1. Pro která a je $(0,0)$ (asymptoticky) stabilní pro systém

$$\begin{aligned} x' &= -x + ay \\ y' &= x - y \end{aligned}$$

2. Pro která a, b je $(0,0)$ (asymptoticky) stabilní pro systém

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= bx + ay \end{aligned}$$

3. Nechť $q(y)$ je lipschitzovská funkce s vlastností $\operatorname{sgn}(q(y)) = \operatorname{sgn}(y)$. Pak nulové řešení rovnice

$$\ddot{x} + q(\dot{x}) + x = 0$$

je asymptoticky stabilní. (Návod: Ljapunovský funkcional $x^2 + [\dot{x}]^2$.)

4. Pro rovnici $\dot{x} = (t^{-2} - 1)x + x^3$ ukažte, že

   (a) nulové řešení je uniformně stabilní v (η, ∞) kde $\eta > 0$ je pevné. (Návod: Ljapunovský funkcionál $V(\xi, t) = e^{2/t}\xi^2$.)

   (b) nulové řešení není uniformně stabilní v $(0, \infty)$.

5. Uvažujte rovnici se zpožděním (a, b, r jsou kladné konstanty)

$$x'(t) = ax(t) + bx(t - r). \tag{1}$$

   (a) Nechť $\phi(\tau) : [-r, 0] \to R$ je spojitá funkce. Pak existuje jediná funkce $x = x(t)$ s definičním oborem $[-r, \infty)$ taková, že $x(\tau) = \phi(\tau)$ pro $\forall \tau \in [-r, 0]$, splňující rovnici (1) pro každé $t > 0$. (Návod: postupujte po intervalech délky r.)

   (b) Nechť $a < 0$ a $|b| \le |a|$. Pak nulové řešení rovnice (1) je stabilní. Návod: užijte Ljapunovský funkcionál

$$V(t) = x^2(t) + |a| \int_{t-r}^{t} x^2(s)\, ds.$$

   (c) Nechť $a < 0$ a $|b| < |a|$. Pak nulové řešení rovnice (1) je asymptoticky stabilní. Návod: metodou předešlého bodu ukažte, že funkce $y(t) = x(t)\exp(\gamma t)$ je omezená, pokud $\gamma > 0$ je malé.

6. Pomocí Ljapunovského funkcionálu tvaru $ax^2 + by^2$, kde a, b jsou vhodně zvolené kladne konstanty, vyšetřete stabilitu počátku pro soustavy

(a)
$$x' = -2y - x^3$$
$$y' = x - y^3$$

(b)
$$x' = y - 2x^3$$
$$y' = -2x - y^3$$

(c)
$$x' = -x - y^2$$
$$y' = xy - x^2y$$

(d)
$$x' = -xy^2$$
$$y' = -y - 2x^2y$$

(e)
$$x' = 2y + x^3$$
$$y' = -x + y^3$$

(f)
$$x' = -y + 2x^3$$
$$y' = 2x + y^3$$

7. Změnou souřadnic $x(t) = r(t)\cos\phi(t)$, $y(t) = r(t)\sin\phi(t)$ studujte stabilitu počátku:

(a)
$$x' = -2y + ax\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y' = 2x + ay\sqrt{x^2 + y^2}$$

(b)
$$x' = y + ax(x^2 + y^2)$$
$$y' = -x + ay(x^2 + y^2)$$

(c)
$$x' = -y - axy^2$$
$$y' = x + ax^2y$$

(d)
$$x' = -y(x^2 + y^2 - a)$$
$$y' = x(x^2 + y^2 - a)$$

(e)
$$x' = y(-a + x^2 + y^2)$$
$$y' = -x(-a + x^2 + y^2)$$

(f)
$$x' = 2y + ax(x^2 + y^2)^2$$
$$y' = -2y + ay(x^2 + y^2)^2$$

(g)
$$x' = 4y + ax\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y' = -4x + ay\sqrt{x^2 + y^2}$$