5. Fourierova transformace.

Definice. Pro $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definujeme (dopřednou) Fourierovu transformaci

$$\big[\mathcal{F}f\big](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)} f(x)\, dx \qquad \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

Dále definujeme inverzní (zpětnou) F. t.

$$\big[\mathcal{F}_{-1}f\big](\xi) = \check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x,\xi)} f(x)\, dx \qquad \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

Zde (x,ξ) je skalární součin x, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Poznámky.
- definice je korektní: $|\exp\{\pm 2\pi i(x,\xi)\}| = 1$, majoranta integrálu $|f(x)|$
- $\mathcal{F}$ přiřazuje funkci $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funkci $\hat{f}(\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$
- jiná varianta definice:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} f(x)\, dx\,, \qquad \check{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} f(x)\, dx\,.$$

Značení. Prostory funkcí $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.
- $L^p(\mathbb{R}^n)$ ... L^p-integrovatelné, $\|f\|_p = \big[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx\big]^{1/p}$
- $C_b(\mathbb{R}^n)$ ... spojité a omezené, $\|f\|_{C_b} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$
- $C_0(\mathbb{R}^n)$ ... s nulou v nekonečnu:

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C_b(\mathbb{R}^n) :\ |f(x)| \to 0 \text{ pro } |x| \to +\infty\}$$

- $C_c(\mathbb{R}^n)$ ... s kompaktním nosičem - nosič f definuji

$$\operatorname{spt} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) \neq 0\}}\,.$$

Věta 6.1. $\mathcal{F}$ je spojité lineární zobrazení z $L^1(\mathbb{R}^n)$ do $C_b(\mathbb{R}^n)$ a platí

$$\|\hat{f}\|_{C_b} \le \|f\|_1\,.$$

Věta 6.2. [Zachování symetrie.] Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ je sudá (resp. lichá resp. radiální.) Potom $\hat{f}$ má analogickou vlastnost.

Poznámka. Pro $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos 2\pi\xi x\, dx - i \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin 2\pi\xi x\, dx\,.$$

(Souvislost s Fourierovými řadami.)

Věta 6.3. Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pak platí:
(1) $\check{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$
(2) $\overline{\check{f}}(\xi) = \hat{\overline{f}}(\xi)$, $\overline{\hat{f}}(\xi) = \check{\overline{f}}(\xi)$
(3) $\hat{f}(\xi - \eta) = \big[\widehat{e^{2\pi i(x,\eta)} f(x)}\big](\xi)$
(4) $\widehat{f(x - z)}(\xi) = e^{-2\pi i(\xi, z)} \hat{f}(\xi)$
(5) $\widehat{f(\varepsilon x)}(\xi) = \frac{1}{|\varepsilon|^n} \hat{f}(\xi/\varepsilon)$ pro $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Věta 6.4. [Vztah F.t. a derivace.]
(1) Nechť $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ a $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n .$$

(2) Nechť $f(x)$, $x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = \big[\widehat{-2\pi i x_j f(x)}\big](\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n .$$

Poznámka. Názorně: derivace f dle x_j odpovídá násobení $\hat{f}$ (konstanta krát) ξ_j. A naopak: derivace $\hat{f}$ dle ξ_j odpovídá násobení (konstanta krát) x_j.

Definice. Multiindexem nazývám n-tici čísel $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, kde $\alpha_j \geq 0$ jsou celá. Číslo $|\alpha| = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|$ nazývám výška (stupeň) multiindexu. Pro funkci $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definuji

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} .$$

Pro vektor $x \in \mathbb{R}^n$ definuji

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} .$$

Zobecnění. [Věty 6.4.] (1) Nechť $D^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ pro každý multiindex $|\alpha| \leq k$. Potom

$$\widehat{[D^\alpha f]}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \qquad \forall |\alpha| \leq k .$$

(2) Nechť $x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pro každý multiindex $|\alpha| \leq k$. Potom

$$\big[D^\alpha \hat{f}\big](\xi) = \big[\widehat{(-2\pi i x)^\alpha f(x)}\big](\xi) \qquad \forall |\alpha| \leq k .$$

Značení.

$$C^k(\mathbb{R}^n) = \big\{ f(x) : \ D^\alpha f(x) \in C(\mathbb{R}^n) \text{ pro } \forall |\alpha| \le k \big\}$$
$$C^k_c(\mathbb{R}^n) = C_c(\mathbb{R}^n) \cap C^k(\mathbb{R}^n)$$

Zde $k = 1, \dots, \infty$.

