)
• Věta 5.1. $\implies$ sčítáním, odčítáním, násobením, dělením, invertováním a skládáním holomorfních funkcí vzniká funkce holomorfní (všude, kde má smysl)

Poznámka. Ztotožnění $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ... ztotožnění $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s funkcí $\tilde{f}(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $z = x + iy$ a $\tilde{f} = (f_1, f_2) = (Ref, Imf)$.

Příklad. $f(z) = z^2$ odpovídá $\tilde{f}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

Věta 5.2. [Cauchy-Riemannovy podmínky.] Nechť $f(z) : U(z_0) \to \mathbb{C}$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ je dána. Nechť $\tilde{f} = (f_1, f_2)(x, y) : U((x_0, y_0)) \to \mathbb{R}^2$ jí odpovídá dle ztotožnění $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R}^2$, kde $z_0 = x_0 + iy_0$. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:

(1) existuje $f'(z)$ v bodě z_0
(2) funkce $\tilde{f}$ má v bodě (x_0, y_0) totální diferenciál a navíc v (x_0, y_0) platí tzv. Cauchy-Riemannovy podmínky:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

Navíc platí:

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - i \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)}$$

Poznámka.
• holomorfnost (=existence $f'(z)$) je mnohem restriktivnější, než se zdá na první pohled.
• funkce $f(z) = Rez$ není holomorfní: nesplní C.R. podmínky.

Věta 5.3. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $f'(z) \neq 0$ v Ω. Potom systémy křivek $\mathcal{I} = \{Ref = c\}_{c \in \mathbb{R}}$ a $\mathcal{J} = \{Imf = d\}_{d \in \mathbb{R}}$ jsou navzájem ortogonální. Tj., pokud křivka $\varphi \in \mathcal{I}$ protíná křivku $\psi \in \mathcal{J}$, tak jedině pod pravým úhlem.

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$. Křivkou v Ω nazýváme funkci $\varphi(t) : [a, b] \to \Omega$, která je spojitá, po částech C^1 a $\varphi'(t) \neq 0$ až na konečně výjimek.
Geometrický obraz $\langle \varphi \rangle$, počáteční bod p.b. φ, koncový bod k.b. φ, uzavřená, jednoduchá a jednoduchá uzavřená křivka se definují analogicky jako u křivek v $\mathbb{R}^n$. Taktéž křivka opačná $\ominus \varphi$ a součet křivek $\varphi \oplus \psi$.
Pro funkci $f(z) : \langle \varphi \rangle \to \mathbb{C}$ definuji křivkový integrál jako

$$\int_\varphi f(z)\, dz = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t)\, dt$$

kde integrál vpravo chápu jako Lebesgueův integrál komplexní funkce.
Dále definuji délku křivky

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\, dt\,.$$

Věta 5.4. [Základní vlastnosti křivkového integrálu v $\mathbb{C}$.]
(1)

$$\int_\varphi [f(z) + g(z)]\, dz = \int_\varphi f(z)\, dz + \int_\varphi g(z)\, dz$$

(2)

$$\int_{\ominus\varphi} f(z)\,dz = -\int_{\varphi} f(z)\,dz\,, \qquad \int_{\varphi\oplus\psi} f(z)\,dz = \int_{\varphi} f(z)\,dz + \int_{\psi} f(z)\,dz$$

(3) Jestliže $F'(z) = f(z)$ na $\Omega \supset \langle\varphi\rangle$, pak

$$\int_{\varphi} f(z)\,dz = F(k.b.\varphi) - F(p.b.\varphi)\,, \quad \text{speciálně} \quad \int_{\varphi} dz = k.b.\varphi - p.b.\varphi$$

(4)

$$|\int_{\varphi} f(z)\,dz| \leq L(\varphi) \sup_{z\in\langle\varphi\rangle} |f(z)|$$

Příklad. Pro $n \in \mathbb{Z}$, $\zeta \in \mathbb{C}$ a křivku $C = \zeta + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ je

$$\int_C (z-\zeta)^n\,dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Definice. Jednoduchá uzavřená křivka φ v $\mathbb{C}$ se nazývá Jordanova. Lze psát $C = int\,\varphi \cup \langle\varphi\rangle \cup ext\,\varphi$, kde $int\,\varphi$ je oblast uvnitř a $ext\,\varphi$ oblast vně křivky.
Jordanova křivka je kladně (záporně) orientovaná, pokud obíhá kolem $int\,\varphi$ proti směru (ve směru) hodinových ručiček.
Množina $\Omega \subset \mathbb{C}$ se nazve jednoduše souvislá, pokud (i) je souvislá a (ii) je-li φ Jordanova křivka v Ω, je $int\,\varphi \subset \Omega$.
(Srovnejte s definicemi v R^2.)

