1. Cvičení na jednoznačnost řešení.

   (a) Nechť f je spojitá funkce, $f(y) = 0$ pro $y \le 0$ a $f(y) > 0$ pro $y > 0$. Pak $y \equiv 0$ je jediným řešením problému $y' = f(y)$ s počáteční podmínkou $y(0) = 0$ právě tehdy, když (pro $\delta > 0$)

   $$\int_0^\delta \frac{d\eta}{f(\eta)} = +\infty. \tag{1}$$

   (Návod: Barrowova formule.)

   (b) Ukažte, že je-li funkce f v předchozím případě lipschitzovská, je podmínka (1) splněna.

   (c) *Na základě bodu (a) navrhněte silnější variantu klasické věty: 'Je-li $f(y)$ lipschitzovská, je rovnice $y' = f(y)$ jednoznačně řešitelná'.

2. Obálka a singulární řešení.

   (a) Křivka ϕ se nazývá *obálkou* systému křivek $\{\phi_c\}$, pokud se ϕ dotýká každé křivky z $\{\phi_c\}$. (Křivky se dotýkají, mají-li společný bod i tečnu.)

   (b) Nechť funkce $y_c(x)$ jsou vesměs řešení jisté ODR 1. řádu. Nechť funkce $y = y(x)$ je taková, že její graf je obálkou grafů funkcí y_c. Potom $y(x)$ je též řešení dané rovnice. Dokažte. Platí totéž pro rovnice 2. řádu?

   (c) *Nechť křivky $\{\phi_c\}$ jsou popsány rovnicemi $F(x, y, c) = 0$. Pak rovnice obálky vznikne vyloučením c z rovnic $F(x, y, c) = 0$ a $\partial F/\partial c(x, y, c) = 0$.

   (d) Některé rovnice lze řešit tak, že nejprve najdeme sadu "obecných řešení". Jejich obálkou pak získáme další tzv. *singulární řešení.*

3. Nalezněte obecné a singulární řešení:

   (a) $y = xy' + [y']^2$

   (b) $y = xy' + \cos y'$

   (c) $y = xy' + 1/y'$

   (Pro tyto tzv. Clairautovy rovnice existuje obecné řešení ve tvaru $y' = c$, c je konstanta.)

4. Nalezněte křivku takovou, aby část tečny ohraničená souřadnými osami měla délku a. Návod: omezte se na první kvadrant, obecné řešení hledejte jako přímku s úhlem sklonu c. Singulárním řešením je asteroida $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Ukažte též, že problém vede na diferenciální rovnici

$$(1 + [y']^2)(xy' - y)^2 = a^2[y']^2.$$

5. Nalezněte křivku takovou, aby součin vzdáleností tečny od bodů $(-a, 0)$ a $(a, 0)$ byl roven b^2. (Singulárním řešením je elipsa.) Ukažte, že problém vede na rovnici

$$(xy' - y)^2 = b^2 + (b^2 + a^2)[y']^2.$$

6. *Ukažte, ze Gronwallovo lemma je přesné v následujícím smyslu: Nechť $\rho \geq 0$ je měřitelná funkce taková, že $\int_0^x \rho = +\infty$ pro každé $x > 0$. Pak existuje spojitá funkce ξ taková, že

$$\xi(x) \leq \int_0^x \rho(u)\xi(u)\,du, \qquad (+)$$

   pro každé $x \geq 0$, a přitom $\xi(x) > 0$ pro $x > 0$.

   (Návod: ξ konstruujte odzadu: položte $\xi = 1$ pro $x \geq 1$. Protáhněte $\xi = 1$ až do $x_0 \in (0, 1)$ tak, aby (+) bylo zaručeno pro $x \geq 1$. Spojitě klesněte na hodnotu $\xi = 1/2$, tu držte do $x_1 \in (0, x_0)$ tak, aby (+) platilo pro $x \geq x_0$. Atd.)