8. Dodatky

Lebesgueovy prostory. Jsou určeny normou

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$
$$\|f\|_\infty = \inf\{c > 0 : \ |f(x)| \leq c \text{ s.v. v } \Omega\}$$

Lemma 8.1. Je-li $f(x) \in L^\infty(\Omega)$, je $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ s.v. v Ω.

Věta 8.1. Prostor $L^\infty(\Omega)$ je úplný.

Poznámka. Pro $a_n \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[\inf_{k\geq n} a_k \right].$$

Alternativně: nejmenší hromadný bod posloupnosti a_n.

Lemma 8.2. [Fatouovo lemma.] Nechť $h_n(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ jsou nezáporné, měřitelné. Potom

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x) \, dx$$

Důsledky. Nechť $h_n(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ jsou nezáporné, měřitelné a $h_n(x) \to h(x)$ s.v. v Ω. Potom

- $\int_\Omega h(x) \, dx \leq \sup_n \int_\Omega h_n(x) \, dx$
- $\int_\Omega h(x) \, dx \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n(x) \, dx$, pokud limita vpravo existuje.

Lemma 8.3. Nechť posloupnost funkcí $f_n(x)$ je cauchyovská v $L^1(\Omega)$. Potom existuje podposloupnost $f_{n_k}(x)$ a funkce $f(x)$ tak, že $f_{n_k}(x) \to f(x)$ s.v. v Ω.

Lemma 8.4. [O vnoření.] Nechť $|\Omega| < \infty$, nechť $1 \leq q < p \leq \infty$. Potom $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ a platí

$$\|f\|_q \leq c \, \|f\|_p , \qquad c = |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} .$$

Poznámka.

- předpoklad $|\Omega| < \infty$ je podstatný: $f(x) = \frac{1}{1+x} \in L^2(0, +\infty) \setminus L^1(0, \infty)$.
- opačné vnoření $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ ($q < p$) neplatí nikdy.

Věta 8.2. Prostor $L^p(\Omega)$, $p \in [1,\infty)$, je úplný.

DIRACOVA FUNKCE. Symbolem $\delta_y(x)$ značíme funkci takovou, že

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta_y(x)\,dx = f(y)$$

pro libovolnou funkci $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Chápeme-li $\int$ jako Lebesgueův (Newtonův, Riemannův) integrál, pak taková funkce neexistuje! Následující výpočty však vedou k zajímavým (a někdy i správným) závěrům.

Dirac a konvoluce. Platí

$$[\delta_z * f](x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\delta_z(y)\,dy = f(x-z)$$

Tedy konvoluce s δ_z způsobí posun argumentu o z. Speciálně, δ_0 je vůči operaci konvoluce jednotkový prvek.

Dirac a Fourierova transformace. Platí

$$\hat{\delta_a}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-2\pi i\xi x)\delta_a(x)\,dx = \exp(-2\pi i\xi a)$$
$$\check{\delta_a}(x) = \exp(2\pi iax)$$

Speciálně: $\hat{\delta_0} = 1$, $\hat{1} = \delta_0$ (neboť $\check{\delta_0} = 1$). Srovnejte s principem neurčitosti: čím menší nosič f, tím větší nosič $\hat{f}$.
Dále: značíme-li $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalární součin v $L^2(\mathbb{R})$, je

$$\hat{f}(\xi) = \langle f(x), \exp(2\pi i\xi x)\rangle\,.$$

Tedy zhruba řečeno, $\hat{f}(\xi)$ je velké, pokud v průběhu $f(x)$ dominuje chování o frekvenci ξ. Extrémním vyjádřením tohoto principu je vztah

$$[\widehat{\exp(2\pi iax)}] = \delta_a$$

tj. čistá vlna o frekvenci a se transformuje v Diracovu funkci v bodě a.

K Větě 6.3. Pomocí předchozího a Věty 6.8.

$$[\widehat{f(x-z)}](\xi) = [\widehat{f * \delta_z}](\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{\delta_z}(\xi) = \hat{f}(\xi)\exp(-2\pi iz\xi)$$

Rovnost je správná, pouze důkaz je "nekorektní" - situace v matematice ne až tak neobvyklá.

Dirac a Fourierova řada. Funkci δ_0 rozšíříme 2π-periodicky - takže Diraci sedí v každém bodě $2k\pi$. Je to sudá funkce, tedy $b_k = 0$ a

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta_0(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}$$

Hledaný rozvoj lze zapsat jako

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2k\pi}(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\cos(kx)$$

Víceznačné komplexní funkce. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$. Přiřazení $\Phi : z \to M(z)$, kde $M(z) \subset \mathbb{C}$, se nazývá víceznačná funkce v Ω.
Funkce $f(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ se nazývá spojitá větev víceznačné funkce Φ, pokud (1) $f(z)$ je spojitá a (2) $f(z) \in M(z)$ pro $\forall z \in \Omega$.

Příklady.
• Dříve definované funkce

$$\begin{aligned} \log\ &: z \to \left\{\zeta \in \mathbb{C} :\ \exp\zeta = z\right\} \\ \arg\ &: z \to \left\{\beta \in \mathbb{R} :\ z = |z|\exp(\beta i)\right\} \end{aligned}$$

jsou příklady víceznačných funkcí v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
• Názorně: argument arg měří úhel, který nenulové komplexní číslo svírá s kladnou reálnou polosou. Úhel není jednoznačný, je určen až na násobek 2π.
• V množině $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} :\ x \leq 0\}$ je definována tzv. hlavní hodnota argumentu Arg tak, že volím tu (jednoznačně určenou) hodnotu argumentu, která leží v intervalu $(-\pi, \pi)$.
• Funkce Arg je spojitou větví arg v množině Ω. Naproti tomu neexistuje spojitá větev arg v celém $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Sporem: nechť $a(z)$ je taková větev. Potom $a(1) = 2k\pi$ pro vhodné k. Jaká je nyní hodnota $a(-1)$? Postupujme z 1 do -1 po jednotkové kružnici proti směru hodinových ručiček. Protože $a(z)$ se spojitě zvětšuje, nutně $a(-1) = 2k\pi + \pi$. Postupujme nyní z 1 do -1 proti směru hodinových ručiček - úhel se spojitě zmenšuje, tedy $a(-1) = 2k\pi - \pi$, což je spor.
• Podobně: hlavní hodnota logaritmu Log je příkladem spojité větve log v Ω. Podle Věty 5.1. zde platí

$$\mathrm{Log}'(z) = \frac{1}{\exp'(\mathrm{Log}\,z)} = \frac{1}{\exp(\mathrm{Log}\,z)} = \frac{1}{z}$$

- srovnejte s derivací $\ln x$ v $\mathbb{R}$. Opět nelze nalézt spojitou větev log v celém $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Taková funkce by zde totiž byla primitivní funkcí k $1/z$, a tudíž integrál po každé uzavřené křivce v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ by byl nula. To však odporuje vzorci

$$\int_\phi \frac{dz}{z} = 2\pi i\,,$$

kde ϕ je jednotková kružnice.