Příklady 4 - nelineární systémy

1. Nalezněte obecná řešení soustav (návod: 1. integrál nebo úloha 2.):

   (a) $\dot{x} = x/(x+y)^2, \quad \dot{y} = y/(x+y)^2. \quad (x > 0,\ y > 0)$
   (b) $\dot{x} = x^2 y, \quad \dot{y} = xy^2. \quad (x > 0,\ y > 0)$
   (c) $\dot{x} = x^2/y, \quad \dot{y} = x. \quad (x > 0,\ y > 0)$
   (d) $\dot{x} = x/(x-y), \quad \dot{y} = y/(x-y). \quad (x > y > 0)$
   (e) $\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = yz, \quad \dot{z} = -z^2. \quad (y > 0,\ z > 0)$
   (f) $\dot{x} = -x^2, \quad \dot{y} = xy - 2z^2, \quad \dot{z} = xz. \quad (x > 0)$
   (g) $\dot{x} = 1 + z, \quad \dot{y} = y^2 \exp(3x), \quad \dot{z} = (1+z)^2. \quad (y > 0,\ z > -1)$
   (h) $\dot{x} = (1-x)^4, \quad \dot{y} = (x-1)^3, \quad \dot{z} = z^3 \exp(-y). \quad (x > 1,\ z > 0)$

2. Dokažte, že řešení $[x(t), y(t)]$ soustavy (f, g spojité) $\dot{x} = f(x,y)$, $\dot{y} = g(x,y)$, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ se za předpokladu $f(x_0, y_0) \neq 0$ (lokálně) shoduje s grafem funkce $y = y(x)$, řešící rovnici $y' = g(x,y)/f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$.

3. Substitucí $y = \dot{x}$ řešte následující úlohy:

   (a) Načtrněte chování řešení, u periodických řešení nalezněte vzorec pro periodu:

      i. $\ddot{x} + x = 0$
      ii. $\ddot{x} + \sin x = 0$
      iii. $\ddot{x} + 2x^3 = 0$
      iv. $\ddot{x} + x - x^2 = 0$

   (b) Za jak dlouho dospěje řešení rovnice $\ddot{x} = 1/2 \exp x$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ do hodnoty $x = \ln 5$?
   (c) Za jak dlouho dospěje řešení rovnice $\ddot{x} = \sinh x \cosh x$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ do hodnoty $x = 1$?

   (Návod: Barrowova formule.)

4. Pro systém dravec-kořist (kdo je kdo?) $\dot{x} = kx - axy$, $\dot{y} = -ly + bxy$, $x(0) > 0$, $y(0) > 0$, (a, b, k, l jsou kladné konstanty):

   (a) Dokažte, že ani jeden druh nevyhyne.
   (b) Najděte první integrál soustavy.
   (c) Nakreslete průběhy různých řešení.