Věta 6.5.* [Hustota hladkých funkcí v L^p.] Pro libovolné $p \in [1,\infty)$ je množina $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ hustá v $L^p(\mathbb{R}^n)$, tj.

$$\Big(\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)\Big)\Big(\forall \varepsilon > 0\Big)\Big(\exists \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\Big)\big[\|f - \varphi\|_{L^p} < \varepsilon\big]$$

Poznámky.
• "hluboké" tvrzení o Lebesgueově integrálu.
• důsledek (fakticky ekvivalentní): ke každé funkci $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ existuje posloupnost funkcí $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tak, že $\varphi_n \to f$ v normě $L^p(\mathbb{R}^n)$.
• pozor: neplatí pro $p = \infty$.

Věta 6.6. [Nulovost F.t. v nekonečnu.] Nechť $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom $\hat{f}(\xi) \to 0$ pro $|\xi| \to \infty$.

Definice. Pro $f(x)$, $g(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definuji konvoluci

$$[f * g](x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy$$

pokud má integrál smysl.

Věta 6.7. [Vlastnosti konvoluce.]
(1) komutativita: $[f*g](x) = [g*f](x)$
(2) Nechť $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g(x) \in L^q(\mathbb{R}^n)$, kde $1/p + 1/q = 1$. Potom $[f*g](x)$ má smysl pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a platí odhad

$$|[f*g](x)| \le \|f\|_p \|g\|_q \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \,.$$

(3) Nechť $f(x)$, $g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom $[f*g](x)$ má smysl pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a platí odhad

$$\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1 \,.$$

Věta 6.8. [Vztah F.t. a konvoluce.] Nechť $f(x)$, $g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\widehat{[f*g]}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\,.$$

Poznámky.
• operátor $f(x) \mapsto [Af](x)$ (neformálně) nazveme "lokální", pokud $Af(x_0)$ lze určit z hodnoty $f(x_0)$. Jinak ho nazveme "nelokální".
• derivace, konvoluce ... nelokální operátory, násobení funkcí, konstantou ... lokální operátory
• výhoda F.t.: přeměňuje některé nelokální operátory (derivace, konvoluce) na lokální
• nevýhody F.t.: sama je značně nelokální. Také "rozmazává" nosič - viz následující věta.

Věta 6.9. Nechť $f(x)$ je spojitá funkce, která má omezený nosič. Potom: má-li $\hat{f}(\xi)$ omezený nosič, je nutně $f(x) \equiv 0$.

Důsledek.
• Nelze docílit toho, aby jak $f(x)$, tak $\hat{f}(\xi)$ měly obě omezený nosič, kromě triviálního případu $f(x) \equiv 0$.
• obecněji platí tzv. princip neurčitosti: čím je nosič $f(x)$ menší, tím je nosič $\hat{f}$ větší - a naopak.

Definice. Funkce $\exp(-\pi|x|^2)$ se nazývá gausián.

Lemma 6.1. [F.t. gausiánu.] Platí

$$\left[\widehat{\exp(-\pi|x|^2)}\right](\xi) = \exp(-\pi|\xi|^2)\,.$$

Lemma 6.2. [Integrace radiálních funkcí.] Nechť $0 \le r < R \le +\infty$. Potom

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ 0<|x|<R\}} f(|x|)\,dx = \kappa_{n-1}\int_r^R f(\rho)\rho^{n-1}\,d\rho\,,$$

kde κ_{n-1} je $(n-1)$-rozměrná míra množiny $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ |x| = 1\}$.

Poznámky.
• aplikace: $\int_{|x|>1} |x|^a\,dx$ konverguje $\iff$ $a < -n$ (jsme v $\mathbb{R}^n$.)
• lze dopočítat, že $\kappa_{n-1} = n\pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$; speciálně: $\kappa_1 = 2\pi$ (obvod kružnice), $\kappa_2 = 4\pi$ (povrch sféry.)

Definice. Schwartzův prostor (prostor rychle klesajících funkcí) definujeme jako

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) :\ x^\alpha D^\beta f(x) \ \text{ omezená pro } \ \forall\ \ \alpha,\, \beta\right\}.$$

Ekvivalentně: $p(x)D^\beta f(x)$ je omezená pro všechna β a všechny polynomy $p(x)$ proměnných $x_1, \dots, x_n$.

Věta 6.10. [Vlastnosti $\mathcal{S}$.]

