

PŘÍKLADY NA LINEÁRNÍ SYSTÉMY

1. Najděte obecné řešení soustavy:

(a)

$$\begin{aligned}x' &= 10x - 6y \\y' &= 18x - 11y\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}x' &= -12x - 8y \\y' &= 20x + 12y\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}x' &= -5x + 4y \\y' &= -x - y\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x' &= -6x + 8y \\y' &= -4x + 6y\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}x' &= -5x - 10y \\y' &= 5x + 5y\end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}x' &= -2x + y \\y' &= -4x + 2y\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}x' &= -2x - 3y \\y' &= 6x + 7y\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}x' &= 5x - 6y \\y' &= 3x - y\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}x' &= -5x + 4y \\y' &= -9x + 7y\end{aligned}$$

2. Najděte obecné řešení soustavy:

(a)

$$\begin{aligned}x' &= 2x - y + 3z \\y' &= -2x + y + 5z \\z' &= -x - y + 6z\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}x' &= y - z \\y' &= -y + z \\z' &= x - z\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x' &= -2x + 8y + 6z \\y' &= -4x + 10y + 6z \\z' &= 4x - 8y - 4z\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}x' &= -3x + z \\y' &= -3y + 2z \\z' &= 3x - 2y - 3z\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}x' &= x + 2y + 3z \\y' &= 2x + 4y + 6z \\z' &= 3x + 6y + 9z\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}x' &= 6x - 7y + 4z \\y' &= x + z \\z' &= -2x + 3y\end{aligned}$$

3. S nulovou počáteční podmínkou v bodě $t = 0$ řešte systémy

(a)

$$\begin{aligned}x' &= -2x - y + 37 \sin t \\y' &= -4x - 5y\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}x' &= 4x - 2y \\y' &= 8x - 4y + \sqrt{t}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x' &= 2x + y - \ln t \\y' &= -4x - 2y + \ln t\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}x' &= 4x + 3y - 3z \\y' &= -3x - 2y + 3z \\z' &= 3x + 3y - 2z + 2e^{-t}\end{aligned}$$

4. * Nechť $x = x(t)$ je C^2 funkce taková, že $\ddot{x} + \dot{x} + x \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \infty$. Potom $x \rightarrow 0$ pro $t \rightarrow \infty$.

5. Najděte e^{At} pro $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. (Návod: $e^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i \sin(b))$.)

6. Pro danou matici A najděte matici B tak, že $e^B = A$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} e & 1 & 2 \\ 0 & e & 3 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Nechť A je matice 2×2 . Existuje matice B tak, že $B^2 = A$?

8. Pro libovolnou čtvercovou matici A definujme ($A^0 = I$)

$$\sin A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} \quad \cos A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n}$$

(a) Ukažte, že uvedené řady konvergují.

(b) Zformulujte a dokažte analogii nějakého tvrzení, platícího pro 'obyčejný' sinus a cosinus.

(c) Uveďte příklad systému rovnic, jehož řešení lze výhodně zapsat pomocí těchto funkcí.