Značení. Pro libovolný interval $I \subset \mathbb{R}$ značí $|I|$ jeho délku (včetně 0 a $+\infty$).

Tvrzení 1. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Potom f je Riemannovsky integrovatelná, právě když množina jejích bodů nespojitosti je nulová.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazve *nulová*, jestliže platí: pro každé $\varepsilon > 0$ existují intervaly $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ takové, že

1. $M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$
2. $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon$

Lemma 1. Platí:

1. spočetná množina je nulová
2. spočetné sjednocení nulových množin je nulová množina
3. existuje nulová, nespočetná množina

Definice. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Oscilací funkce f na množině $M \subset \mathbb{R}$ rozumíme

$$\operatorname{osc}(f, M) := \sup f(M) - \inf f(M)$$

Oscilací funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme

$$\operatorname{osc}(f, x_0) := \lim_{\delta \to 0+} \operatorname{osc}(f, U(x_0, \delta))$$

Lemma 2. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0, a, $b \in \mathbb{R}$. Potom platí:

1. Funkce f je spojitá v bodě x_0, právě když $\operatorname{osc}(f, x_0) = 0$.
2. Množina $A = \{x;\ \operatorname{osc}(f, x) < a\}$ je otevřená: pro každé $x_0 \in A$ existuje $\delta > 0$ takové, že $U(x_0, \delta) \subset A$
3. Množina $B = \{x;\ \operatorname{osc}(f, x) \geq b\}$ je uzavřená: jestliže $x_n \in B$ a $x_n \to x_0 \in \mathbb{R}$, pak $x_0 \in B$.

. . . .

V.1 Dokažte Lemma 1. Mimochodem, existuje vůbec nenulová množina?

V.2 Dokažte Lemma 2.

V.3. Zformulujte (a dokažte) ekvivalentní formulace, založené na pojmu oscilace, pro některé další pojmy, kupříkladu:

- Bolzano-Cauchyho podmínka pro posloupnosti
- stejnoměrná spojitost funkce na intervalu
- existence jednostranné vlastní limity funkce v bodě

V.4. Buď $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omezená funkce. Odvoďte přímo z Tvrzení 1 následující fakta:

- f spojitá až na konečně výjimek $\implies$ f je R.i.

- f monotónní $\implies$ f je R.i.
- Riemannova funkce je R.i. na $[0, 1]$.
- Dirichletova funkce není R.i. na $[0, 1]$.

V.5* Dokažte tzv. princip kompaktnosti: Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je omezená, uzavřená množina. Nechť $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ je libovolný systém *otevřených* intervalů takový, že $M \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} I_\alpha$. Pak existuje *konečná* množina $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ taková, že že $M \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}'} I_\alpha$.