Věta 5.5. [Cauchyho věta.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$ a φ je Jordanova křivka v Ω taková, že $int\,\varphi \subset \Omega$. Potom

$$\int_{\varphi} f(z)\,dz = 0\,.$$

Poznámky.
• předpoklad $int\,\varphi \subset \Omega$ (zaručující $f(z) \in \mathcal{H}(int\,\varphi)$) je podstatný: viz integraci $1/z$ kolem počátku.
• v jednoduše souvislé Ω je z definice splněn.

Lemma 5.1. [O velké půlkružnici.] Nechť $f(z)$ je spojitá v $\Omega = \{z \in C : Im\,(z) > 0\}$ a splňuje zde pro $|z| \geq R_0$ odhad $|f(z)| \leq K/|z|$. Nechť C_R je křivka $\varphi(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Potom

$$\int_{C_R} f(z)e^{iz}\,dz \to 0 \qquad \text{pro } R \to +\infty\,.$$

Poznámka. Předpoklad $|f(z)| \leq K/|z|$ pro $|z| \geq R_0$ je splněn např. pokud $f(z) = P(z)/Q(z)$, kde P, Q jsou polynomy a $st\,Q > st\,P$.

Lemma 5.2. [O malé půlkružnici.] Nechť $f(z)$ je spojitá v $P(z_0)$ a nechť $f(z)(z - z_0) \to A \in C$ pro $z \to z_0$. Nechť C_r je křivka $\varphi(t) = re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Potom

$$\int_{C_r} f(z)\, dz \to iA(\beta - \alpha) \qquad \text{pro } r \to 0+\ .$$

Poznámka. Předpoklad $f(z)(z - z_0) \to A \in C$ pro $z \to z_0$ je splněn např. pokud $f(z) = g(z)/(z - z_0)$, kde $g(z)$ je spojitá v z_0 a $g(z_0) = A$.

Lemma 5.3. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast (tj. otevřená, souvislá množina), nechť $F(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ splňuje $F'(z) = 0$ v Ω. Potom $F(z)$ je konstantní v Ω.

Poznámky.
- Srovnej s tvrzením: $f(x) : I \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval, a $f'(x) = 0$ v I $\implies$ $f(x)$ je konstantní v I.
- zobecnění: $F^{(n+1)}(z) = 0 \implies F(z)$ je polynom stupně $\leq n$.

Věta 5.6. [Cauchyho vzorec.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, nechť φ je kladně orientovaná Jordanova křivka v Ω a $int\,\varphi \subset \Omega$. Potom
(1) Pro $\forall \zeta \in int\,\varphi$ platí

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z - \zeta}\, dz\,.$$

(2) $f(z)$ je v $int\,\varphi$ nekonečně krát derivovatelná a pro $\forall \zeta \in int\,\varphi$ platí

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{n+1}}\, dz\,.$$

Důsledky.
- holomorfní funkce je v $int\,\varphi$ jednoznačně určena hodnotami na $\langle\varphi\rangle$.
- holomorfní funkce je nekonečně diferencovatelná.

Věta 5.7. [Charakterizace polynomů v $\mathbb{C}$.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Potom $f(z)$ je polynom stupně $\leq n$ právě když

$$\frac{f(z)}{z^{n+1}} \to 0 \quad \text{pro} \quad z \to \infty\,.$$

Důsledky.
- funkce holomorfní v $\mathbb{C}$, která není polynom (např. e^z, $\sin z$), roste do

nekonečna (pro vhodnou podposloupnost) velmi rychle
• tzv. Liouvilleova věta: funkce holomorfní a omezená v $\mathbb{C}$ je konstatní.