(1) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
(2) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ pro $\forall p \in [1, +\infty]$
(3) $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies x^\alpha f(x),\, D^\beta f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
(4) $f(x) \in \mathbb{R}^n \implies \hat{f}(\xi),\, \check{f}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Věta 6.11. [O inverzi F.t.] Nechť $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Potom $\mathcal{F}_{-1}[\mathcal{F}f] = \mathcal{F}[\mathcal{F}_{-1}f] = f$.

Poznámky.
• uvedený důkaz projde za slabších předpokladů: $f \in L^1 \cap C_b$, $\hat{f} \in L^1$.
• důsledek: $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je vzájemně jednoznačné zobrazení

Lemma 6.3. Nechť $f(x),\, g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)\,dx\,, \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\check{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x)g(x)\,dx\,.$$

Lemma 6.4.* Nechť $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Pokud

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\,,$$

potom $f(x) = 0$ s.v. v $\mathbb{R}^n$.

Poznámky.
• "hluboké" tvrzení o Lebesgueově integrálu, příbuzné s Větou 6.5.
• ekvivalentně: $\lambda_n\{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \neq 0\} > 0 \implies \exists\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tak, že $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) \neq 0$.
• za silnějšího předpokladu $f(x)$ spojitá dokázáno v minulém semestru: Lemma 3.1.

Věta 6.12. [Inverze F.t. v L^1.] Nechť $f(x),\ \hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom $[\hat{f}(\xi)]\check{}(x) = f(x)$ pro s.v. $x \in \mathbb{R}^n$.

Poznámky.
• důsledek: tzv. věta o jednoznačnosti: $f \in L^1$, $\hat{f} = 0 \implies f = 0$ s.v.
• speciálně: $\mathcal{F}$ je prostá v L^1.

Věta 6.13. [Plancherelova rovnost.] Nechť $f(x),\, g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi\,.$$

Jinými slovy, $\mathcal{F}$ zachovává skalární součin v $L^2(\mathbb{R}^n)$, speciálně zachovává normu.

Věta 6.14. [F.t. v L^2]

(1) Fourierovu transformaci (chápanou jako zobrazení z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) lze rozšířit na zobrazení z $L^2(\mathbb{R}^n)$ do $L^2(\mathbb{R}^n)$.
(2) Toto rozšíření je izomorfismus $L^2(\mathbb{R}^n)$ na sebe, tj. vzájemně jednoznačné zobrazení, zachovávající normu.

Poznámky.
• věta nedává praktický návod, jak $\hat{f}$ pro obecnou f počítat
• pokud $f \in L^2 \cap L^1$, lze použít standardní definici
• pro $f \in L^2 \setminus L^1$ lze použít zobecněnou definici

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} e^{-2\pi i(x,\xi)} f(x)\, dx\,.$$

Poznámky.
• míra Ω konečná ... $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pro $p > q$. Opačná inkluze neplatí: $x^{-1/2} \in L^1(0,1) \setminus L^2(0,1)$.
• míra Ω nekonečná ... neplatí ani jedna inkluze: $\frac{1}{1+x} \in L^2(0,+\infty) \setminus L^1(0,+\infty)$.

Věta 6.15. [Princip neurčitosti.] Nechť $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f(x) \not\equiv 0$. Potom

$$\frac{\|Xf\|_2}{\|f\|_2}\frac{\|Df\|_2}{\|f\|_2} \geq \frac{1}{2\pi}\,.$$

Poznámky.
• definujeme operátory $X : f(x) \to xf(x)$, $D : f(x) \to \frac{1}{2\pi i} f'(x)$
• Věta 6.4. ... $\widehat{Df}(\xi) = \xi\hat{f}(\xi)$
• operátory X, D jsou samoadjungované v $L^2(\mathbb{R}^n)$, tj. $\langle Xf, g\rangle = \langle f, Xg\rangle$, totéž pro D.
• platí $[DX - XD](f) = \frac{1}{2\pi i} f$
• veličina:

$$\frac{\|Xf\|_2}{\|f\|_2} = \left(\frac{\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2\, dx}{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx}\right)^{1/2}$$

vyjadřuje míru rozptýlenosti nosiče f od 0. Totéž vyjadřuje $\frac{\|Df\|_2}{\|f\|_2}$ pro $\hat{f}$.
• srovnej předchozí větu s Větou 6.9.: $f(x)$ má omezený nosič a $f(x) \not\equiv 0$, pak $\hat{f}(\xi)$ nemá omezený nosič
• lze ukázat, že rovnost ve Větě 6.15. nastane pouze pro funkci typu e^{-ax^2}