Věta 5.8. [Základní věta algebry.] Polynom stupně ≥ 1 má v $\mathbb{C}$ alespoň jeden nulový bod.

Opakování. Řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \qquad (*)$$

(kde z, z_0, $a_k \in \mathbb{C}$) se nazývá mocninná řada o středu z_0. Věta A (minulý rok): existuje (jednoznačně určené) číslo $R \in [0,+\infty]$ tak, že řada (*) konverguje pro každé $z \in U(z_0,R)$ a diverguje pro $|z-z_0| > R$. Na množině $U(z_0,R)$ lze řadu libovolně krát derivovat/integrovat (dle komplexní proměnné.) Speciálně, její součet je zde holomorfní.
Dále: řada (*) konverguje lokálně stejnoměrně v $U(z_0,R)$, tj. stejnoměrně na kompaktních podmnožinách

Definice. Nechť z_0, $a_k \in \mathbb{C}$. Řada

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \qquad (1)$$

se nazývá Laurentova řada o středu z_0. Řady

$$(2)\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \qquad \text{resp.} \quad (3)\ \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z-z_0)^k := \sum_{l=1}^{\infty} a_{-l} (z-z_0)^{-l}$$

se nazývají regulární resp. hlavní část řady (1). Řada (1) konverguje (stejnoměrně, absolutně atd.), pokud (2) a (3) mají tuto vlastnost.

Poznámky.
• jde o zobecnění pojmu mocninné řady (*)
• úmluva: $a^0 = 1$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
• (3) a potažmo (1) nemá smysl pro $z = z_0$

Značení. Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$ definuji mezikruží

$$P(z_0; r, R) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ r < |z-z_0| < R \right\}.$$

Věta 5.9. [Konvergence Laurentovy řady.] Je dána Laurentova řada. Potom existují jednoznačně určená čísla r, $R \in [0,+\infty]$ tak, že
(i) R je poloměr konvegence regulární části

(ii) hlavní část konveguje pokud $|z - z_0| > r$ a diverguje pokud $|z - z_0| < r$. Je-li $r < R$, pak Laurentova řada konverguje lokálně stejnoměrně v $P(z_0; r, R)$ a její součet je zde holomorfní.
Terminologie: $P(z_0; r, R)$ se nazve mezikruží konvergence Laurentovy řady.

Poznámka.
• předchozí věta: Laurentova řada určuje v mezikruží konvergence holomorfní funkci
• následující věta: obrácené tvrzení - funkce holomorfní v mezikruží je vždy součtem Laurentovy řady

Věta 5.10. [Existence Laurentova rozvoje.] Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0; r, R))$. Potom $f(z)$ je v $P(z_0; r, R)$ součtem jednoznačně určené Laurentovy řady o středu z_0. Pro její koeficienty platí

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz \,,$$

kde φ je kružnice $z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ a $\rho \in (r, R)$ je libovolné.
Terminologie: tato řada se nazývá Laurentův rozvoj funkce o středu z_0.

Poznámka. Vesměs budeme užívat pro speciální případ $r = 0$, tj. $P(z_0; 0, R) = P(z_0, R)$.

Věta 5.11. [Taylorův rozvoj.] Nechť $f(z) : \Omega \to \mathbb{C}$. Rovnost

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \,, \qquad \text{kde} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \,,$$

platí v každém kruhu $U(z_0, R)$, v němž je $f(z)$ holomorfní.

Definice. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0))$. Koeficient a_{-1} v Laurentově rozvoji funkce $f(z)$ o středu z_0 nazýváme reziduum funkce $f(z)$ v bodě z_0. Značíme $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$.

Věta 5.12. [Reziduová věta.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega \setminus K)$, kde Ω je jednoduše souvislá a K je konečná. Nechť φ je kladně orientová Jordanova křivka v Ω a $K \cap \langle\varphi\rangle = \emptyset$. Potom

$$\int_\varphi f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{\zeta \in K \cap \operatorname{int} \varphi} \operatorname{res}_\zeta f(z) \,.$$

Věta 5.13. [Výpočet rezidua.] 1. Nechť $f(z) = g(z)/(z - z_0)$, kde $g(z) \in \mathcal{H}(U(z_0))$. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = g(z_0) \,.$$

2. Nechť $f(z) = g(z)/h(z)$, kde $g(z),\, h(z) \in \mathcal{H}(U(z_0))$ a $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,.$$

3. Nechť $f(z) = g(z)/h(z)$, kde $g(z),\, h(z) \in \mathcal{H}(U(z_0))$ a $h(z_0) = h'(z_0) = \cdots = h^{(p-1)}(z_0)$, avšak $h^{(p)}(z_0) \neq 0$. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^p f(z)\right]^{(p-1)}\,.$$

Poznámky.
• O funkci $h(z)$ v situaci 3 říkáme, že má v bodě z_0 kořen násobnosti p.
• V aplikacích lze obvykle limitu uvedenou v bodě 3 počítat rovnou dosazením $z = z_0$.

Definice. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$. Říkáme, že funkce $f(z)$ má v bodě izolovanou singularitu, je-li $f(z)$ holomorfní na jistém $P(z_0)$.
Na základě Laurentova rozvoje v daném bodě se rozlišuje:
(i) odstranitelná singularita, je-li $a_k = 0$ pro $\forall k < 0$
(ii) pól násobnosti $p \in \mathbb{N}$, je-li $a_{-p} \neq 0$ a $a_k = 0$ pro $\forall k < -p$
(iii) podstatná singularita, je-li $a_k \neq 0$ pro nekonečně $k < 0$

Příklady.
• $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1-\cos z}{z^2}$ ... v bodě 0 odstranitelné singularity
• $\frac{e^z}{z^3}$ ... v bodě 0 pól násobnosti 3
• $\cosh(1/z)$ ... v bodě 0 podstatná singularita

Věta 5.14. [Charakterizace odstranitelné singularity.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0))$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:
(1) $f(z)$ má v bodě z_0 odstranitelnou singularitu
(2) existuje $g(z) \in \mathcal{H}(U(z_0))$ tak, že $f(z) = g(z)$ na $P(z_0)$
(3) $f(z)$ má v bodě z_0 vlastní limitu
(4) $f(z)$ je omezená na jistém $P(z_0)$

Věta 5.15. [Charakterizace pólu.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0))$. Potom je ekvivalentní:
(1) existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $f(z)$ má v z_0 pól násobnosti p
(2) $f(z) \to \infty$ pro $z \to z_0$

Věta 5.16. [Charakterizace podstatné singularity.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0))$. Potom je ekvivalentní:
(1) $f(z)$ má v z_0 podstatnou singularitu
(2) pro $\forall \delta > 0$ je množina $f(P(z_0, \delta))$ hustá v $\mathbb{S}$

Poznámka. Množina M je hustá v prostoru X, pokud

$$\big(\forall x \in X\big)\big(\forall \epsilon > 0\big)\big[M \cap U(x, \epsilon) \neq \emptyset\big] \,.$$

Definice. Bod z_0 nazveme hromadným bodem množiny M, jestliže $P(z_0, \delta) \cap M \neq \emptyset$ pro $\forall \delta > 0$.

Příklady.
• hromadné body $\mathbb{Q}$ ... $\mathbb{R}$
• konečná množina nemá hromadné body
• množina $\{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$ má jediný hromadný bod: 0

Lemma 5.4. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$ a nechť z_0 je hromadný bod $\mathcal{N} = \{\zeta : \ f(\zeta) = 0\}$. Potom $f(z) = 0$ v $U(z_0, R)$.

Věta 5.17. [O jednoznačnosti.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, kde Ω je souvislá. Nechť $\mathcal{N} = \{\zeta : \ f(\zeta) = 0\}$ má v Ω hromadný bod. Potom $f(z) = 0$ v Ω.

Důsledek. $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ a $f(z) = 0$ v $\mathbb{R} \implies f(z) = 0$ v $\mathbb{C}$.

Poznámka. V.5.17 jinak: pokud $f(z) \not\equiv 0$, pak $\mathcal{N}$ nemá v Ω hromadný bod. – Může ho však mít na $\partial\Omega$: polož $f(z) = \sin(1/z)$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Potom $\mathcal{N} = \{1/(k\pi) : \ 0 \neq k \in \mathbb{Z}\}$ má hromadný bod $0 \notin \Omega$.